

一般座標系を用いた自由液面を有する ビンガム塑性流体の数値解析手法

COMPUTATIONAL METHOD WITH CURVILINEAR COORDINATES
FOR BINGHAM PLASTIC FLUIDS WITH FREE SURFACES

永井 克明¹・牛島 省²

Katsuaki NAGAI and Satoru USHIJIMA

¹ 学生員 京都大学工学部地球工学科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 正会員 工博 京都大学教授 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper deals with the computational method to predict incompressible Bingham plastic fluids with free surface boundaries. The Bingham fluids are treated with the expression proposed by Papanastasiou. The free surface profiles are represented by general curvilinear coordinates generated at every computational time step with an ALE method. To confirm the validity of this method, it is applied to the basic problems such as the cavity flow and the flow between two parallel plates in Bingham fluids. It has been shown that the predicted results are in good agreement with the previous calculations. In addition, it is also applied to the fluids with free surface represented by the boundary-fitted coordinates. As a result, this computational method allows us to predict the free surface Bingham plastic flows.

Keywords : Bingham plastic fluid, boundary-fitted coordinates, free-surface, ALE method

1. はじめに

水工学分野の流体計算では、ニュートン流体を用いることが一般的である。しかし、土石流や泥流、溶岩流は清水流とは異なる性質をもち、非ニュートン流体として扱われる^{1) 2)}。また、液状化した土は極めて高い粘度を有するビンガム流体のようにふるまうという報告がある。このように、水工学に関係する種々の流動現象をニュートン流体として記述することは難しい。さらに、自然界における流動現象は自由液面を有する場合が多いことから、自由液面を有する非ニュートン流体の流動特性を解明することは重要であると考えられる。

非ニュートン流体の代表的な例として、ビンガム流体がしばしば取り上げられている。Kokado ら³⁾は、Marker and Cell 法を用いてビンガム流体を含む気液混相場の計算を行っており、Naili ら⁴⁾は、SPH (Smoothed particle hydrodynamics) 法を用いて液状化による側方流動の解析を行っている。また、藤田ら⁵⁾は、3D MICS (Multiphase Incompressible flow solver with Collocated grid System) を用いて固体を含むビンガム流体の解析を行っている。

一方、ビンガム流体を対象とした自由液面を有する流れを境界適合座標系を用いて計算した例は少ない。そこで、本研究では境界適合座標を用いてビンガム塑

性流体を扱える計算手法を提案する。はじめに、キャビティ流れや平行平板間流れなどの基本的な問題に適用して、計算手法の検証を行う。次に、自由液面を有する問題に適用し、本計算手法の有用性を確認する。

2. 数値解析手法

(1) 一般座標系における基礎方程式

非ニュートン流体では、応力テンソルと変形速度テンソルの線形関係を仮定しないため、基礎式としてコーシーの運動方程式を用いる。基本変数を直交座標系 x_i の流速成分とする場合、非圧縮流れに対する連続式とコーシーの運動方程式は、一般座標系を用いてそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial(JU_m)}{\partial\xi_m} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial(JU_m u_i)}{\partial\xi_m} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\xi_m} \left(-\frac{\partial\xi_m}{\partial x_i} p + \frac{\partial\xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) = 0 \quad (2)$$

式 (1) と式 (2) の左辺第 2 項には強保存型⁶⁾を用いる。 t は時間、 u_i は直交座標系における x_i 方向の流速成分、 ρ は流体の密度、 p は圧力である。本報では、 ρ は定数とする。 U_m は流速の反変成分、 J は変換のヤコビ

アンであり、次式で与えられる．

$$U_m = u_i \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad (4)$$

τ_{ij} は応力テンソルの i, j 成分であり、非ニュートン流体では次のように表すことができる．

$$\tau_{ij} = \eta(|\dot{\gamma}|) \dot{\gamma}_{ij} \quad (5)$$

ここで、 $\eta(|\dot{\gamma}|)$ は見かけの粘度、またはせん断依存粘度と呼ばれるものであり、せん断速度の大きさ $|\dot{\gamma}|$ の関数である． $\dot{\gamma}_{ij}$ と D_{ij} はせん断速度 $\dot{\gamma}$ および変形速度テンソル D の i, j 成分であり、一般座標系では次のように表される．

$$\dot{\gamma}_{ij} = 2D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (6)$$

