水工学論文集,第54巻,2010年2月

乱流変動を考慮した粒子法による 自由水面流の計算

ON CALCULATION OF FREE-SURFACE FLOWS WITH PARTICLE METHOD CONSIDERING TURBULENT FLUCTUATIONS

池永健太[1]・中山昭彦[2]
Kenta IKENAGA and Akihiko NAKAYAMA

[1] 学生員　神戸大学大学院　工学研究科(〒657-8501　神戸市灘区六甲台町 1-1)
[2] 正会員　PhD　神戸大学大学院教授　工学研究科(〒657-8501　神戸市灘区六甲台町 1-1)

Effects of turbulent fluctuations of small scales on the kernel interpolation used in smoothed particle methods for calculation of free-surface flows have been investigated. The fluctuations in the paths of fluid particles appear as extra effects in the dynamic equations of motion similar to the Reynolds stress or sub-grid scale stress that arises from averaging turbulent flows. This effect is in addition to the averaging of the smoothed particle hydrodynamics (SPH) modeled by XSPH method by Monaghan (1994). Test calculations are conducted of turbulent flow in collapsing water column. With the extra turbulence terms appropriately modeled, the calculation results are much closer to the observation than the original SPH, or XSPH modification or Moving Particle Semi-implicit (MPS) calculation results.

Key Words : *particle method, SPH, turbulent flow, dam break*

1. はじめに

流れの数値計算は，空間に固定された計算格子点での値を微分方程式の差分近似により解く手法が主流であるが，界面が大きく変動する自由水面流などの数値計算には，流速など流れの変数を流体粒子とともに移動する点で定義し，これらの値より空間微分項を内挿により求める，いわゆる粒子法（Smoothed Particle Hydrodynamics（SPH）[1)]や Moving Particle Semi-implicit (MPS) [2)]）が有用であることが示され応用も進んでいる [3)]．これらの方法を水工学の流れに適用するには乱流効果を反映する必要があるが，これまでの研究では乱れを考慮したものはほとんどない [3)]．粒子法を単に運動方程式など輸送方程式の離散化法としてとらえると，乱流項を含むレイノルズ平均運動方程式や空間フィルタ平均運動方程式に適用することにより乱流の計算ができると考えられる．実際 Colagrossi & Landrini[4)]，Violeau & Issa[5)]，後藤ら [6)]などにより通常のオイラー乱流統計量の輸送方程式に適用し，乱流計算が試みられている．しかし，粒子法の基本である内挿式は空間平均で，内挿距離より小さいスケールの変動のある流れ場に適用した場合，その名（Smoothed Particle Hydrodynamics）のとおり単なる微分量の離散近似ではなく，空間的に平滑化した量を表わす．したがって粒子間内挿により評価された力を受ける粒子は流体を空間平均したもの，というより加速度を空間平均したものを加速度とする仮想粒子である．従ってこの加速度を時間積分して得られる速度は実際の流体粒子の（単位質量あたりの）運動量を表すわけでも，移動速度を表すわけでもない．Holm[7)]はラグランジェおよびオイラー座標系での運動方程式を厳密に平均した式を導出し，ラグランジェ平均とオイラー平均の違いや，移動速度の平均と運動量の平均は異なることを指摘している．またラグランジェ平均には粒子の分散による効果があることを指摘している．Monaghan[8)]はこれに適合するような方法で試し計算を行なっているが，その詳細は十分検討されていない．

粒子法の最大の特徴は流体粒子に固定した運動方程式を解くことにより非線形移流項の離散化に伴う問題を避けられるところにあるが，上述のように乱流に適用した場合，変動する粒子に厳密に追随するラグランジェ記述は不可能で，粒子平均した軌道に沿う座標での運動方程式を扱うことになる．この場合粒子軌跡の変動から発生する空間平滑効果を避けることはできない．この粒子軌跡変動の影響は Monaghan[1)]が計算を安定させる目的で導入した項に関連している．しかし，分散効果やサブグリッド応力に相当する付加応力など乱流計算において発生する粒子軌跡変動の効果については十分研究されてい

ない[3].

