土木學會誌 第二卷第五號 大正五年十月

湖水ノ貯水力ニ就テ

工學士 鶴見一之

湖水ノ貯水力(Secretention)ニ就テ論セラレタルモノハ多クハ圖式解法ニ據レルモノニシテ算式ニ據レルモノ少ク殊ニ著者カ論セントスル所ノ河川カ湖水又ハ貯水池ニ流入シテ之ヨリ河川ノ流出スルモノニ就テ其ノ貯水力ヲ算出スルノ方法ニ就テハ著者ノ推敲尚淺キニ由ルモノナルカ書中ニ論セラレタルモノ未タ之アルヲ見ス然ルニ僭越ニモ著者カ本論文ヲ掲ケタルハ若シ本論文カ基トナリテ此方面ノ研究ノ一資料トナラハ本懷之ニ過キストノ考ニテ掲出セルニ止ルノミ幸ニ諸士ノ批評ヲ仰キ此方法ヲ實地ニ應用スル域ニ迄進メ得ハ著者ノ欣何モノカ之ニ若カン

本論文ヲ別チテ次ノ四節トナス

第一節　一河川カ一定ノ流量ニテ一定ノ平面積ヲ有スル湖水ニ流入シ一河川カ之ヨリ流出スル場合

第二節　流出河川ノ水面勾配カ湖面ノ變化ニ伴ヒテ時々刻々變動スル場合

第三節　湖水ノ平面積カ水面ノ變化ニ從ッテ變化スル場合

第四節　結論

第一節　今流入河川ノ流量ヲ一秒時ニQ立方米トシ流出スル河川ノ流量ヲ一秒時ニq立方米ト

ス湖面ハ流入量ト流出量トカ相等シケレハ變化ヲナサスト雖モ $Q>q$ ナレハ昇リ $q>Q$ ナレハ降ルヘシ

湖面上昇ノ程度ト上昇ニ要スル時間トノ關係ヲ論スル爲メ次ノ如ク考フ

dt ナル時間内ニ湖面カ dz 丈ケ昇リタリトスレハ湖ノ平面積ヲ F_0 平方米ニテ示ス時ニハ次ノ關係カ成立スヘシ

$$F_0 dz = Q\,dt - q\,dt \quad \cdots\cdots(1)$$

今本式中 F_0 ト Q トハ不變ニシテ q ハ z ナル流出河川ノ水深ニ從ツテ變化スルモノト考ヘ湖ヨリ流出河川ノ流レ出ル口ニ於ケル水深ヲ z トシ湖面ノ變化モ亦流出口河底ヲ基準トシテ考フル事トス

(イ)流出河川ノ横斷面形ヲ矩形ナリトシ其ノ幅員ヲ b 米トシ任意ノ時ノ水深ヲ z 米突トス且ツ此流出河川ノ水面勾配ヲ表ハスニ J ヲ以テシ Chezy 氏公式ヲ用ヒテ流速ヲ算出スルモノトシ其ノ流速係數ヲ c トスレハ

$$q = bzc\sqrt{RJ} \quad \cdots\cdots(2)$$

R ハ流出河川斷面積 bz ニ對スル動水平均深ヲ米突ニテ表ハセルモノトス

然ルニ天然河川ノ如ク幅員カ水深ニ比シテ大ナル時ニハ R ノ代リニ z ナル水深ヲ代用シ得ルカ故ニ(2)式ハ次ノ如クナルヘシ

$$q = bcJ^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)式ヲ(1)式ニ入ル丶トキニハ次式ヲ得ヘシ

$$dt = \frac{F_0 dz}{Q - bcJ^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}} = \frac{F_0}{Q}\cdot\frac{dz}{\left(1 - \frac{bcJ^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}}{Q}\right)} \quad \cdots\cdots(4)$$

今考ヘツヽアル間ニ於テハJ及ヒcカ不變ナリト假定スレハ$z^{\frac{3}{2}}$ノ係數タル$\frac{bcJ^{\frac{1}{2}}}{Q}$ハ或常數ニテ置換スルヲ得ヘシ仍テ次式ノ如ク考フル事トス

$$a^{\frac{3}{2}}=\frac{bcJ^{\frac{1}{2}}}{Q} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

