

自由水面を持たない管路内における 界面波の形成

THE FORMATION OF BOUNDARY WAVES IN CLOSED CONDUITS WITHOUT FREE WATER SURFACES

平塚智史¹・泉 典洋²・関 陽平³

Tomofumi HIRATSUKA, Norihiro IZUMI and Yohei SEKI

¹ 学生員 北海道大学大学院 環境フィールド工学専攻 (〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

² 正会員 PhD 北海道大学教授 環境フィールド工学専攻 (同上)

³ 工修 株式会社シビテック (〒 003-0002 北海道札幌市白石区東札幌 2 条 5 丁目 8 番 1 号)

One of the most significant features of small scale boundary waves under open channel flow is the phase lag between the water surface and bed surface elevations. It is suspected that the presence of the free water surface has some relations with the formation of boundary waves. Are boundary waves not formed without free water surfaces? Though there is not a clear answer to this problem, there are only few studies on the bed configurations in closed conduits without free water surfaces. Therefore, one of the main purposes of this study is to reveal the conditions for the formation of boundary waves in closed conduits, and compare with the analytical results proposed by Seki and Izumi³⁾. In experiments, we used a small-scale experimental conduit in which water and sand are circulated by a pump. We measured the distribution of flow velocity and the bed configurations by taking photos continuously. As a result, these experiments showed that flat boundaries become unstable when the Euler number increases to become larger than the critical value, and that this critical Euler number depends on the dimensionless tractive force. It was found that results of the analysis were consistent with the experimental results.

Key Words: Closed conduits, Dunes formation, Linear stability analysis

1. はじめに

底面に砂が敷き詰められた開水路では、流速や砂の粒径などの水理条件の変化によってデューンやアンチデューンといった河床波が形成される事が知られている。これらの河床波の形成は流体抵抗に対する影響が大きく、Kennedy¹⁾をはじめ数多くの研究者の手によってそのメカニズムが明らかにされてきた。特にデューンの場合、河床波が水面波に対して位相差をもって形成されるため、その形成自体に自由水面の存在が関わっていると考えられている。

一方で、自由水面を持たない条件下での砂-水界面の安定性については研究も少なく、あまりわかっていないのが現状である。しかし、Coleman²⁾らによる実験において、自由水面の無い条件下においてデューンやリップルに類似する界面波（以後、本論文中では管路内デューン、および管路内リップルと呼ぶ）が確認されており、それらが管路の流体抵抗に及ぼす影響は無視できない可能性がある。

自由水面を持たず移動床を有する流れの環境として、水面が凍結して氷で覆われた結氷河川や、ダムの堆砂対策として用いられる土砂バイパス管路などが挙げられる。こうした環境下での界面波形成は流体抵抗に大

きな影響を及ぼすことから、洪水調節や排砂効率などの観点からその形成過程および形成条件を予測することは工学的に重要な問題である。

関、泉³⁾は上下面を等粗度と仮定した管路内における線形安定解析を行っており、これによると管路内の砂と水の安定性は Euler 数 Eu および Shields 数 θ_{b0} によって決定される。また、上下面の粗度が異なる場合にはこの二つの無次元数に加え、管路上面と底面の摩擦速度の比である β も砂と水の安定性を決定するパラメータであることを示している。ただし、彼らの研究では $\beta = 1$ が仮定されており、 β の変化が界面不安定にどの程度寄与するのかは示されていない。

そこで本研究では β の変化が界面不安定にどの程度影響を与えるのかを明らかにするため、上下面の粗度が等しい場合から粗度が異なる場合へと拡張し、 β をもう一つのパラメータとした解析を行った。さらに管路上面を滑面とする小規模な実験管路を用いて管路内デューンを再現し、その実験結果と解析結果を比較し、解析の妥当性を検証することとした。