本報では，SPH 粒子法を見直し，乱流予測，とくに Large-eddy Simulation (LES) に準じた大スケール運動のシミュレーションに適用するに必要な基礎式，およびそのモデリングを検討する．さらに自由水面流でも水面の大きく変動し水滴が飛散する流れのベンチマークケースである水柱崩壊過程の計算に適用し，既往の計算や実験結果と比較しその妥当性や効果を検証する．

2. 粒子間内挿

SPH 法あるいはそれの改良法では流れの変数 A の任意の点 $\boldsymbol{r}$ での値は，周辺の値を内挿することにより評価できるという仮定に基づいている．A の内挿値 A_I をカーネル積分で表すと

$$A_I(\boldsymbol{r}) = \iiint W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h)A(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{1}$$

である．ここで $W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}',h)$ は距離約 h のまわりから平均する内挿カーネル関数で，

$$\iiint w(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h)d\boldsymbol{r}' = 1\,,\quad \lim_{h\to 0} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',h) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{2}$$

の正規条件と内挿距離ゼロの極限の条件を満たす．この式を数値計算で評価するには流れ空間に固定された計算格子は必要でなく，任意の離散点で A が与えられていればよい．$A(\boldsymbol{r})$ が有限個の粒子で代表される離散点 $\boldsymbol{r}_b$ で与えられている場合，(1)式の離散近似 A_S は

$$A_S(\boldsymbol{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_b,h) \tag{3}$$

とA_bの重み付平均で表せる．ここでm_b, ρ_b, A_b,は点 $\boldsymbol{r}_b$ 近傍の流体を代表する粒子 b の質量, 密度および流れの変数で，Σは $\boldsymbol{r}$ の近傍粒子全ての合計，比m_b/ρ_bは粒子 b の代表する体積になる. これよりAの勾配ベクトルは

$$\nabla A_S(\boldsymbol{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_b,h) \tag{4}$$

と表せる．速度のようなベクトル関数の発散も同様に近似でき，運動方程式中の諸量も近傍の粒子の値から内挿できる．通常の粒子法ではこれら離散内挿近似を変数の近似値と見なし数値計算で解く．すなわち，運動している流体粒子 a の時間 t における位置 $\boldsymbol{r}_a(t)$ の流体にかかる（単位質量あたりの）力を内挿式で表し，粒子 a の加速度 $d\boldsymbol{v}_a/dt$ と等しいとすると

$$\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = \boldsymbol{g} + \left[-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}_a(t)} \tag{5}$$

が得られる. ここで$[\ \ ]_{x=\boldsymbol{r}a(t)}$は式(3),(4)などで表わされる粒子内挿近似，$\boldsymbol{g}$，$\nu$ は重力の加速度と動粘性係数，p，$\boldsymbol{v}$ はオイラー座標$\boldsymbol{x}$での圧力と流速である．式(5)は両辺とも独立変数は時間 t のみの常微分方程式であることが注目される．粒子aの速度$\boldsymbol{v}_a(t)$は位置$\boldsymbol{r}_a(t)$の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt} = \boldsymbol{v}_a \tag{6}$$

であるので式(5)の右辺の圧力勾配と粘性応力の内挿が評価できれば$\boldsymbol{v}_a(t)$と位置$\boldsymbol{r}_a(t)$が解けることになる．SPH法では非圧縮流も弱圧縮性で近似し，密度の時間発展

$$\frac{d\rho_a}{dt} = -\left[\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}_a(t)} \tag{7}$$

を同時に解き，圧力は状態方程式から求める．MPS法では非圧縮流を仮定し，密度は一定とし，式(7)の右辺=0より，あるいは粒子密度が変化しないとする式より圧力を求める．

以上が通常の粒子法の基礎方程式である. しかし，式(1), 式(3)さらに式(4)で表される粒子内挿式は空間フィルタをかけたもので，実際，式(3)，(4)では左辺の項を添字Sで区別しているにもかかわらず，式(5), (7)ではこれらを内挿する前の値と等しいとしている．従って粒子法では，平滑化した変数とそうでない変数が同一式に混在していることになる．

以上のような一見整合していない基礎式を見直し，粒子内挿法を瞬時運動方程式に適用し，式全体が統一されたものを導き, 検証例で確かめることにする.