之ヲ(4)式ニ入ルヽ時ニハ

$$dt=\frac{F_0}{Q}\cdot\frac{dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \quad \int dt=\frac{F_0}{Q}\int\frac{dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(6)式ヲ積分スル時ニハ次ノ如クナルヘシ

$$t=\frac{2F_0}{aQ}\left(\frac{1}{3}log_e\frac{\sqrt{1+\sqrt{az}+az}}{1-\sqrt{az}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arc\,tan\frac{2\sqrt{az}+1}{\sqrt{3}}\right)+C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

然ルニ湖面カ變化シ始メタル時ヨリtヲ測リ其ノ時ノzヲz_0トスレハCノ價ハ次ノ如クナルヘシ

$$C=-\frac{2F_0}{aQ}\left(\frac{1}{3}log_e\frac{\sqrt{1+\sqrt{az_0}+az_0}}{1-\sqrt{az_0}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arc\,tan\frac{2\sqrt{az_0}+1}{\sqrt{3}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

故ニ(7)及ヒ(8)ヨリ次ノ式ヲ得ヘシ

$$t=\frac{2F_0}{aQ}\left[\frac{1}{3}log_e\sqrt{\frac{1+\sqrt{az}+az}{1+\sqrt{az_0}+az_0}}\cdot\frac{1-\sqrt{az_0}}{1-\sqrt{az}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arc\,tan\frac{2\sqrt{az}+1}{\sqrt{3}}-arc\,tan\frac{2\sqrt{az_0}+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \quad \cdots\cdots(9)$$

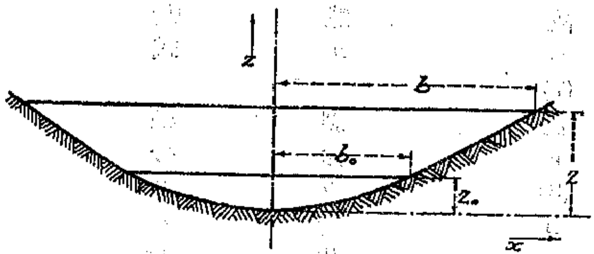
(ロ)流出河川ノ横斷面カ拋物線形ニテ次圖ノ如キ形ヲ呈シ拋物線ハ次式ニテ表ハシ得ルモノトス

$$z=px^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10_a)$$

$$z_0=pb_0^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10_b)$$

pハぱらめーてるニシテ(10_b)ヨリ之ヲ求メ(10_a)式ニ入ルレハ

$$z=\frac{z_0}{b_0^2}b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$



或任意ノ時ニ於ケル横斷面ノ最大水深ヲzニテ其ノ時ノ水面幅ヲ$2b$ニテ表ハストキニハ流水斷面積ハ次ノ如クナルヘシ

$$\frac{4}{3}bz \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(11)及ヒ(12)式ヨリ流水斷面積ヲ他ノ形ニテ表ハストキニハ

$$\frac{4}{3}\frac{b_0}{z_0^{\frac{1}{2}}}z^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

次ニ水面幅カ水深ニ比シテ大ナル時ニハ潤界(Wetted perimeter) Uハ殆ント$2b$ニ等シキカ故ニ此關係ト(12)式ヲ結ヒ付ケ此斷面ニ對スル動水平均深Rヲ求ムレハ其ノ價ハ次ノ如クナルヘシ

$$R=\frac{2}{3}z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

仍テ前ノ如クChezy氏公式ヲ用ヒcヲ流速係數Jヲ水面勾配トスレハ(以下皆之ニ準ス)

$$q=\frac{4}{3}b_0\frac{z^{\frac{3}{2}}}{z_0^{\frac{1}{2}}}c\sqrt{\frac{2}{3}zJ}=\sqrt{\frac{32}{27}}\cdot\frac{b_0J^{\frac{1}{2}}c}{z_0^{\frac{1}{2}}}z^2 \quad \cdots\cdots(15)$$

