

河道リンク/マグニチュードと 流域面積・河川流量の関係

RELATIONSHIPS OF STREAM LINK / MAGNITUDE WITH DRAINAGE AREA AND RIVER DISCHARGE

宮本仁志¹・橋本 翼²・道奥康治³

Hitoshi MIYAMOTO, Tsubasa HASHIMOTO and Kohji MICHIOKU

¹正会員 博士(工学) 神戸大学准教授 工学研究科市民工学専攻(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

²学生会員 神戸大学大学院工学研究科市民工学専攻 博士課程前期課程(同上)

³フェロー会員 工学博士 神戸大学教授 工学研究科市民工学専攻(同上)

Dependency of drainage areas and discharges on Shreve's link magnitude in river basins are examined in this paper. Analyzed here are 109 large river basins in Japan, which have a wide variety of features in size, geology, hydrology, meteorology and land use. We analytically derive equations that represent a relationship between the magnitude and drainage area, the fractal dimension of the magnitude with Horton ratios, and a relationship between the magnitude and mean river discharge. The GIS analysis of DEMs for the 109 river basins shows that Shreve's magnitude law for drainage areas has a universal scaling property with very high regularity for all the 109 river basins with a constant exponent, and that the fractal dimension of the magnitude is estimated to be 1.8. With respect to the relationship of the river discharge to the magnitude, a power-law dependency of the mean annual discharge on the magnitude is confirmed for all the 109 river basins. The results indicate that the link magnitude is one of the basic key quantities for describing the channel network, basin area and river discharge.

Key Words: river basin environment, water resources, river discharge, drainage area, stream ordering, link magnitude

1. 序 論

近年, 流域全域で調和のとれた水資源管理と健全な河川環境の保全が求められている. これには, 水源から河口まで流域各部の水資源賦存量を把握し, それを農水・都市活動用水や河川の正常流量資源として適切に配分する必要がある. しかし, これに必要な河川流量は, 本川を中心にただか数点で観測されているにすぎない. したがって, 水収支や河川環境を流域全体で把握するためには, 観測されていない流域各部の河川流量を水系ネットワーク上で推定した上で, それらの情報を水資源と河川環境の管理に供する新たな取り組みが必要である.

筆者らは, このような流域一貫の河川環境解析の鍵が流域地形特性にあると考えて研究を展開している^{1,2)}. 河川水温を水環境の指標とした研究¹⁾では, 河道位数に基づく流域地形則とマグニチュードを用いて水温予測のための地形則モデルを定式化した. 試験流域における観測水温との比較の結果, 上流森林域での水温推定方法に検討の余地が残るものの, 流域全域にわたる水温変化がマ

グニチュードにより記述できることを確認した. 土地利用や人口など河川環境に負荷を及ぼす人間活動を対象とした研究²⁾では, 流域地形則と人間活動分布との類似性を仮定して, 人口・土地利用の流域内分布を等比数列型の数学モデルで定式化した. 日本の109の一級水系を対象としてモデルを検証し, 人間活動と流域地形との間の明確な関連性を示すとともに, 解析結果をもとに109流域の社会環境状態を合理的に類型分類した.

流域地形の相似性を仮定した河道要素の位数化はHorton³⁾にはじまりStrahler⁴⁾によって洗練され, 流域地形則の妥当性が実証された. その後, 河道の合流をより適切に表現するためにShreve⁵⁾によりマグニチュードの位数化手法が提案された. 岩佐・小林^{6,7)}はマグニチュードによる地形則を統計理論より考察し, 位数とマグニチュードの関係を明らかにした. その後, Rodríguez-IturbeらはMandelbrotのフラクタル幾何⁸⁾を流域地形解析に導入した⁹⁾. 彼らはHortonの河道数則と河道長則をもとに水系ネットワークのフラクタル次元を議論し¹⁰⁾, 高安らの理論解析¹¹⁾を基礎にして流域における集水面積・流量・エネルギーのべき乗分布¹²⁾を実証的に示した.