3. 任意ラグランジアンーオイラリアン（ALE）一般運動方程式の粒子内挿近似（Smoothed Particle Representation）

本研究では前節の通常の粒子法とは異なり，空間平均した力を受けて移動する仮想粒子の運動を解く. 本節ではその定義に沿った基礎方程式を示す.

以降の表記を簡単にするため，A あるいはそれに演算を施した $F\{A\}$を位置 $\boldsymbol{r}$ で粒子内挿近似したものを$\left[F\{A\}\right]_{\boldsymbol{r}}$ と表す. すなわち

$$\left[F\{A\}\right]_{\boldsymbol{r}} = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} F\{W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_b,h)\} \tag{8}$$

この粒子内挿を上記の仮想粒子の運動方程式に適用する．ただし適用する式はオイラー表記でもなくラグランジェ表記でもない．任意の速度 $\boldsymbol{V}$ で移動する座標 $\boldsymbol{r}$ ，すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{V} \tag{9}$$

を満たす位置 $\boldsymbol{r}$ での運動方程式と質量保存式

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{10}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\cdot\nabla\rho = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{11}$$

に適用する．$\boldsymbol{V}$ を流体粒子の移動速度 $\boldsymbol{v}$ とするとラグランジェ座標上の方程式になる．ここで $\boldsymbol{V}$,　$\boldsymbol{r}$ を上で説明した仮想粒子の速度 $\boldsymbol{v}_a(t)$および位置 $\boldsymbol{r}_a(t)$とすると式(9)，(10)，(11)は

$$\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt} = \boldsymbol{v}_a \tag{12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_a})\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_a)\cdot\nabla\rho=-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} \qquad (14)$$

となる．次に式(13)の各項を位置 $\boldsymbol{r}_a(t)$で内挿すると

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}_a}-[\boldsymbol{v_a}\cdot\nabla\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{r}_a}=\boldsymbol{g}+\left[-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}_a} \qquad (15)$$

となる．ここで仮想粒子の加速度は

$$\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}_a} \qquad (16)$$

であることから仮想粒子の運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=\boldsymbol{g}+\left[-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}_a}+[\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v_a})]_{\boldsymbol{r}_a} \qquad (17)$$

と書ける．この式の右辺最後の項は粒子内挿距離 h 以下のスケールの乱流変動，すなわち分散による影響を表す．同様に質量保存式は

$$\frac{d\rho_a}{dt}=-[\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{r}_a}+[\boldsymbol{v_a}\cdot\nabla\rho]_{\boldsymbol{r}_a} \qquad (18)$$

となる．以上が乱流変動を考慮した粒子内挿を用いた基礎式である．

4. その他の関係式と数値計算法

前節では基礎式を導出したが，実際の計算で必要な関係式を以下にまとめる．

カーネル関数Wには次のような3次スプライン関数

$$W_{ab}=W(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b,h)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}\left[(2-r_{ab})^3-4(1-r_{ab})^3\right] & ,(0\le r_{ab}<1)\\ \frac{1}{6}(2-r_{ab})^3 & ,(1\le r_{ab}<2)\\ 0 & ,(2\le r_{ab})\end{cases} \qquad (19)$$

を用いる．ここで $r_{ab}=|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b|$ である．圧力勾配と粘性項の粒子内挿は Kajitar & Monaghan[9]と同様

$$\left[-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}_a}=-\sum_b m_b\left(\frac{p_a}{\rho_a^2}+\frac{p_b}{\rho_b^2}+\Pi_{ab}\right)\nabla_a W \qquad (20)$$

とした．ただし粘性項Π_{ab}は

$$\Pi_{ab}=\begin{cases}-\nu\frac{\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\boldsymbol{r}_{ab}}{\bar{\rho}_{ab}r_{ab}^2}, & (\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\boldsymbol{r}_{ab}<0)\\ 0, & (\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\boldsymbol{r}_{ab}>0)\end{cases} \qquad (21)$$