(15)式ト(1)ヨリ次式ヲ得

$$dt=\frac{F_0}{Q}\cdot\frac{dz}{\left(1-\sqrt{\frac{32}{27}}\cdot\frac{b_0J^{\frac{1}{2}}c}{z_0^{\frac{1}{2}}Q}z^2\right)} \quad \cdots\cdots(16)$$

今Jトcトヲ不變ナリト假定セハ前ノ如クβナル常數ヲ考ヘ之ヲ次ノ如ク置ク

$$\beta^2=\sqrt{\frac{32}{27}}\cdot\frac{b_0J^{\frac{1}{2}}c}{z_0^{\frac{1}{2}}Q} \quad \cdots\cdots(17)$$

故ニ(16)式ヲ次ノ如ク變スルヲ得

$$\int dt=\frac{F_0}{Q}\int\frac{dz}{1-\beta^2z^2} \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\therefore \quad t=\frac{F_0}{2\beta Q}\log_e\frac{1+\beta z}{1-\beta z}+C_1 \quad \cdots\cdots(19)$$

然ルニ$t=0$ノ時ニハ$z=z_0$ナリトスレハ

$$C_1=-\frac{F_0}{2\beta Q}\log_e\frac{1+\beta z_0}{1-\beta z_0} \quad \cdots\cdots(20)$$

(19)及ヒ(20)式ヨリ次ノ式ヲ得ヘシ

$$t=\frac{F_0}{2\beta Q}\log_e\frac{1+\beta z}{1-\beta z}\cdot\frac{1-\beta z_0}{1+\beta z_0} \quad \cdots\cdots(21)$$

又tヲ與ヘzヲ求ムルニハ(21)式ヲ變シテ次ノ如クナスヲ得ヘシ

$$z=\frac{\frac{1+\beta z_0}{1-\beta z_0}e^{\frac{2\beta ct}{z_0}}-1}{\beta\left(\frac{1+\beta z_0}{1-\beta z_0}e^{\frac{2\beta ct}{z_0}}+1\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

第二節　流出河川ノ水面勾配カ時々刻々ニ湖面ノ變化ニ伴フテ變化シ其ノ變化ノ關係ハ不定流ノ理論ヲ應用シ第二卷第四號ニ示サレタル關係ニテ表ハシ得ルモノト假定スレハ

$$\frac{R}{J}=\frac{R_0}{J_0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

ノ代リニRヲzノ函數ニテ表ハシ得ヘキカ故ニ前ニ取扱ヒタルカ如キ斷面形ノ變化ニヨリテ別

R_0 J_0ハ湖面ノ變化ヲ始ムル時ノ動水平均深及ヒ水面勾配ヲ表ハシR Jハ其後ノ任意ノ時間t秒ヲ經過セル時ノ夫レ等ノ値トナス

(イ)流出河川カ矩形斷面ヲ有スル場合

水面幅ヲbニテ表ハストスレハ流水斷面ハ第一節(イ)ニ於ケルカ如ク初メニハbz_0ニシテt秒ヲ經過セル後ニハbzナルヘク動水平均深ハ初メニハz_0ニテt秒後ニハzナルヘシ故ニqハ(3)式ヲ以テ表ハシ得レト此場合ニ於ケルJハ不變ナラスシテ(23)式ニテ表ハサルヽカ故ニqハ次式ノ如クナルヘシ

$$q=\frac{bcJ_0^{\frac{1}{2}}}{z_0^{\frac{1}{2}}}z^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

(24)式ト(1)式ヨリ次ノ關係ヲ得ヘシ

$$dt=\frac{F_0}{Q}\cdot\frac{dz}{\left(1-\frac{bcJ_0^{\frac{1}{2}}}{Q\,z_0^{\frac{1}{2}}}z^2\right)} \quad \cdots\cdots(25)$$