本論文では、多くの流域に対して適合性が高いHortonの流域地形則にShreveのマグニチュードを導入して考察を加えることにより、流域面積とマグニチュード/河道リンク数との間に存在する普遍的なべき乗則を実証的に導出する。得られた結果から、マグニチュード/河道リンク数のフラクタル次元、分岐比・河道長比・流域面積比などHorton比の間の関係を議論する。そして、レジム則をもとにしてマグニチュードと河川流量の間の関係を定式化し、河川流量の代替指標としてのマグニチュードの有用性を議論する。

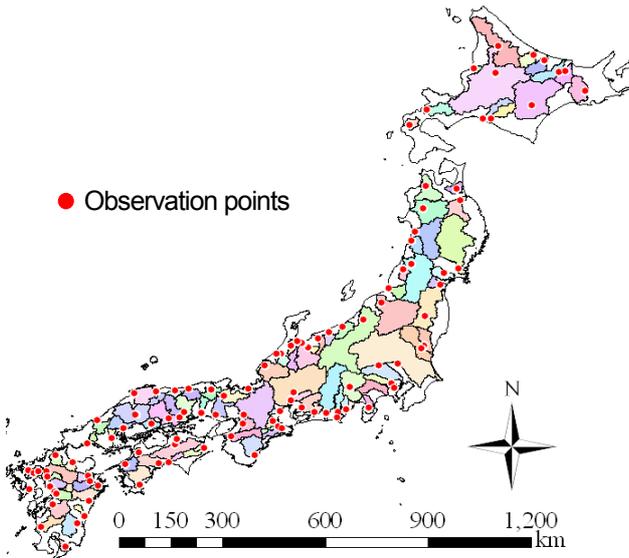


図-1 対象流域と流量観測地点

2. 対象流域と解析データ

対象流域は図-1に示す日本の一級水系109流域である。流域面積は最大が利根川の16,840km²、最小が本明川の87km²、本川流路延長は最大が信濃川の367km、最小が本明川の21kmである。全体的に見て西日本の流域は東日本の流域に比べて流域面積が小さく、流路延長の短い流域が多い。地形解析にはArcGISを用いた。流域地形に関しては、国土地理情報の50mメッシュ標高値(Digital Elevation Model: DEM)をもとに、流域界や河川網、位数、マグニチュード等の地形特性値を算出した。GIS解析の際の一次流域の最小値は約1km²に設定した。流量に関しては、(社)日本河川協会の雨量・流量年表データベースにおける日平均流量を用いた。図-1に解析対象とした各流域の観測地点を示す。年平均、豊水・平水・低水・渇水流量などの流況値は、平成6年から15年の10年平均値を用いた。欠測がある地点については、平成5年以前の値で補って10年平均値を算出した。なお、相模川は流量データ不足のため流量解析では対象外とした。

解析対象のデータとしてはその他に、河道位数則における分岐比 R_B 、河道長比 R_L 、流域面積比 R_A 、河道勾配比 R_S などのHorton比がある。

Strahlerの位数化システムに基づくHortonの河道位数則は次式で定義される。

$$N_u = R_B^{k-u}, \quad R_B = N_{u-1} / N_u \quad (\text{河道数則}) \quad (1a,b)$$

$$\bar{L}_u = \bar{L}_1 R_L^{u-1}, \quad R_L = \bar{L}_u / \bar{L}_{u-1} \quad (\text{河道長則}) \quad (2a,b)$$

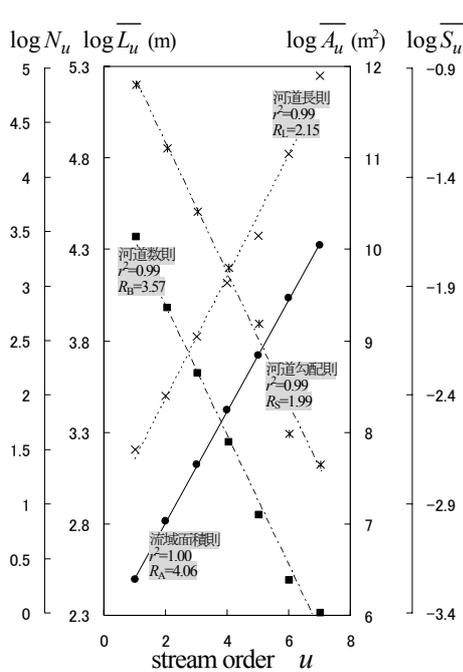


図-2 河道位数則(信濃川流域)