ノルズ応力はゼロである．したがって次式が成立する．

$$P_I = \beta^2 P_{II} \quad (13)$$

(3) 線形安定解析

各変数に対し，以下の摂動展開を行なう．

$$\begin{aligned} (\Psi, P, Z, R, H) = & (\Psi_0, P_0, 0, R_0, 1) \\ & + \varepsilon (\Psi_1, P_1, R_1, H_1) \exp i(\alpha \xi - \Omega t) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで添字の 0 は基本状態，1 は摂動の部分を示している． ε は摂動の振幅， α は摂動の無次元波数， Ω は摂動の複素角周波数を表している．

平坦床基本状態において式 (2)–(4) は以下のようになる．

$$-\frac{dP_0}{d\xi} + \frac{dT_{xy0}}{d\eta} = 0 \quad (15)$$

$$T_{xy0} = \kappa^2 (\eta + R_0)^2 (1 - \eta) \left(\frac{dU_0}{d\eta} \right)^2 \quad (16)$$

これらを底面 $\eta = 0$ における以下の条件を用いて解く．

$$U = 0, T_{xy0} = 1 - R_0 \quad (17)$$

式 (15) および (16)，(17) より，以下の対数分布則が導かれる．

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (18)$$

さらにこれを $\eta = 0$ から 1 まで積分すると次式が得られる．

$$C^{-1} = \bar{U}_0 = \frac{1}{\kappa} \left[(1 + R_0) \ln \left(\frac{1 + R_0}{R_0} \right) - 1 \right] \quad (19)$$

ここで C は流速係数で， $\bar{U}_0$ は平坦床基本状態における水深方向の平均流速を表している．

$O(\varepsilon)$ における摂動解についてはスペースの関係上ここでは省略する．

(4) 河床高の時間変化

河床高の時間変化は Colombini⁴⁾ に倣い次のように定式化する．流砂の連続式は以下のように表す．

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \quad (20)$$

ここで B は掃流層上面の高さ， t は時間である． Φ は無次元掃流砂量であり以下のように示される．

$$\Phi = q_s^* / (R_s g d_s^3)^{1/2} \quad (21)$$

ここで q_s^* は単位幅あたりの掃流砂量， R_s は砂粒子の水中比重 ($= 1.65$) である．掃流砂量式としては以下のような Meyer-Peter & Müller 式を用いる．

$$\Phi = 8 (\theta_b - \theta_c)^{3/2}, \quad (22)$$

ここで θ_b および θ_c はそれぞれ掃流層上面における無次元掃流力と限界無次元掃流力であり次式で表される．

$$\theta_b = \frac{T_b^*}{\rho R_s g D_s^*} \quad (23)$$

$$\theta_c = \theta_{ch} - \mu \left(S - \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \quad (24)$$

ここで θ_{ch} は平坦床の場合における限界無次元掃流力， T_b^* は掃流層上面での剪断力であり，次式で表される．

$$\frac{T_b^*}{\rho U_{f0}^2} = T_b = [\vec{e}_{tb} \cdot \vec{T} \cdot \vec{e}_{tb}]_{\eta=\eta_b} \quad (25)$$

ここで $\vec{e}_{tb}$ は底面に対する接線方向の法線ベクトル， $\vec{T}$ は応力テンソル， η_b は掃流層上面の位置 (η の値) を示す．また，掃流層厚さ h_b は次のように表される．

$$h_b = l_b d_s, \quad l_b = 1 + 1.3 \left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right)^{0.55} \quad (26a, b)$$

ここで τ_r および τ_c はそれぞれ基準高さにおける剪断応力および限界剪断応力である．

(5) 支配パラメータ

解析によって摂動の複素角周波数 Ω は以下の 4 つのパラメータ関数として次式で表現できることがわかる．

$$\Omega = f(\alpha, \beta, C, \theta_{b0}) \quad (27)$$

ここで α は無次元波数， β は二領域の摩擦速度比， C は流速係数， θ_{b0} は Shields 数である．ここで，Shields 数は平坦床の場合における無次元掃流力 θ_b に対応している． Ω の虚部が摂動の増幅率を示すことから，これらの無次元数がデューン形成を決定づけるパラメータである．