$\boldsymbol{v}_{ab}=\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v}_b$, $\boldsymbol{r}_{ab}=\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b$， $\bar{\rho}_{ab}=(\rho_a+\rho_b)/2$ である．圧力は状態方程式

$$p=B\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma-1\right) \qquad (22)$$

より密度から一義的に計算する．ρ_0 は初期の密度で，γ=7，B の値は音速が最大流速の 1 パーセント程度以下になるよう，最大水深が H_0 の場合

$$B=\frac{200\rho g H_0}{\gamma} \qquad (23)$$

にとっている．

基礎式の時間進行には時間ステップΔt の 1/2 進ませた中間値を予測し，Δt 後の値を求める予測・修正法を用いる．固定境界には固定した境界粒子を配置し，自由粒子との間に反発及び摩擦力を与えることにより粘着条件を課す．詳細は Kajitar & Monaghan[9] の方法に従う．

粒子内挿平均の計算では，すべての粒子から和を求めると非常に時間がかかってしまう．そのため領域を粒子平均幅 h の 2 倍以上の幅を持つリンクセル(Hockney & Eastwood[10])に分割し，隣接セル内の粒子のみの和をとるリンクセル方式を採用することにより，計算時間を大幅に短縮する工夫をしている．

MonaghanのXSPH法では計算安定のため式(12)の右辺の$\boldsymbol{v}_a$のかわりに空間平均した速度$\hat{\boldsymbol{v}}_a$ を用い

$$\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt}=\hat{\boldsymbol{v}}_a \qquad (24)$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{v_a}+\varepsilon\sum_b m_b\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{b}}-\hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{a}}}{\bar{\rho}_{ab}}W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_b,h) \qquad (25)$$

としている．ここでε=0.5 である．本計算でもこの修正を導入した計算を行う．

式(17)の $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v_a}$ の積の内挿値は乱流変動によるものなので，ここではエネルギー散逸を重視し，LES に用いられる標準 Smagorinsky モデルに準じたモデルを粒子内挿速度に適用した [11].

$$[\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v_a})]_{\boldsymbol{r}_a}=\left[\nu_{\boldsymbol{t}}\nabla^2\boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}_a},\quad \nu_{\boldsymbol{t}}=C_S^2(4h)^2|\boldsymbol{S}| \qquad (26)$$

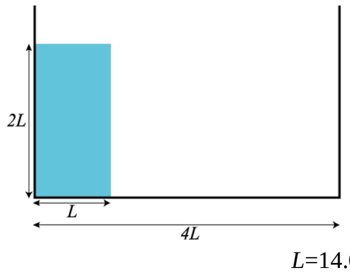
$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}^T\right] \qquad (27)$$

$|\boldsymbol{S}|$は変形速度テンソル $\boldsymbol{S}$ の絶対値の $\sqrt{2}$ 倍である．モデルの詳細は今後の研究に譲り，本研究では Smagorinsky 定数 C_Sは等方性乱流や自由乱流に用いられる値 0.13 とする．