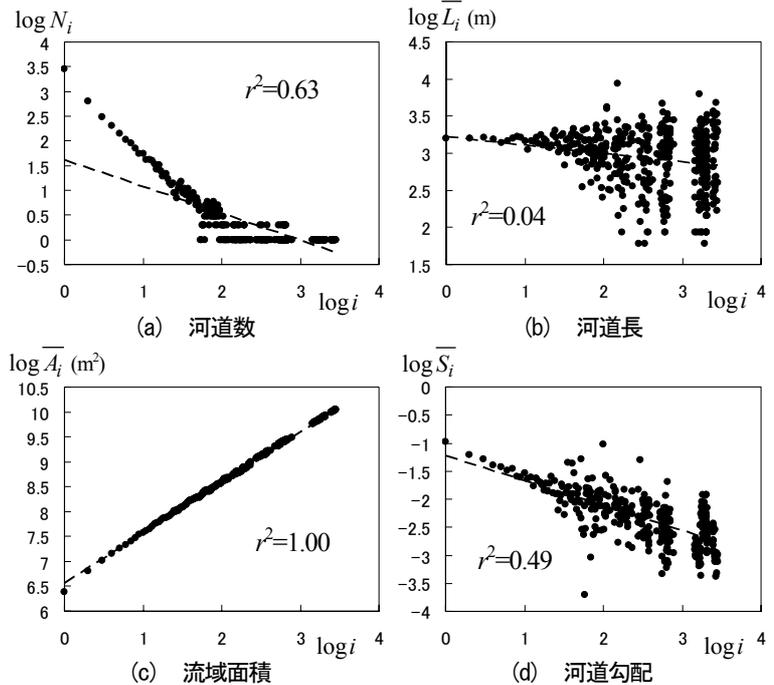


図-3 河道数・河道長・流域面積・河道勾配とマグニチュードの関係(信濃川流域)

$$\overline{A}_u = \overline{A}_1 R_A^{u-1}, \quad R_A = \overline{A}_u / \overline{A}_{u-1} \quad (\text{流域面積則}) \quad (3a,b)$$

$$\overline{S}_u = \overline{S}_1 R_S^{1-u}, \quad R_S = \overline{S}_{u-1} / \overline{S}_u \quad (\text{河道勾配則}) \quad (4a,b)$$

ここに、 $N_u, \overline{L}_u, \overline{S}_u, \overline{A}_u$: それぞれ k 次流域内部における u 次河道の数, 平均河道長, 平均河道勾配, u 次流域の平均流域面積である. 前報²⁾において, これら位数則が一級109水系で非常に高い適合性を示すことを再確認した. 図-2に信濃川流域での河道位数則(Horton解析)を示す. 本論文では, 次章で示す解析モデルに基づいて, Horton比の間の関係やフラクタル次元との関連性を議論する.

図-3に信濃川流域における河道数・河道長・流域面積・河道勾配とShreveのマグニチュード i との関係を示す. マグニチュードは流域各部において, その地点の上流にある一次流域の総数を表す⁹⁾. 図-3より, 流域面積とマグニチュードの間に非常に高い相関があり, 一方で, 河道数・河道長・河道勾配に関しては値のばらつきが大きいことがわかる. 流域面積とマグニチュードの間の高い相関性は109流域すべてにおいて認められ, 流域面積がマグニチュードでスケールされることが確認される. これより, 本論文では流域面積に焦点をあて, マグニチュードを用いた流域面積則の普遍性やマグニチュードと流量との関係を詳細に議論する.

3. マグニチュードを用いた流域面積・流量の解析モデル

図-3で示されたマグニチュード i と対応する流域面積 \overline{A}_i の関係より, 各流域において以下のべき乗則が経験的に成り立つ.

$$\overline{A}_i = \overline{A}_1 \cdot i^\lambda \quad (5)$$

ここに, \overline{A}_1 はマグニチュード $i = 1$ における平均流域面積であり, 位数 $u = 1$ における平均流域面積と同一である. λ は流域ごとにデータより決定されるべき指数である.