また、テンソル $\dot{\gamma}$ の大きさ $|\dot{\gamma}|$ は次式で定義される．

$$|\dot{\gamma}| = \left[\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq dim} \dot{\gamma}_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ここで、 dim は次元数を表し、2次元では $dim = 2$ である． $\eta(|\dot{\gamma}_{ij}|)$ はニュートン流体における粘性係数に相当し、ニュートン流体では温度が一定であれば定数である．

自由液面の変動が生ずる場合、ALE法⁷⁾により境界適合座標系を生成して液面形状を表現する方法が提案されている^{8),9)}．この手法に基づき、以下のような楕円型の偏微分方程式を与えられた境界条件のもとに反復計算を行うことで、計算領域内部の格子点を再配置する．

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} = 0 \quad (8)$$

ここで、 P_m は、直交座標系により表される物理空間中において、格子点間隔を制御するために用いられる関数である．本報で扱う自由液面のように、境界形状が時間とともに変形する場合には、各時間ステップごとに式(8)を解いて格子生成を行う．

(2) ビンガムモデル

ビンガムモデルでは、 τ_{ij} と $\dot{\gamma}_{ij}$ は以下の関係で表される．

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma}_{ij} & |\tau| \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0 & |\tau| < \tau_0 \end{cases} \quad (9)$$

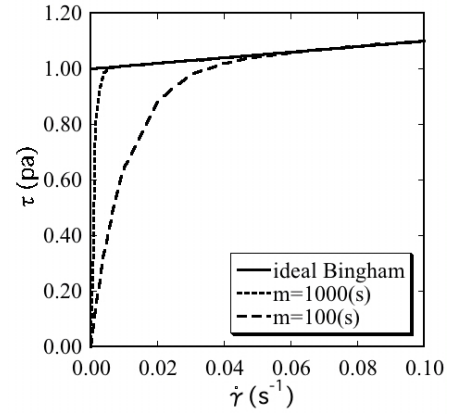


図-1 ビンガムモデル

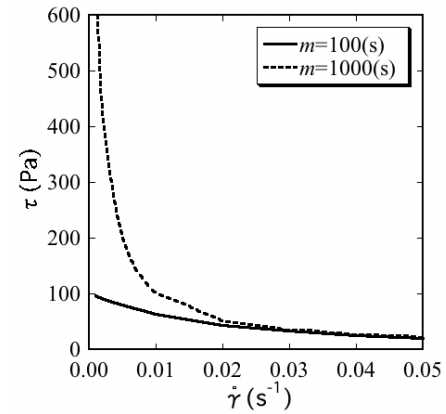


図-2 η と $\dot{\gamma}$ の関係

ここで、 τ_0 はビンガム降伏値、 η_p は塑性粘度、 $|\tau|$ は応力テンソルの大きさであり、式(7)と同様に定義される．式(9)は、応力が τ_0 以下では流動に抵抗する構造ができ、 τ_0 を超えるとその構造が壊れてニュートン流体のように流れることを意味する．

式(9)では、関数が $|\tau| = \tau_0$ で不連続であり、数値解析においてセル毎の $\eta(|\dot{\gamma}|)$ を求めるのが難しい．そのため、本報では Papanastasiou¹⁰⁾ が提案した次式を用いることにした．

$$\tau_{ij} = \left[\eta_p + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}) \right] \dot{\gamma}_{ij} \quad (10)$$

m は応力成長指数 (stress growth exponent) と呼ばれ、時間の次元をもつ．1次元の場合の式(9)と式(10)の関係を図-1に示す．ここで、 $\eta_p = 1.0(\text{Pa}\cdot\text{s})$ 、 $\tau_0 = 1.0(\text{Pa})$ としている．図-1に示すように、 m を大きくすれば、式(10)の近似精度は高くなり、式(9)の关系到近づくと¹⁰⁾．式(5)と式(10)を比較すると、次式を導くことができる．

$$\eta(|\dot{\gamma}|) = \eta_p + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}) \quad (11)$$