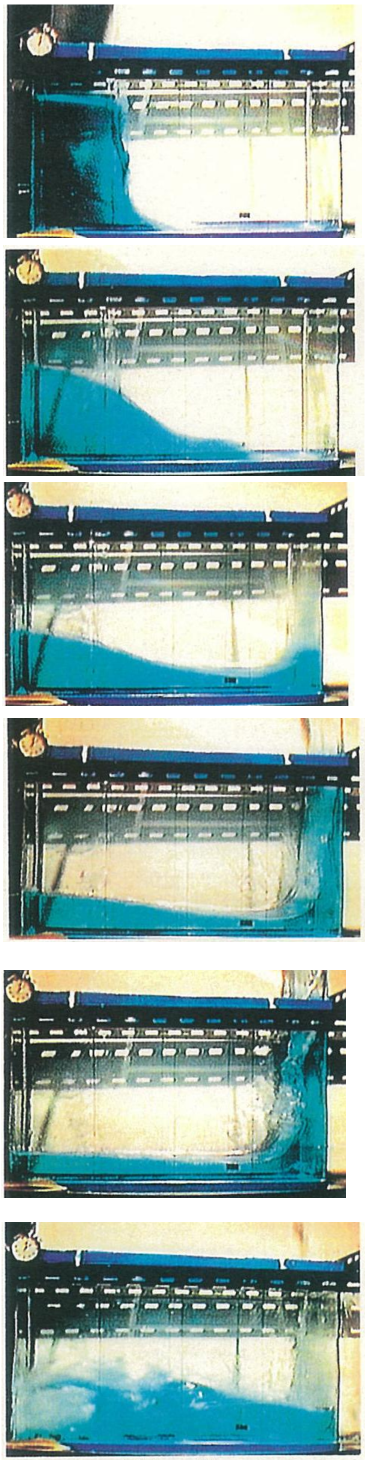
密度相関項は質量保存に影響するが、今後の検討課題とすることとし、本研究では無視する。

5. 水柱崩壊の計算での検証

上記の粒子法を試すのに**図−１**に示すような長さ $4L$ の容器の片側に置かれた幅 L 高さ $2L$ の水柱の崩壊過程の計算を行った．Koshizuka et al.[2]は L=14.6cm



図−１　水柱崩壊初期状態.



t =0.1sec

t =0.2sec

t =0.3sec

t =0.4sec

t =0.5sec

t =1.0sec

図-2 Koshizuka et al.[2]による水柱崩壊実験結果.

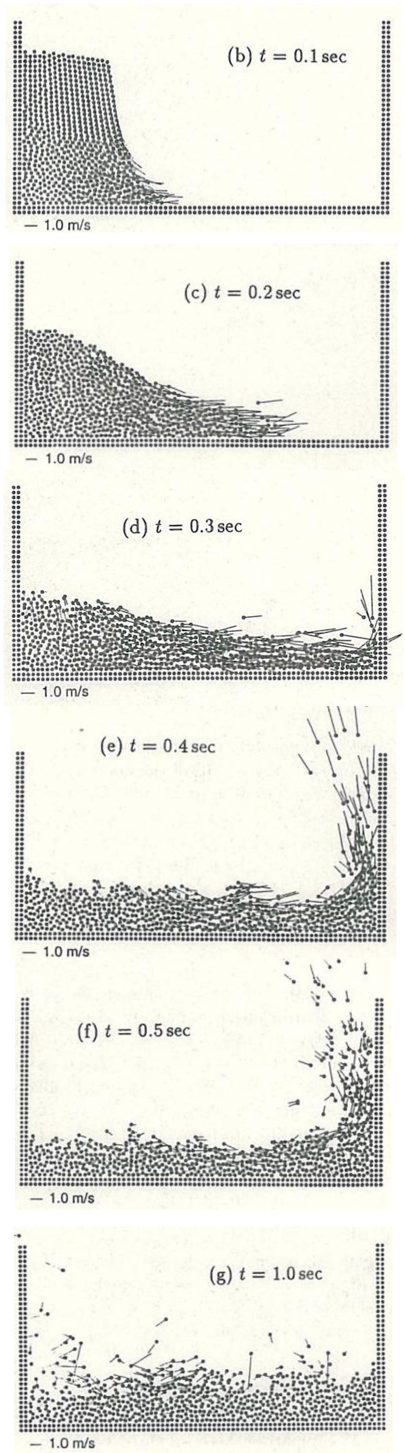


図-3 Koshizuka et al.[2] による MPS 法を用いた水柱崩壊の計算結果.