式 (19) より流速係数の逆数は無次元化された平均流速であるから，次元量である平均流速 $\bar{U}_0^*$ と摩擦速度 U_{f0}^* の比で表すことができる．これは Euler 数の定義と等しく，次式が成立する．

$$Eu = C^{-1} = \frac{\bar{U}_0^*}{U_{f0}^*} \quad (28)$$

関，泉³⁾の研究では前述の通り，上下面を等粗度 $\beta = 1$ と仮定しているため次式が得られている．

$$\Omega = f(\alpha, Eu, \theta_{b0}) \quad (29)$$

ただし実験では管路上面が滑面であることを考えると， β がより小さな値をとることは明白である．よって本研究では実験の条件に合わせ，接続条件における β をもう一つのパラメータとして解析を行なった．

(6) 解析結果

図 2 は， $\beta = 1$ ， θ_{b0} 一定の下で，摂動の増幅率 $\text{Im}[\Omega]$ のコンタ図を $\alpha - Eu$ 平面上に示したものである．実線が増幅率がゼロのコンタ (中立安定曲線) であり，この曲線上で Euler 数が最大となる点が臨界 Euler 数を示

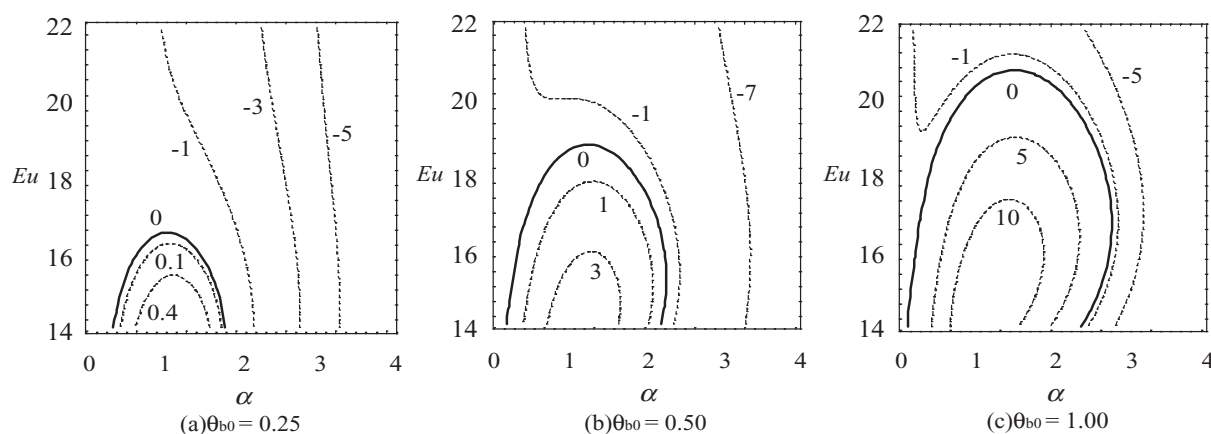


図-2 増幅率のコンタ図 ($\beta = 1$) .