本報では、式(11)より数値解析で用いられるセル毎の η を求める．

図-2 は、1次元場における式(11)の η と $\dot{\gamma}$ の関係を、異なる m に対して表したものである。ここで、 $\eta_p=1.0(\text{Pa}\cdot\text{s})$ 、 $\tau_0=1.0(\text{Pa})$ としている。図-2より、 $\dot{\gamma}$ が0に近づくにつれて η が大きくなることがわかる。また、 m を増加させた場合にも η は大きくなる。このとき、陽的な解法では、計算を安定に進めるために拡散数に関する制約が生じ、通常時間刻み Δt を小さくとした長時間の計算が必要となる。これらを考慮して、本報では $m=1000(\text{s})$ を用いる。

本報では、次の2つの無次元量を用いる。ピンガム数は次式で定義される。

$$B_n = \frac{\tau_0 l}{\eta_p U} \quad (12)$$

ここで、 U は代表速度、 l は代表長さである。また、ピンガム流体の場合、レイノルズ数 Re_{BI} は次式で定義される。

$$Re_{BI} = \frac{\rho U l}{\eta_p} \quad (13)$$

(3) 離散化手法

式(2)を有限体積法(FVM)によりコロケート格子上で離散化し、MAC系解法に基づく予測段階、圧力計算段階、修正段階の演算を順に適用する¹¹⁾。本解法では、図-3に示すように、1つの流体セルは4つの面からなっており、各面を中心の点Pからの方向を示す文字e, w, n, sと表し、隣接する流体セルの中心点をE, W, N, Sなどと表す。

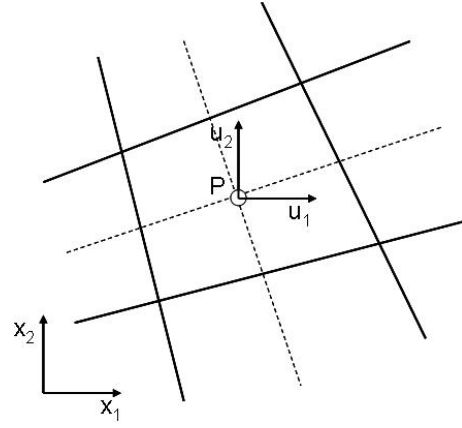
まず、式(2)にガウスの定理を用いて次のように近似表現する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_i d\Omega + \frac{1}{J_c} \oint_{\partial\Omega} J U_m u_i n_m dl \\ & - \frac{1}{\rho} \oint_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) n_m dl \\ & - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

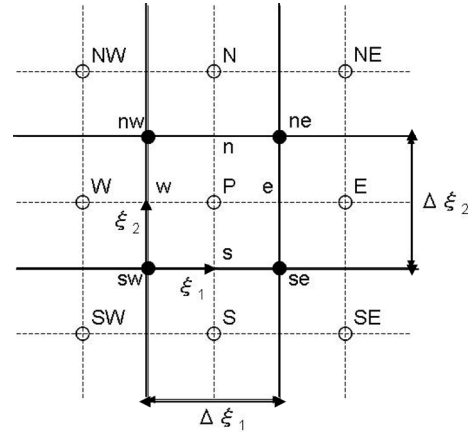
ここで、 Ω は図-3(b)の流体セルを表し、 $\partial\Omega$ は領域 Ω の境界を表す。また、 n_k は $\partial\Omega$ 上の外向きの単位法線ベクトルの x_k 成分である。 J_c は流体セルの中心点におけるヤコビアンであり、流体セルの面積に等しい。

式(14)の左辺第4項の被積分関数を式(5)、(6)を用いて以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\eta \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\eta \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (15)$$