の初期水柱幅について実験及び MPS 法による計算を行っているのでこの条件に合わせた計算を行い，比較し考察する．実験は奥行き約 L の水槽で行われているので本計算では完全すべりを仮定した側壁を設置し 3 次元計算を行う．粒子数は横方向に 20 個、高さ方向に 40 個，奥行方向に 4 個配置し，初期静止状態から始め，実時間約 10 秒間の粒子の運動を時間ステップ 10^{-4} 秒で計算する．

図-2 は Koshizuka et al. [2]の実験により得られた崩壊過程の連続静止写真を示す．この水柱崩壊問題では水滴の飛散と水面の乱れに注目されるが，通常のビデオ画像からどの領域でどの程度発達した乱流になっているかはあまり調べられていない．しかし流速と全体の乱れからすると大きく乱れた乱流である．最大流速は 2m/s を超え，その時の水深は 5cm 程度あり水深を基にしたレイノルズ数は約 10^5 である．加速中乱流遷移は起こり難いが，水塊先端が右端に衝突した後の減速時には確実に乱流遷移している流れである．

図-3 は Koshizuka et al. [2]により行われた乱れを無

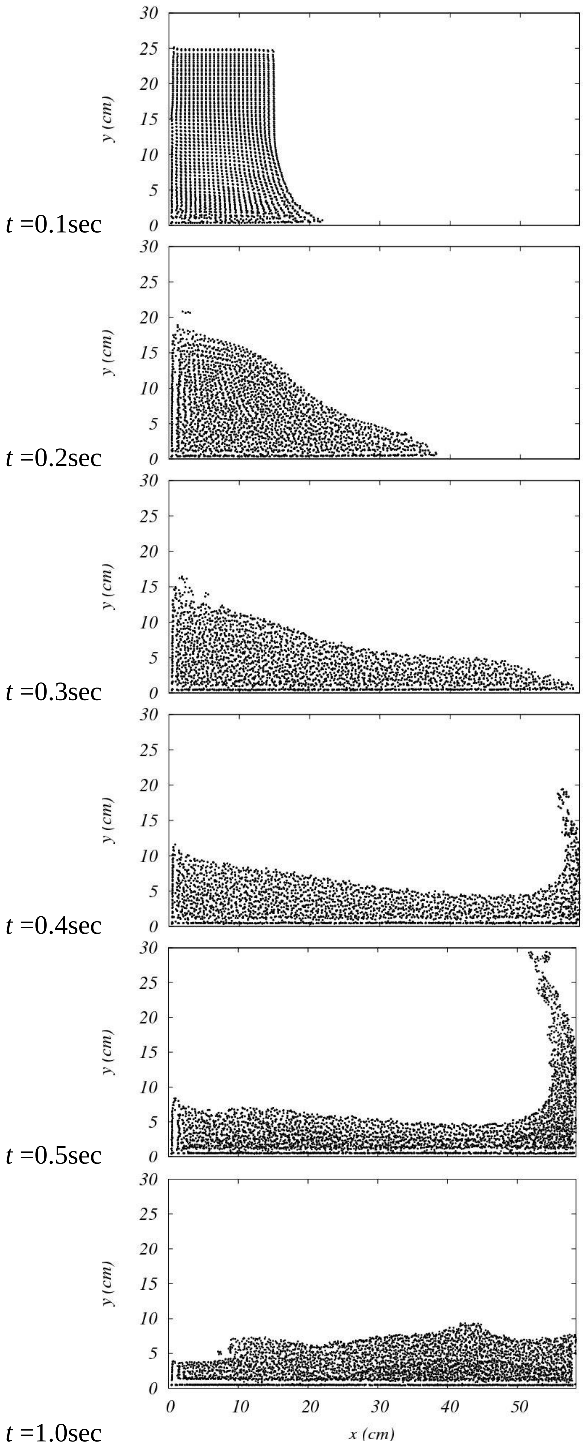


図-4 Monaghan[3] の方法による水柱崩壊の 3 次元計算結果.