一方, 位数 u における平均マグニチュード \overline{i}_u と位数 u の間には分岐比 R_B を介して次の関係が成り立つ⁶⁾.

$$\overline{i}_u = R_B^{u-1} \quad (6)$$

式(6)と式(3a)より位数 u を消去すると, 平均流域面積 \overline{A}_u と平均マグニチュード \overline{i}_u との間に次式が成り立つ.

$$\overline{A}_u = \overline{A}_1 \cdot \overline{i}_u^{\log R_A / \log R_B} \quad (7)$$

式(5)と(7)を比較すると, 最大マグニチュード i_{\max} の k 次流域において流域面積; $\overline{A}_{i_{\max}} = \overline{A}_k$, マグニチュー

ド; $i_{\max} = \overline{i}_k$ となるため, 両式の指数部は等しくなる.

$$\lambda = \frac{\log R_A}{\log R_B} \quad (8)$$

式(5)において面積がマグニチュード i でスケールされている. これより, i のフラクタル次元 D_i は, 面積が既知の2次元測度をもつことを利用して未知の次元測度を求める「測度の関係を用いる方法」¹³⁾により, 以下のように求められる.

$$D_i = \frac{2}{\lambda} = \frac{2 \log R_B}{\log R_A} \quad (9)$$

次に, マグニチュード i の流域がもつ河道リンク(合流点間の河道部分)の数 N_{link} を考える. 水系全体で三川以上の同時合流がなく二川合流のみを考える. このとき, N_{link} は水系の外部リンクである水源数 i と, 2次河道から河口までの内部リンク数 $i-1$ の和となる.

$$N_{link} = 2i - 1 \quad (10)$$

したがって流域面積に関する式(5)を考える場合, マグニチュード i と河道リンク数 N_{link} は地形学的には同義となり, 互換性が保証される. 本論文において以下に展開される議論は, 主にマグニチュード i を用いて進めるが, ほとんどの場合, 河道リンク数 N_{link} で代替可能である. 式(5), (10)より, 流域面積 \overline{A}_i に含まれる平均的な河道リンク数 \overline{N}_{link}^i は以下の式で与えられる.

$$\overline{N}_{link}^i = 2 \left(\frac{\overline{A}_i}{\overline{A}_1} \right)^{1/\lambda} - 1 \quad (11)$$

最後に, 流量と流域面積に関するべき乗則(レジム則)^{4,14)}をもとにして流量とマグニチュードの関係を定式化する. マグニチュード i , 集水域面積 \overline{A}_i の流域において, ある生起確率に対応する流量 \overline{Q}_i は次式で表される.

$$\overline{Q}_i = a \cdot \overline{A}_i^b \quad (12)$$

ここに, a, b : 各流域・生起確率ごとに決定される係数, 指数である. 式(12)に式(5)を代入すると次式が得られる.

$$\overline{Q}_i = \overline{Q}_1 \cdot i^{b \cdot \lambda} \quad (13)$$

ここで, \overline{Q}_1 : 各流域での一次流域の平均流量である.

本論文では, 日本の109の一級水系を対象にして, マグニチュードによる流域面積則(式(5)), Horton比の間の関係(式(8)), マグニチュードもしくは河道リンクのフラクタル次元(式(9)), 流量とマグニチュードの関係(式(13))

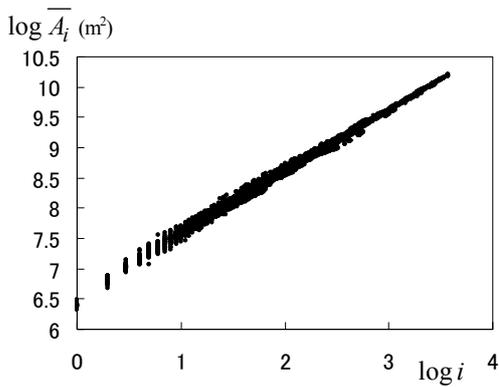


図-4 流域面積とマグニチュードの関係

を議論する。

4. 結果と考察

(1) マグニチュードを用いた流域面積則の普遍性

図-4に、109流域すべてについて、流域面積 $\overline{A_i}$ と対応するマグニチュード i の関係をプロットする。これより、流域のサイズや形状、気象・水文・地質・土地利用などの地域性に拘わらず、 $\overline{A_i}$ と i は式(5)を介して非常に普遍的な一つのべき乗関係にまとめられることが確認される。これより、マグニチュードもしくは河道リンク数は流域面積を代替する地形量として取り扱い可能である。式(5)における指数 λ の値は、最小自乗法により以下のようなになる。