(a) 物理空間中の格子配置



(b) 写像空間中の格子配置

図-3 各空間中の格子配置

式(15)の第2項に積の微分公式を用いれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\eta \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \\ &+ \eta \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (16)$$

また、式(16)の右辺第2項は次式のようにかける。

$$\begin{aligned} & \eta \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \eta \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial (J U_k)}{\partial \xi_k} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、式(3)と次式¹²⁾を用いた。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(J \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (18)$$

式(1)より、式(17)の右辺は0となる。したがって、式(16)は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\eta \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (19)$$

以上より、式 (14) は次式のように近似表現される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_i d\Omega + \frac{1}{J_c} \oint_{\partial\Omega} J U_m u_i n_m dl \\ & - \frac{1}{\rho} \oint_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) n_m dl - \frac{1}{\rho} \oint_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} n_m dl \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \oint_{\partial\Omega} u_j n_k dl = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

非ニュートン流体の場合、前節 (1) で述べたように $\eta(|\dot{\gamma}|)$ はせん断速度の関数であり、セル毎に異なる。 η はセル中心で定義され、 n ステップにおける流速成分 u_i^n を用いて式 (11) より求める。また、式 (20) 中に含まれるセル境界上の η は、空間内挿により求める。

式 (20) の左辺第 4 項の被積分関数は、境界面上で離散化される。例えば、境界 e 上における $\partial u_i / \partial \xi_1$ や $\partial u_i / \partial \xi_2$ などは、それぞれ次のように離散化する。

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \approx \frac{u_i^E - u_i^P}{\Delta \xi_1} \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \approx \frac{u_i^{NE} - u_i^{SE}}{2\Delta \xi_2} \quad (22)$$

ここで、 $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2$ は図-3 に示すように、写像空間中の流体セルの長さを表す。また、 u_i^E, u_i^{NE} などは格子点 E, NE における流速を表す。境界 n, w, s 上の線積分も同様に離散化する。

なお、移流項の離散化には 5 次精度 FVM-QSI スキーム¹³⁾ を用いた。また、圧力計算段階では、非圧縮条件を精度良く満足させるため、C-HSMAC 法¹⁴⁾ により圧力計算を行った。

3. 計算手法の適用性

(1) 平行平板間流れ

上記の離散化手法の適用性を確認するため、平行平板間流れの計算を行い、理論解との比較を行う。計算領域と座標系を図-4 に示す。幅 $2H=0.2$ 、長さ $L=3.0$ の平行平板において、流入境界では一定の流速 $u_{in}=0.1$ 、 $v_{in}=0$ を与え、 $\partial p / \partial x=0$ とした。流出境界では速度勾配を 0 とし、 $p=0$ とした。また、計算領域の上壁と下壁にはノンスリップ条件を用いた。ビンガム塑性流体が平板間で定常流動するまで計算を行い、流下方向の流速分布を求めた。

この流れ場での理論解¹⁵⁾ は、次式のようになる。

$$0 \leq y \leq y_0 : u = \frac{1}{2\eta_p} \frac{dp}{dx} (H - y_0)^2 \quad (23)$$