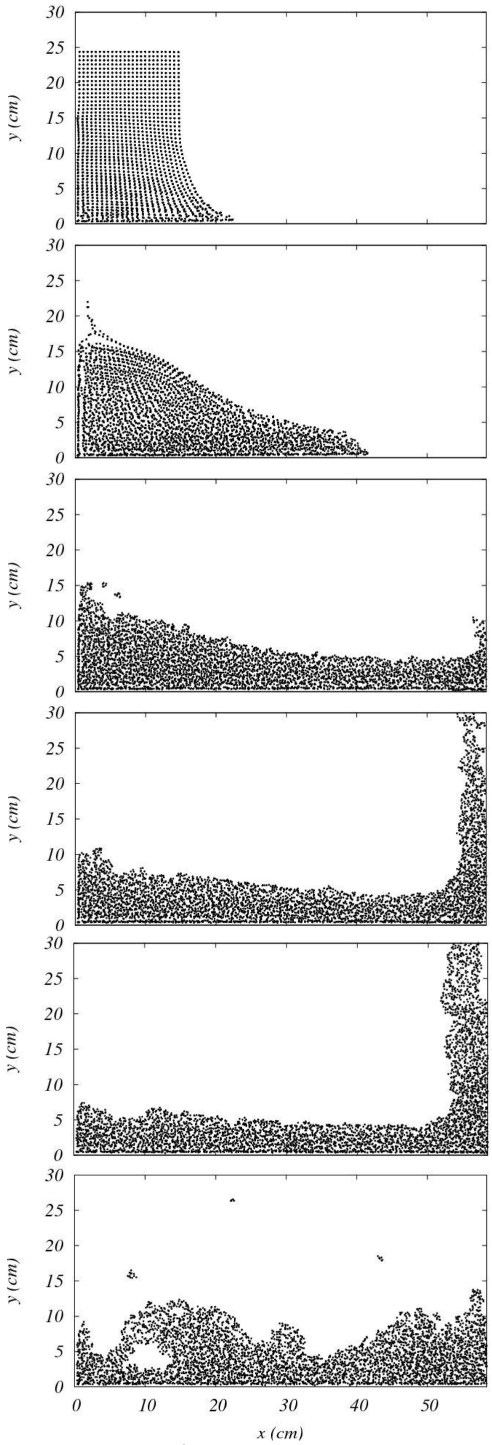


図-5 乱流変動を考慮した方法による水柱崩壊の計算結果.

視した MPS による計算結果である. 実験結果と同じように崩壊開始後時間 t =0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5sec と t =1.0sec での粒子の位置と速度を示している. この計算法は粘性を考慮しているが, 壁面は完全スリップと仮定しているので先端速度は実験より早い. また t =0.3sec 以降は粒子が飛散し t =1.0sec では粒子は分散しすぎている.

図-4 は Monaghan[3]のオリジナル SPH 法で行った計算結果を示す. Monaghan[3]は衝撃波を和らげるような人工粘性を与えるため, 実際の粘性より数桁大きい粘性値になっている. このため水塊先端の移動速度は実験より遅く, 右壁衝突後の跳ね上がり高さも実験に比べかなり低く, また右壁衝突後の水面乱れが小さく水面振動の収まりもかなりはやくなっている.

次に**図-5** に本報で提案する方法で, 運動量式に乱れを考慮した計算の結果である. t=0.3sec での先端の位置, t=0.5sec での水塊の高さ, t=1.0sec での水面の振動など実験の特性をよくとらえているといえる. ただ t=0.8sec あたりで跳ね上がった水塊が水槽

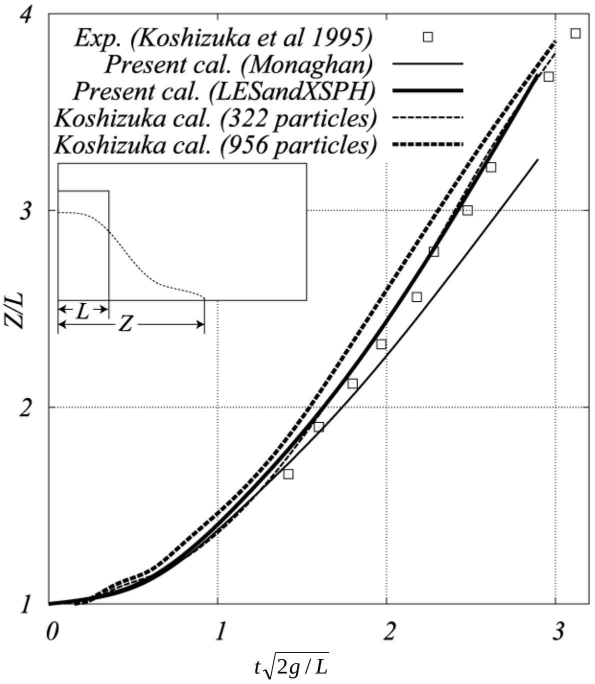


図-6 水塊先端の位置.