$$\lambda = 1.11 \pm 0.03 \quad (14)$$

(2) フラクタル次元とHorton比

式(8)の右辺は、109流域のHorton比のデータより以下のように推定される。

$$\frac{\log R_A}{\log R_B} = 1.12 \pm 0.06 \quad (15)$$

式(14)、(15)より、GIS解析のデータからも式(8)が成立することが実証される。 λ の値は、式(15)の分散がやや大きいことから有効数字を2桁でとり、本論文では $\lambda = 1.1$ を最確値として採用することにする。

マグニチュードもしくは河道リンク数のもつフラクタル次元は、式(9)より以下のように推定される。

$$D_i = \frac{2}{1.1} = 1.8 \quad (16)$$

フラクタル次元は非整数値をとる次元として定義され、その非整数値がフラクタル図形の複雑さを定量化する。式(16)より河道リンク数の次元は1.8となり、面積の次元2より若干小さい値をとる。そのため、流域面積が大き

くなるに伴って下流域における河道リンク密度は徐々に小さくなることになる。1.8という次元は、実際の流域において水源から河口部に向けて展開される水系ネットワークの幾何構造をよく反映している値と考えられる。

次に、Horton比の間の関係を検討する。109流域のHorton解析のデータより、分岐比 R_B と河道長比 R_L の間には以下の関係がある。

$$\frac{\log R_B}{\log R_L} = 1.80 \pm 0.39 \quad (17)$$

式(15)に比べて式(17)の値のばらつきが一桁大きいのは、Hortonの河道位数則において、河道長則の適合度(決定係数 r^2 の109流域平均値: 0.88)が流域面積則の適合度(同: 0.99)に比べて劣るためと考えられる。平均値1.8に関して、Tarbotonら^{9,10)}は米国の7つの流域を対象に同一の値を報告し、La BarberaとRoth¹⁵⁾は一般的に2を下回る値となることを報告している。したがって本論文では、データの分散は少し大きい式(17)の値は平均として1.8をとると判断する。

以上より、分岐比 R_B 、河道長比 R_L 、流域面積比 R_A の間には、以下の関係が成立することが実証的に導かれる。

$$R_A = R_B^{1.1}, \quad R_B = R_L^{1.8} \quad (18a, b)$$

さらに、上式より R_B を消去すると、 R_L と R_A との間に以下の関係が導かれる。

$$R_A = R_L^{2.0} \quad (19)$$

(3) 流量とマグニチュードの関係

図-1に示す各流量観測点における10年平均値をもとに、式(13)で与えられる流量とマグニチュードの関係を議論する。本論文では、流域面積とマグニチュードの間に式(5)で示される普遍的なべき乗関係が得られたことから、流量に関しても普遍則が成立する可能性を考え、一次流域の平均流量 $\overline{Q_1}$ が一級水系すべてで一定値をとると仮定した。

図-5は、縦軸に各流域観測点における年平均流量 $\overline{Q_i^m}$ (m^3/s)を、横軸に対応するマグニチュード i をとったものである。プロットの総数は相模川を除く108水系のものである。図-5より、 $\overline{Q_i^m}$ と i の間に明確なべき乗関係が存在することが確認される。決定係数 r^2 は0.87となっており高い適合性が示されており、式(13)が年平均流量に対して適用可能であることが確認される。一次流域の平均流量 $\overline{Q_1}$ が一定であるという仮定も、データへの式(13)の適合性から妥当と判断される。以上より、日本の一級水系において、ある地点の年平均流量もしくは年間