$$y_0 \leq y \leq H :$$

$$u = \frac{1}{2\eta_p} \frac{dp}{dx} \{ H^2 - y^2 - 2y_0(H - y) \} \quad (24)$$

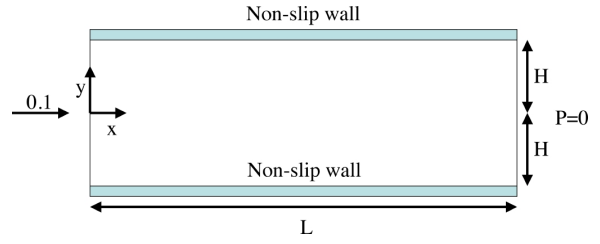


図-4 平行平板間流れの計算領域

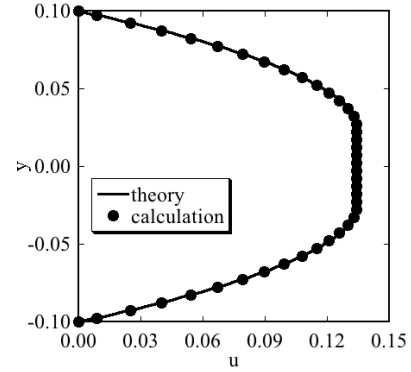


図-5 流下方向の速度分布の比較

ここで、 y_0 はせん断応力と降伏応力が釣り合う位置であり、以下の関係で表される。

$$\tau_0 = y_0 \frac{dp}{dx} \quad (25)$$

図-5 は、 $Bn=1.0$ とした場合の流下方向の速度分布を理論解と比較した結果を示すものである。計算結果が理論値と一致することから、拡散項が適切に評価されているといえる。

(2) 移動壁を有するキャピティ内の流れ

次に、移動壁を有するキャピティ内の流れの計算を行い、本計算手法の有効性を確認する。計算対象とする流れのビンガム数とレイノルズ数は式 (13) と式 (12) で与えられ、 $Bn=1.0$ 、 $Re_{BI}=100$ とする。計算セル数は 30×30 とし、境界適合座標を利用して壁面近傍で格子間隔が密になるように配置した。計算格子点の分布を座標系等と合わせて図-6 に示す。図-6 に示すように、キャピティの高さと幅は 1.0 の正方形で、上壁面が速度 1.0 で移動する。直交座標系の原点は左下隅にとり、 x, y 方向の流速成分をそれぞれ u, v とする。

水平方向流速 u と鉛直方向流速 v の分布をそれぞれ図-7 と図-8 に示す。図中には、Neofytou¹⁶⁾ による計算結果を合わせて示した。文献中¹⁶⁾ には応力成長指数 m の値が明示されておらず、 m の相違等により流速のピーク値に差が生じたと考えられる。適当な計算セル配置を行うことにより、Neofytou の結果とほぼ一致する数値解が得られることがわかる。