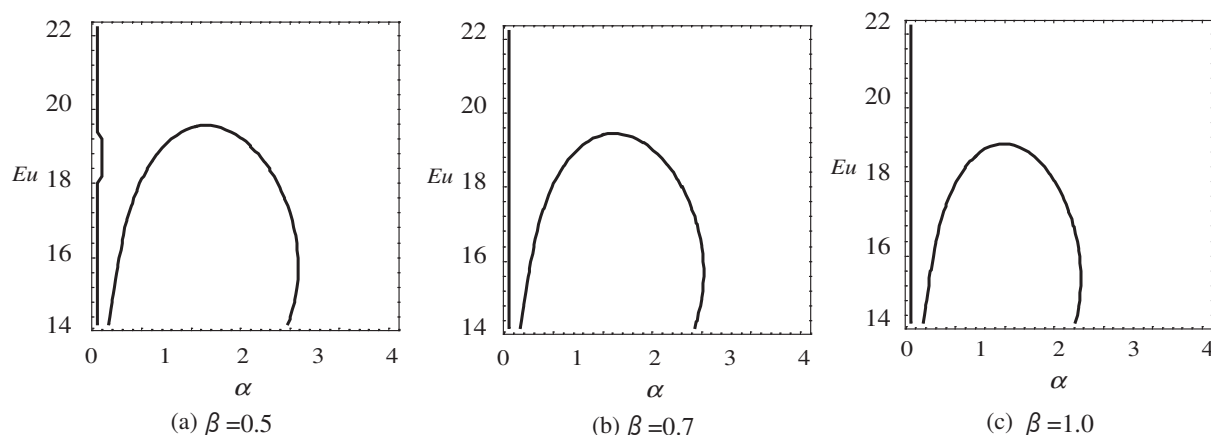


図-3 増幅率の中立安定曲線 ($\theta_{b0} = 0.5$) .

している． θ_{b0} 増加とともに中立安定曲線の極大値，つまり界面不安定が発生する臨界 Euler 数は増加しており， θ_{b0} の大きい領域ほど界面は不安定となり，管路内デューンが発生することがわかる．

図 3 は $\theta_{b0} = 0.5$ の下， β の値を変えることで中立安定曲線を示したものである．図を見ると β が小さくなるにつれて臨界 Euler 数はわずかに増加していることがわかる．よって上面の粗度が小さくなるような管路を想定した場合，その臨界 Euler 数は等粗度仮定の場合よりも大きくなる．これらの比較から， β が解析結果に与える影響は θ の変化ほど大きくはないが，形成限界を予測するうえで無視できないことがわかる．

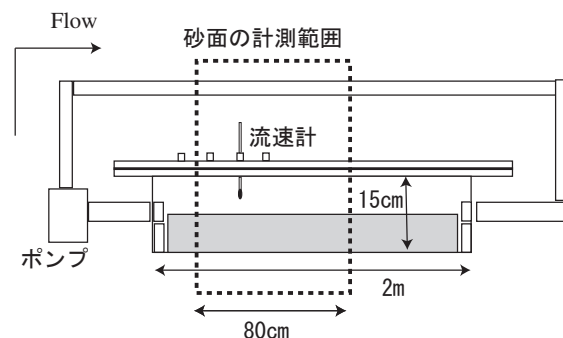


図-4 実験装置 .

3. 実験

(1) 実験装置

実験に用いた水路は奥行 80 mm，高さ 150 mm，長さ 2 m で，ポンプによって水と砂を循環させることができる (図 4 参照)．これにより，給砂を行わずに連続的に実験を行なうことができる．最大流量は管路に砂がない場合でおよそ 3 l/s で，実験で用いた最大流速は概ね 60 cm/s 程度である．

(2) 実験条件

流速は水深方向の流速分布を電磁流速計を用いて計測し平均流速を算出した．砂は図 5 の粒径加積曲線に示した三種類の粒径を用いた．それぞれ中央粒径は， $d_s = 0.74, 0.48, 0.32$ mm となっており，解析で仮定されている浮遊砂の発生が起こらない条件を満たしている．また，砂面の厚さは管路底の露出や実験装置の閉塞を避けるために 6～10 cm 程度で行なった．結果的に，この実験の範囲は Euler 数が 12～17 程度，無次元掃流力で 0.05～0.30 程度であった．

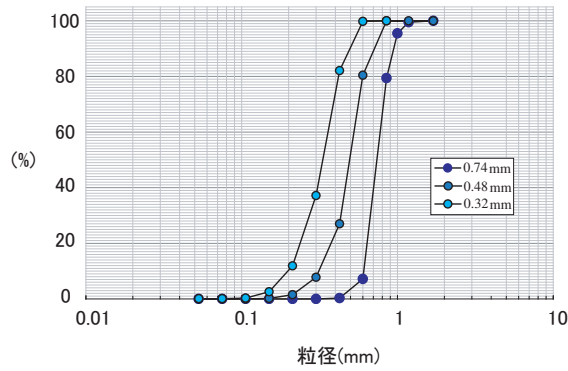


図-5 粒径加積曲線 .