今cヲ不變ナリト考フレハz^2ノ係數ヲ次ノ如ク置換シ得

$$\gamma^2=\frac{bcJ_0^{\frac{1}{2}}}{Q\,z_0^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots(26)$$

仍テtハ次ノ如クナルヘシ

$$t=\frac{F_0}{2\gamma Q}\log_e\frac{1+\gamma z}{1-\gamma z}+C_z \quad \cdots\cdots(27)$$

然ルニ$t=0$ノ時ニハ$z=z_0$ナルカ故ニ

$$t=\frac{F_0}{2\gamma Q}\log_e\frac{1+\gamma z}{1-\gamma z}:\frac{1-\gamma z_0}{1+\gamma z_0} \quad \cdots\cdots(28)$$

又tヲ與ヘzヲ求ムル時ニハ

$$z=\frac{\frac{1+\gamma z_0}{1-\gamma z_0}e^{\frac{2\gamma Qt}{F_0}}-1}{\gamma\left(\frac{1+\gamma z_0}{1-\gamma z_0}e^{\frac{2\gamma Qt}{F_0}}+1\right)} \quad \cdots\cdots(29)$$

(ロ)横斷面形カ拋物線形ナル場合

第一節(ロ)ノ場合ノ(15)式ト(23)式トヲ結ヒ付ケRトR_0トハ(14)式ノ如キ關係ヲ有スルモノヲ以テ置クトキニハqハ次ノ式ニテ表ハサルヘシ

$$q=\sqrt{\frac{32}{27}\cdot\frac{b_0}{z_0}cJ_0^{\frac{1}{2}}\,z^{\frac{5}{2}}} \quad \cdots\cdots(30)$$

(30)式ヲ(1)式中ニ入ルヽトキニハ

$$dt=\frac{F_0}{Q}\cdot\frac{dz}{\left(1-\sqrt{\frac{32}{27}}\cdot\frac{b_0 J_0^{\frac{1}{2}} c}{z_0} z^{\frac{5}{2}}\right)} \quad \cdots\cdots(31)$$

前ト同様ニ

$$\delta^{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{32}{27}}\cdot\frac{b_0 J_0^{\frac{1}{2}} c}{z_0} \quad \cdots\cdots(32)$$

ニテ置キ換フルトキニハ

$$dt=\frac{F_0}{Q}\cdot\frac{dz}{\left(1-\delta^{\frac{5}{2}} z^{\frac{5}{2}}\right)} \quad \cdots\cdots(33)$$

(33)式ノ積分ヲナス爲メニ $\delta z=x^2$ ト置キ(33)式ノ右邊ヲ變スルトキニハ

$$dt=\frac{F_0}{Q}\cdot\frac{2x\,dx}{\delta(1-x^5)}=\frac{2F_0}{\delta Q}\cdot\frac{x\,dx}{1-x^5}$$

$$\int\frac{x\,dx}{1-x^5}=-\int\frac{x\,dx}{x^5-1}=-\left[\frac{\log_e(x-1)}{5}+\frac{1}{5}\left\{\cos\frac{4}{5}\pi\ \log_e\left(x^2-2x\cos\frac{2}{5}\pi+1\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\frac{8}{5}\pi\ \log_e\left(x^2-2x\cos\frac{4}{5}\pi+1\right)-2\sin\frac{4}{5}\pi\ \operatorname{arc\,tan}\frac{x-\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}-2\sin\frac{8}{5}\pi\ \operatorname{arc\,tan}\frac{x-\cos\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{4}{5}\pi}\right\}\right]$$

故ニ

$$t=\frac{2F_0}{5\delta Q}\left[2\sin\frac{4}{5}\pi\,arc\tan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}+2\sin\frac{8}{5}\pi\,arc\tan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{4}{5}\pi}\right.$$
$$-\cos\frac{4}{5}\pi\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{2}{5}\pi+1\right)-\cos\frac{8}{5}\pi\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{4}{5}\pi+1\right)$$
$$\left.-\log_e\left(\sqrt{\delta z}-1\right)\right]+C_3 \qquad (34)$$