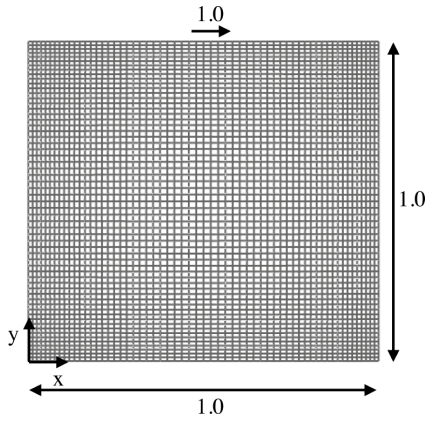


図-6 計算格子点の分布と座標系および計算条件

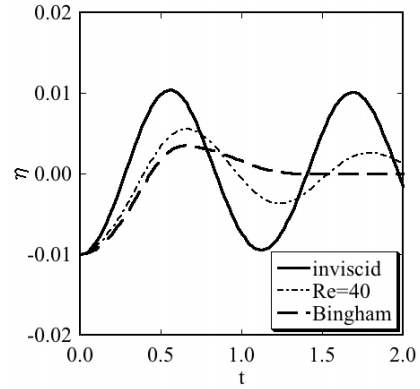


図-9 容器左端の液位 η の時系列

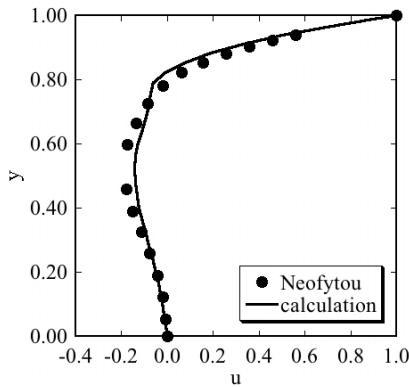


図-7 水平方向流速 u の分布

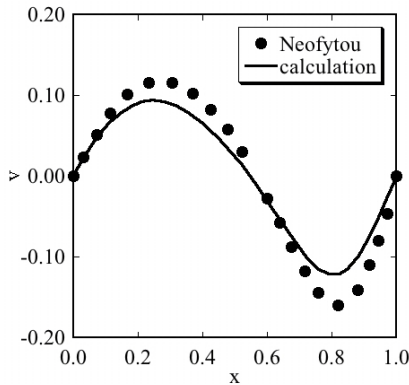


図-8 鉛直方向流速 v の分布

(3) 容器内の微小振幅波

本研究で提案する計算手法がビンガム流体の自由液面の変動を適切に表現できることを確認するため、矩形容器内に生ずる振幅が十分小さい静振波へ適用し、ニュートン流体の結果と比較する。計算領域は、幅 l を 1.0、静止状態の水深を 1.0 とする。容器両端に腹、中央に節を持つ静振波を考え、初期条件として次式の液面形を与える。

$$\eta = A \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (26)$$

ここで、 η は静止水面を基準とする水面高さであり、振幅は $A = 0.01$ とする。振幅は静止水深の $1/100$ であるので、微小振幅と見なせる静振波が発生すると考えられる。ここでは表面張力の影響はないとして、復元力が重力のみとなる静振波の計算を行った。

完全流体、ニュートン流体 ($Re=40$)、そしてビンガム流体 ($Re_{BI}=100$ かつ $Bn=1.0$) を用いた 3 条件の計算を行い、これらの結果を比較した。

図-9 に、端点 ($x = 0$) における η の時間的な変動を示す。完全流体では、既報¹⁷⁾と同様に、初期の水面形により生じた静振波が減衰せずに持続する結果が得られた。また、 $Re = 40$ のニュートン流体では、粘性により静振波が時間とともに減衰していく様子が再現されている。一方、ビンガム流体では静振波が周期的に減衰せず、有限の時間で消滅することが確認できる。これは粘性の異なる領域が容器内に分布しているためであると考えられる。このように、定性的ではあるがビンガム流体の性質が適切に表現されていると考えられる。

(4) 容器内の自由液面流れ

図-10 に示すような底面が移動壁となる容器内において、内部の流動とそれに伴う自由液面形状の計算¹⁸⁾を行う。両側面は流速が 0 である nonslip 壁とする。底面の移動速度は 1.0、容器幅と初期水深はともに 1.0 とし、ニュートン流体とビンガム流体の粘性は、移動速度と初期水深に基づくレイノルズ数が 100 となるように設定した。液面の変形が明瞭になるように、重力加速度は 0.5 とし、液面では表面張力の影響はないものとした。流体の計算セル数は 30×30 とし、初期の計算格子は等間隔になるように配置した。静止状態を初期値とし、 $t=10.0$ まで計算を行った。ニュートン流体および $Bn=0.1$ のビンガム流体を用いた 2 種類の計算を行い、結果を比較した。

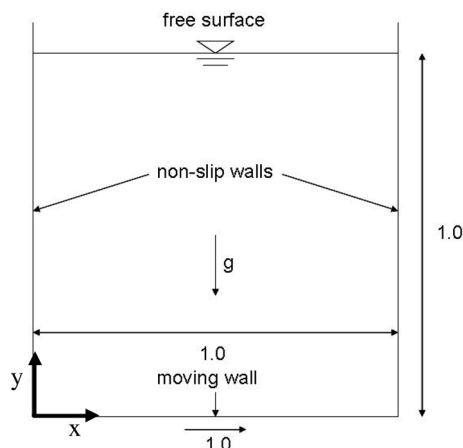


図-10 計算条件と座標系

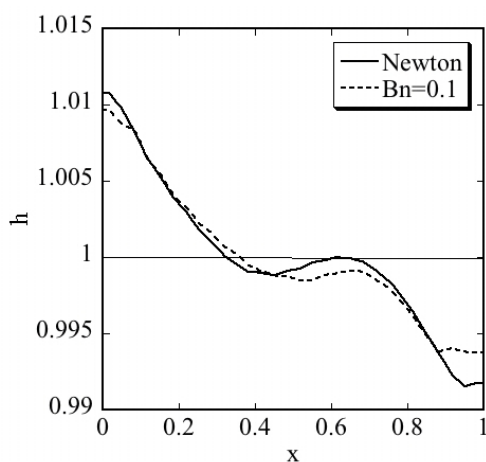


図-11 水深 h の分布 ($t=10.0$)