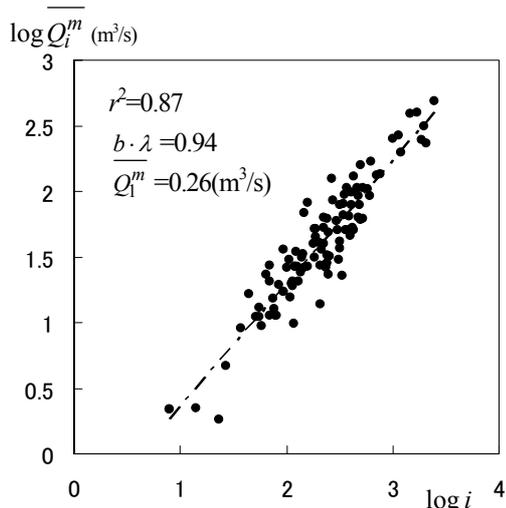
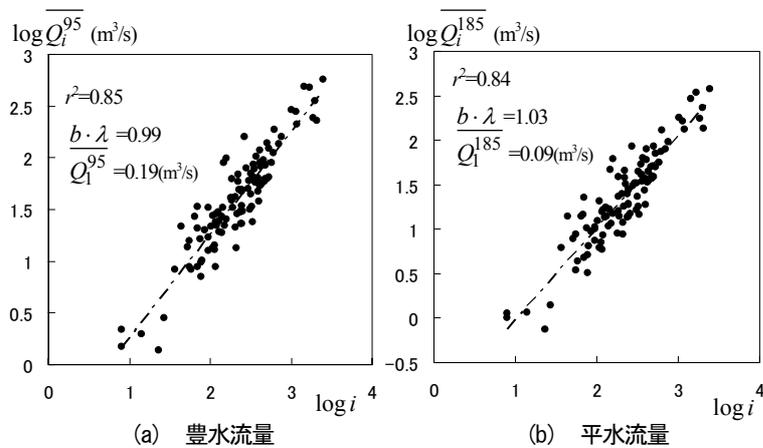
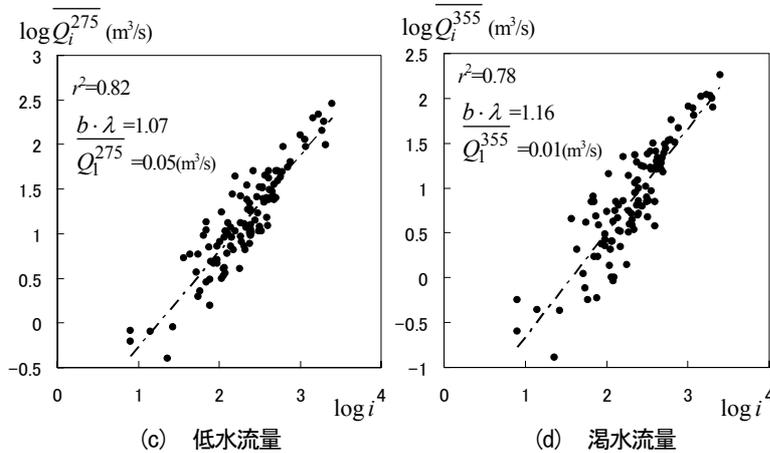