のなかほどに落下し，水面を振動させるときの位置と時間が実験とややずれているので，*t*=1.0sec での水面形がやや違っている．しかし右端に衝突した後水面が巻き上げられ大きく乱れた流れが左壁に向かって戻っている様子は他の計算では再現されていないが，乱れ効果を考慮した本方法ではよく再現されている．

図-6 は右壁に当たる直前までの水塊の先端の位置を示している. Monaghan の方法での計算結果は実験に比べて先端の移動が遅く，Koshizuka et al.[2)]の結果は粒子数の多い場合が速くなっているのに対し，乱れ効果を導入した計算値は実験値に近い結果となっている．

以上のように乱流のシミュレーションに粒子法を用いる場合，運動量方程式に変動効果を導入することによりレイノルズ数の高い流れのより現実的な結果が得られることが判った．

6. 結言

粒子法を実用的乱流シミュレーションに適用するのを目的に，粒子内挿距離以下の変動の効果を考慮した基礎運動方程式を導き，SPH 法に従った計算法を提案した．これまでの計算では衝撃波など密度の急変に対応するような実際より数桁大きい粘性を設定する層流計算であったが，本研究では粘性は実際の分子粘性係数とし，乱れによる実質的粘性は Smagorinsky モデルに準じたモデルで，局所の速度勾配と粒子内挿距離に依存するモデルを導入した．実験室スケールではあるが水柱崩壊過程の計算を行い，乱れ効果を導入した計算はこれまでの計算法に比べ壁面摩擦の効果及び全体の乱れの状況が実験にかなり近いものになることが分かった．今後モデルの詳細を検討し，流入，流出境界条件を導入することにより, 定常流の計算にも適用できるようにする．また流速分布やレイノルズ平均量の検証も行う予定である．

謝辞

オーストラリア Monash University の Prof. J. Monaghan には貴重な意見と助言を頂きました．ここに謝意を表します．

参考文献

1) Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics, A*nnu. Rev. Astron. Astrophys*, Vol. 30, pp.543-574, 1992.
2) Koshizuka S., Tamako, H. and Oka, Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Computational Fluid Dynamics Journal*, Vol.4, pp.29-46, 1995.
3) Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics, *Rep. Prog. Phys*. Vol.68, pp.1703-1759, 2005.
4) Colagrossi, A. and Landrini, M.: Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *J. Comput. Phys*. Vol.191, pp.448-475, 2003.
5) Violeau, D. and Issa, R.: Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH model: an overview, *Int. J. Numer. Meth. Flieds*, Vol. 83, pp.277-304, 2007
6) 後藤仁志，酒井哲郎，芝原知樹：SPS 乱流モデルの導入による新しい粒子法の展開，水工学論文集，第 44 巻，pp.575-580, 2000.
7) Holm, D. D. : Fluctuation effects on 3D Lagrangian mean and Eulerian mean fluid motion, *Physica D*, Vol. 133, pp.215-269, 1999.
8) Monaghan, J.J.: SPH compressible turbulence, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Vol.335, pp.843-852, 2002.
9) Kajitar, J. and Monaghan, J.J. : SPH simulation of swimming linked bodies, *J. Comput. Phys.*, Vol. 227, pp.8569-8587, 2008.
10) Hockney, R.W. and Eastwood, J.W.: *Computer Simulation Using Particles*, Hilger, Bristol, 1988.
11) Sagaut, P. : *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, 3rd ed., Springer, Berlin, Hidelberg, New York, 2006.

（2009.9.30 受付）