今(34)式ヲ表ハスニ $t=f(z)$ ヲ以テスレハ $t=0$ ノ時ニ $z=z_0$ ナルカ故ニ

$$C_3=-f(z_0) \qquad (35)$$

第三節　今迄ハ湖ノ平面積F_0ハzノ變化スルモ不變ナリト考ヘタルカ本節ニ於テハFナル平面積ハ水深zノ時ノ湖ノ平面積ニシテ水深z_0ノ時ニハF_0ナリトシFハzノ函數ニシテ次ノ如キ式ニテ表ハシ得ルモノト假定セン

$$F=F_0+mz+nz^2 \qquad (36)$$

m及ヒnハzノ變化スルモ變セサル常數ナリトス

(36)式ハ任意ノ假定ナルカ如キ觀アレト實際湖面ノ變化ニ伴フ平面積ヲ直交軸ニヨリテ曲線ニテ示ストキニハ略々平滑ナル曲線ヲ得ヘク之ヲ殆ント二次ノ抛物線ニテ表ハシ得ヘキカ故ニ敢テ不當ナル假定ニ非サルヘシト信シ本式ヲ用フルコトヽセルナリ

三タヒ流出河川ノ斷面形ヲ矩形及ヒ抛物線形ノ二種ニ別チ水面勾配カ水位ノ變化ニ伴フテ變セ

サル場合ト變スル場合トヲ本節ニ於テ取扱ハントス

(イ) 第一節(イ)ニ相當スル場合

前ニ考ヘタル(6)式中F_0ノ代リニFヲ入ルヽトキニハ

$$\int dt=\frac{F_0}{Q}\int\frac{dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}}+\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}}+\frac{n}{Q}\int\frac{z^2\,dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}}\quad\cdots\cdots(37)$$

トナリ第一項ハ(7)式ノ示スカ如クナルヘク第二項ハ次ノ如クナルヘシ

$$\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}}=\frac{2m}{a^2Q}\left\{\frac{1}{3}\log_e\frac{\sqrt{1+\sqrt{az}+az}}{1-\sqrt{az}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2\sqrt{az}+1}{\sqrt{3}}-\sqrt{az}\right\}\quad\cdots\cdots(38)$$

第三項ハ次ノ如クナル

$$\frac{n}{Q}\int\frac{z^2\,dz}{1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{a^3Q}\left\{a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}+\log_e\left(1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}\right)\right\}\quad\cdots\cdots(39)$$

故ニtノ價ハ次ノ如シ

$$\begin{aligned}t=&\frac{2F_0}{aQ}\left\{\frac{1}{3}\log_e\frac{\sqrt{1+\sqrt{az}+az}}{1-\sqrt{az}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2\sqrt{az}+1}{\sqrt{3}}\right\}\\&+\frac{2m}{a^2Q}\left\{\frac{1}{3}\log_e\frac{\sqrt{1+\sqrt{az}+az}}{1-\sqrt{az}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2\sqrt{az}+1}{\sqrt{3}}-\sqrt{az}\right\}\\&-\frac{2}{3}\frac{n}{a^3Q}\left\{a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}+\log_e\left(1-a^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}\right)\right\}+C_4\quad\cdots\cdots(40)\end{aligned}$$

或ハ

$$t=\frac{2}{3\alpha Q}\log_e\frac{\sqrt{1+\sqrt{\alpha z}+\alpha z}}{1-\sqrt{\alpha z}}\left(F_0+\frac{m}{\alpha}\right)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha Q}\arctan\frac{2\sqrt{\alpha z}+1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m}{\alpha}-F_0\right)$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{\alpha^3 Q}\left\{\alpha^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}+\log_e\left(1-\alpha^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}\right)\right\}-\frac{2m\sqrt{\alpha z}}{\alpha^2 Q}+C_4 \qquad \cdots(40_a)$$