図-5 年平均流量とマグニチュードの関係



(a) 豊水流量

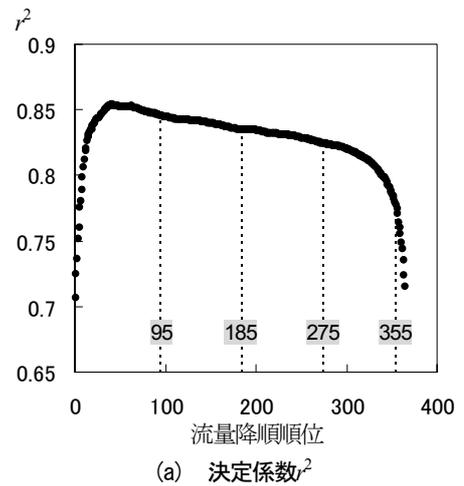
(b) 平水流量



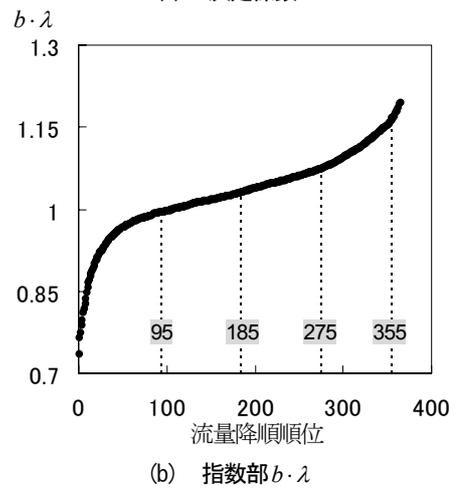
(c) 低水流量

(d) 渴水流量

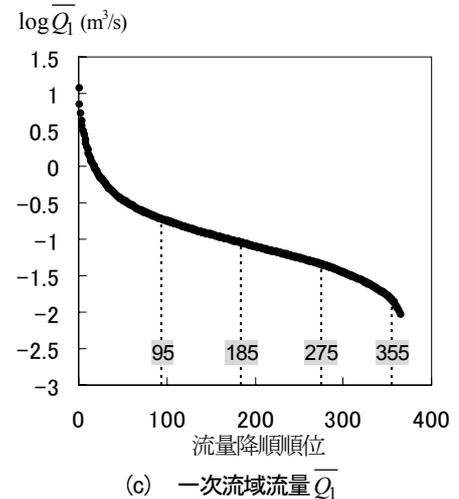
図-6 豊水・平水・低水・渴水流量とマグニチュードの関係



(a) 決定係数²



(b) 指数部 $b \cdot \lambda$



(c) 一次流域流量 $\overline{Q_1}$

図-7 流量モデルの適用性

総流量は、その地点より上流にある一次流域の総数に非常に強く依存して決まるということが実証的に導かれた。換言すれば、地形解析によりある流域のある地点におけるマグニチュードが算定されれば、式(13)を介して年平均流量の概算値が得られることになる。

流況を代表する豊水、平水、低水、渴水流量への式(13)の適合性を検討する。図-6に、各観測地点における10年平均の豊水・平水・低水・渴水流量と対応するマグニチュード i の関係を示す。全体的に見て各流量とも高

い決定係数 r^2 が得られており、式(13)の適合性は高いといえる。図-6(a)に示す豊水流量 $\overline{Q_i^{95}}$ の決定係数 r^2 が0.85と一番高く、平水 $\overline{Q_i^{185}}$ → 低水 $\overline{Q_i^{275}}$ → 渴水流量 $\overline{Q_i^{355}}$ と年間の流量降順順位が下がるほど適合性が低くなる。式(13)の指数部 $b \cdot \lambda$ は、年間の流量降順順位が下がるほど大きくなる。前節で示したように λ は一定値となるため、実際には式(12)に示すレジム則の指数部 b によって流量データと式(13)が合致するように調整される。一方、一次流域の平均流量 $\overline{Q_1}$ は、年間の流量降順順位

が下がるほど小さくなる。

流況曲線におけるすべての順位(1~365位)の10年平均流量に関して図-6と同じ解析を行い、決定係数 r^2 、近似直線の傾き $b \cdot \lambda$ 、一次流域の平均流量 $\overline{Q_1}$ を算出した。

図-7は、降順順位を横軸にとってそれぞれの結果を示したものである。

図-7(a)に示す決定係数 r^2 の分布では、両端の極値付近を除き、流量が大きいほど決定係数 r^2 が高くなることわかる。一方、洪水や渇水など極値を含む最大/最小流量に近い順位では決定係数 r^2 が急激に小さくなり、式(13)の適合性が低くなることわかる。さらに、本論文で解析した10年平均流量では、41位の流量で決定係数 r^2 が最大の0.85となる。図-5に示した年平均流量では決定係数 r^2 は0.87となっており、僅かではあるが年平均流量 $\overline{Q_1^m}$ が式(13)と一番高い適合性を示すことわかる。このことは、GISなどの地形解析から得られるマグニチュードが、流量の中でも年平均流量が一番よく対応することを示している。高安ら¹¹⁾は、水系ネットワークでの流量のように、質量が集積していくシステムの統計特性を数値計算と理論解析により議論した。その際、解析の前提となる質量(水系システムの場合は流量)は、パルスののではなく連続的にシステム全体に入力されている。このことは、洪水や渇水などの極値ではなく、年平均流量がマグニチュードによく対応することの理論的裏付けを与えると考えられる。