図-11 は、 $t=10.0$ における水深 h の x 方向の分布を比較したものである。 Bn の増加により水面形に変化が見られる。そのメカニズムについては詳細な検討が必要である。

4. おわりに

本研究では、一般座標系を利用する ALE 法により、自由液面を持つビンガム流体の数値解析手法を提案し、その基本的な適用性を検討した。キャピティ内の流れや自由液面を有するビンガム流れの計算を行った結果、ほぼ良好な結果が得られた。

今後の検討課題としては、ビンガムモデルにおいて、降伏していない領域を数値計算で適切に表現する手法を開発することが必要であると考えられる。

謝辞：本研究にあたり、京都大学社会基盤工学専攻の黒田望氏と中村元太氏には原稿作成についてご指導を得た。ここに感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) 中谷健, 由比政年, 石田啓. ビンガム流体モデルを用いた溶岩流の流動・体積過程の数値計算. 水工学論文集, Vol. 49, pp. 733-738, 2005.
- 2) 大本照憲, 崔志英. 非ニュートン流体特性に着目した砂堆河床上の高粘性流れについて. 応用力学論文集, Vol. 8, pp. 855-864, 2005.
- 3) Kokado, T., Hosoda, T., Miyagawa, T., and Fujii, M. Study on a method of obtaining yield values of fresh concrete from slump flow test. *Concrete Library of JSCE*, Vol. 32, pp. 29-42, 1998.
- 4) M. Naili, Matsushima, T., and Yamada, Y. A 2d smoothed particle hydrodynamics method for liquefaction induced. 応用力学論文集, Vol. 8, pp. 591-599, 2005.
- 5) 藤田学, 牛島省. ビンガム流体を含む非圧縮性多相場の数値解析法. 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 875-882, 2006.
- 6) C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 7) C. W. Hirt, A. A. Amsden, and J. L. Cook. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp. 227-253, 1974.
- 8) Takizawa, A., Koshizuka, S., and Kondo, S. Generalization of physical component boundary fitted coordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 1213-1237, 1992.
- 9) Ushijima, S. Three-dimensional arbitrary Lagrangian-Eulerian numerical prediction method for non-linear free surface oscillation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, pp. 605-623, 1998.
- 10) T.C. Papanastasiou and A.G. Boudouvis. Flows of viscoplastic materials: models and computations. *Computers & Structures*, Vol. 23, pp. 677-694, 1997.
- 11) 牛島省, 竹村雅樹, 禰津家久. コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 12) 梶島岳夫. 乱流の数値シミュレーション. 養賢堂, 1999.
- 13) 牛島省, 吉田圭介, 竹村雅樹, 禰津家久. フラックス制御を利用する移流方程式の 5 次精度保存形スキーム. 土木学会論文集, Vol. 747/II-65, pp. 85-94, 2003.
- 14) 牛島省, 奥山洋平. 非圧縮性流体計算における C-HSMAC 法と SOLA 法の収束特性. 土木学会論文集, No. 747/II-65, pp. 197-202, 2003.
- 15) 中村喜次郎. 非ニュートン流体力学. コロナ社, 1997.
- 16) P. Neofytou. A 3rd order upwind finite volume method for generalised newtonian fluid flows. *Advances in Engineering Software*, Vol. 36, pp. 664-680, 2005.
- 17) 牛島省, 禰津家久. 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法. 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
- 18) 牛島省, 禰津家久. 5 次精度 QSI スキームを用いた自由液面流れの数値解析法. 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 68, No. 669, pp. 1322-1328, 2002.

(2009.9.30 受付)