(40)式ヲ表ハスニ

$$t=f_2(z)+C_4$$

ヲ以テシ　$t=0$　ノ時ニ　$z=z_0$　トスレハ

$$C_4=-f_2(z_0) \qquad \cdots(41)$$

(ロ)第一節(ロ)ニ相當スル場合

先ニ考ヘタル(18)式中F_0ノ代リニ(36)式ノFヲ用フル時ニハ(18)式ニ相當スル式ハ次ノ如クナルヘシ

$$\int dt=\frac{F_0}{Q}\int\frac{dz}{1-\beta^2z^2}+\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-\beta^2z^2}+\frac{n}{Q}\int\frac{z^2dz}{1-\beta^2z^2} \qquad \cdots(42)$$

(42)式右邊ノ第一項ノ積分ハ(19)式ト同結果ヲ得ヘク第二第三項ハ次ノ如クナルヘシ

$$\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-\beta^2z^2}=-\frac{m}{2\beta^2Q}\log_e(1-\beta^2z^2) \qquad \cdots(43)$$

$$\frac{n}{Q}\int\frac{z^2dz}{1-\beta^2z^2}=\frac{n}{\beta^2Q}\left(\frac{1}{2\beta}\log_e\frac{1+\beta z}{1-\beta z}-z\right) \qquad \cdots(44)$$

故ニtノ値ハ次ノ如クナルヘシ

$$t=\frac{F_0}{2\beta Q}\log_e\frac{1+\beta z}{1-\beta z}-\frac{m}{2\beta^2 Q}\log_e(1-\beta^2 z^2)+\frac{n}{\beta^2 Q}\left(\frac{1}{2\beta}\log_e\frac{1+\beta z}{1-\beta z}-z\right)+C_5 \cdots\cdots\cdots(45)$$

$$t=\frac{1}{2\beta Q}\left[\left(F_0+\frac{n}{\beta^2}\right)\log_e\frac{1+\beta z}{1-\beta z}-\frac{m}{\beta}\log_e(1-\beta^2 z^2)-\frac{2nz}{\beta}\right]+C_5 \cdots\cdots\cdots(45_a)$$

式ヲ簡單ニ表ハス爲メニ(45)式ヲ次ノ如ク書キ換フ

$$t=f_3(z)+C_5$$

而シテ $t=0$ ノ時ニハ $z=z_0$ トスレハ

$$C_5=-f_3(z_0) \cdots\cdots\cdots(46)$$

(ハ)第二節ノ(イ)ニ相當スル場合

(25)式ノF_0ノ代リニ(36)式ノFヲ用フル時ニハ次式ヲ得

$$\int dt=\frac{F_0}{Q}\int\frac{dz}{1-\gamma^2 z^2}+\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-\gamma^2 z^2}+\frac{n}{Q}\int\frac{z^2\,dz}{1-\gamma^2 z^2} \cdots\cdots\cdots(47)$$

(47)式ノ形ハ恰モ(42)式ノ形ノ如クニ(42)式ノβノ代リニ(47)式ニテハγヲ用ヒタルノミβ γ共ニzノ函數ナラサルカ故ニ(45)(46)式ヲ得タルカ如ク次ノ式ヲ得ヘシ

$$t=\frac{F_0}{2\gamma Q}\log_e\frac{1+\gamma z}{1-\gamma z}-\frac{m}{2\gamma^2 Q}\log_e(1-\gamma^2 z^2)+\frac{n}{\gamma^2 Q}\left(\frac{1}{2\gamma}\log_e\frac{1+\gamma z}{1-\gamma z}-z\right)+C_6=f_4(z)+C_6 \cdots\cdots\cdots(48)$$

$$t=\frac{1}{2\gamma Q}\left[\left(F_0'+\frac{n}{\gamma^2}\right)\log_e\frac{1+\gamma z}{1-\gamma z}-\frac{m}{\gamma}\log_e(1-\gamma^2 z^2)-\frac{2nz}{\gamma}\right]+C_6 \cdots\cdots\cdots(48_a)$$

$$C_6=-f_4(z_0) \cdots\cdots\cdots(49)$$

(ニ)第二節(ロ)ニ相當スル場合

(31)式F_0ノ代リニ(36)式ノFヲ用フル時ニハ次式ヲ得

$$\int dt=\frac{F_0}{Q}\int\frac{dz}{1-\delta^{\frac{5}{2}}z^{\frac{5}{2}}}+\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-\delta^{\frac{5}{2}}z^{\frac{5}{2}}}+\frac{n}{Q}\int\frac{z^2\,dz}{1-\delta^{\frac{5}{2}}z^{\frac{5}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