図-7(b), (c)に示す近似直線の傾き $b \cdot \lambda$ 、一次流域流量 $\overline{Q_1}$ については、年間の降順順位が下がるほど $b \cdot \lambda$ は大きく、 $\log \overline{Q_1}$ は小さくなることわかる。また、洪水・渇水を含む極値付近において、それらの値の変化は大きくなる。

なお、河川で観測される流量には、農・工業用水や都市用水など利水の影響が反映されている。筆者らは、各流域での年平均流量の実測値と式(13)で与えられる推定値との偏差が、各流域で展開される人間活動の分布形態に関連すると考え、前報²⁾で得られた土地利用・人口の流域分布に関する知見をもとに今後その影響を検討する予定である。

5. 結 論

本論文では、日本の一級水系109流域を対象として、マグニチュード/河道リンク数と流域面積・河川流量の関係を議論した。また、マグニチュードのフラクタル次元、Horton比の間の関係を検討した。その結果、流域の規模や形状、気象・水文・地質・土地利用などの地域特性に拘わらず、以下の普遍的な結果が得られた。

① 流域面積はマグニチュードのべき乗関数として非常

によく表現できる。

- ② ①で得られたべき乗則の指数より、マグニチュード/河道リンク数のフラクタル次元は1.8となる。
- ③ Hortonの河道位数における分岐比・河道長比・流域面積比の間には明確な相互関係が存在する。
- ④ 年平均流量はマグニチュードのべき乗関数で表現できる。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、費用の一部を平成21年度科学研究費補助金(萌芽研究, No.20651010)から補助して頂きました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 宮本仁志, 道奥康治: 流域地形則を用いた河川水温分布モデル, 水工学論文集, 第52巻, pp.1069-1074, 2008.
- 2) 宮本仁志, 橋本 翼, 道奥康治: 河道位数を用いた土地利用と人口の流域分布モデルと流域間比較, 水工学論文集, 第53巻, pp.1105-1110, 2009.
- 3) Horton, R.E.: Erosional development of stream and their drainage basins: Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Geol.Soc.Am.Bull.*, Vol.56, pp.275-370, 1945.
- 4) Strahler, A.N.: Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks, in *Handbook of Applied Hydrology*, Chow, V.T. ed., Section 4-II, Geology, pp.4-39-4-76, McGraw Hill, 1964.
- 5) Shreve, R.L.: Infinite topologically random channel network, *Journal of Geology*, Vol.74, 1967.
- 6) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュード理論による河道網の連結構造に関する統計則と指標, 土木学会論文報告集, 第273号, pp.35-46, 1978.
- 7) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュードに基づく流域地形統計則およびその位数理論との関連性, 土木学会論文報告集, 第273号, pp.47-58, 1978.
- 8) Mandelbrot, B.B.: *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983.
- 9) Rodríguez-Iturbe, I. and Rinaldo, A: *Fractal river basins, chance and self-organization*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 547p., 1997.
- 10) Tarboton, D.G., Bras, R.L. and Rodríguez-Iturbe, I.: The fractal nature of river networks, *Water Resour. Res.*, 24(8), pp.1317-1322, 1988.
- 11) Takayasu, H., Nishikawa, I., and Tasaki, H.: Power-law mass distribution of aggregation system with injection, *Phys. Rev. A*, 37, pp.3110-3117, 1988.
- 12) Rodríguez-Iturbe, I., Ijjasz-Vasquez, E., Bras, R.L. and Tarboton, D.G.: Power-law distributions of mass and energy in river basins, *Water Resour. Res.*, 28(4), pp.1089-1093, 1992.
- 13) 高安秀樹: フラクタル, 朝倉出版, pp.18-20, 1986.
- 14) Leopold, L.B.: *A view of the river*, Harvard University Press, 294p., 1994.
- 15) La Barbera, P. and Roth, G.: On fractal dimension of stream networks, Reply to Tarboton et al., *Water Resour. Res.*, 26(9), pp.2245-2248, 1990.

(2009. 9. 30受付)