(50)式ノ第一項ハ(34)式ノ如ク第二第三項ノ積分ヲ用フレハ次ノ如シ

$$\frac{m}{Q}\int\frac{z\,dz}{1-\delta^{\frac{5}{2}}z^{\frac{5}{2}}}=\frac{2m}{5\delta^2Q}\Bigg\{2\sin\frac{8}{5}\pi\,arc\tan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}$$

$$+2\sin\frac{16}{5}\pi\,arc\tan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{4}{5}\pi}-\cos\frac{8}{5}\pi\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{2}{5}\pi+1\right)$$

$$-\cos\frac{16}{5}\pi\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{4}{5}\pi+1\right)-\log_e\left(\sqrt{\delta z}-1\right)\Bigg\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

$$\frac{n}{Q}\int\frac{z^2dz}{1-\delta^{\frac{5}{2}}z^{\frac{5}{2}}}=\frac{2n}{5\delta^3Q}\Bigg\{2\sin\frac{2}{5}\pi\,arc\tan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}$$

$$+2\sin\frac{4}{5}\pi\,arc\tan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{4}{5}\pi}-\cos\frac{2}{5}\pi\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{2}{5}\pi+1\right)$$

$$-\cos\frac{4}{5}\pi\,\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{4}{5}\pi+1\right)-\log_e\left(\sqrt{\delta z}-1\right)-5\sqrt{\delta z}\Big\} \quad \cdots\cdots\ (52)$$

故ニtノ値ハ次式ヲ以テ表ハサルヘシ

$$t=(34)+(51)+(52)+C_t$$

$$=f_1(z)+C_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ (53)$$

$$C_t=-f_1(z_0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ (54)$$

$$f_1(z)=\frac{4}{5\delta Q}\left[\arctan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}\left\{F_0\sin\frac{4}{5}\pi+\frac{m}{\delta}\sin\frac{8}{5}\pi+\frac{n}{\delta^2}\sin\frac{2}{5}\pi\right\}\right.$$

$$\left.+\arctan\frac{\sqrt{\delta z}-\cos\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{4}{5}\pi}\left\{F_0\sin\frac{8}{5}\pi+\frac{m}{\delta}\sin\frac{16}{5}\pi+\frac{n}{\delta^2}\cos\frac{4}{5}\pi\right\}\right]$$

$$-\frac{2}{5\delta Q}\left[\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{2}{5}\pi+1\right)\left\{F_0\cos\frac{4}{5}\pi+\frac{m}{\delta}\cos\frac{8}{5}\pi+\frac{n}{\delta^2}\cos\frac{2}{5}\pi\right\}\right.$$

$$+\log_e\left(\delta z-2\sqrt{\delta z}\cos\frac{4}{5}\pi+1\right)\left\{F_0\cos\frac{8}{5}\pi+\frac{m}{\delta}\cos\frac{16}{5}\pi\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n}{\delta^2}\cos\frac{4}{5}\pi\right\}+\log_e(\sqrt{\delta z}-1)\left\{F_0+\frac{m}{\delta}+\frac{n}{\delta^2}\right\}\right]-\frac{2n\sqrt{\delta z}}{\delta^3 Q} \quad \cdots\cdots\ (55)$$

第四節　本論ハ單ニ數式上ヨリ導キタル結果ノミニテ實驗ヲ經サルカ故ニ暫シハ實驗ノ場合ニ

之ヲ應用シテ正シキ結果ヲ得ヘキヤ否ヤハ未タ明カナラス今後ノ研究ニ俟ツ所ノモノ大ナリト
ス（完）

1353