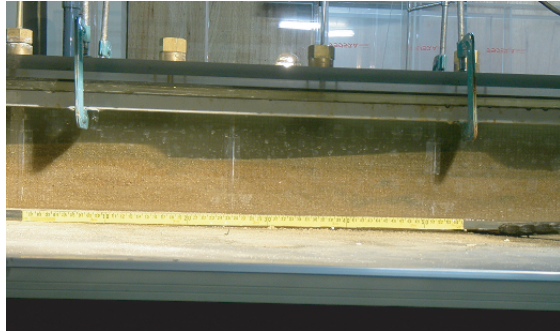


図-6 実験により観測されたデューン .

(3) 形成の判定

本研究では管路内デューンの発生をもって形成を判定することとした．具体的には下記の三つの分類を行い，実験の考察をすすめる．

a) 形成

図 6 は実際に本実験の中で観測された管路内デューンであり，この形状がほぼ連続的に観測される条件を「形成」と見なした．

b) 遷移

ただし，管路内デューンが発生する場合においても，それが連続せず，平坦床や管路内リップルに似た状態を主体とする場合，「形成」よりも臨界状態に近いと考え，「遷移」として扱うこととした．

c) 非形成

一方で「非形成」として扱ったのは界面波が全く発生しない平坦床状態の他に，比較的波高の低い管路内リップルのみが現れる場合もまた「非形成」としている．

4. 考察

実験結果を表 1 に示す．右端の欄は界面波の分類を記したものであり，図 7 中のプロットと対応している．各実験ケースにおける β の算出には領域 I の底面を粗面，領域 II の底面を滑面とし，次式で表すそれぞれ粗

表-1 実験結果 .

	d_s^* (mm)	D^* (cm)	$\bar{U}_{f0}^*$ (cm/s)	β	θ_{b0}	Eu	分類
1-1	0.74	7.8	59.0	0.76	0.156	13.7	形成
1-2	0.74	7.4	49.3	0.77	0.111	13.5	形成
1-3	0.74	7.2	37.6	0.78	0.065	13.5	形成
1-4	0.74	7.3	35.1	0.79	0.056	13.5	非形成
1-5	0.74	9.0	35.0	0.80	0.052	14.0	非形成
1-6	0.74	5.8	60.0	0.75	0.180	12.9	形成
1-7	0.74	5.8	50.0	0.76	0.125	12.9	形成
2-1	0.48	5.8	60.5	0.79	0.241	14.0	形成
2-2	0.48	5.4	54.0	0.79	0.197	13.8	形成
2-3	0.48	6.5	54.0	0.80	0.178	14.3	形成
2-4	0.48	5.7	43.1	0.81	0.123	13.9	形成
2-5	0.48	6.0	36.7	0.83	0.088	14.1	形成
2-6	0.48	9.5	30.6	0.85	0.052	15.2	非形成
3-1	0.32	5.1	36.3	0.87	0.118	14.7	遷移
3-2	0.32	5.5	32.1	0.88	0.090	14.9	遷移
3-3	0.32	6.0	58.8	0.83	0.294	15.1	非形成
3-4	0.32	7.0	28.5	0.89	0.066	15.5	遷移
3-5	0.32	9.3	41.5	0.87	0.128	16.2	非形成
3-6	0.32	8.9	31.2	0.89	0.073	16.1	非形成

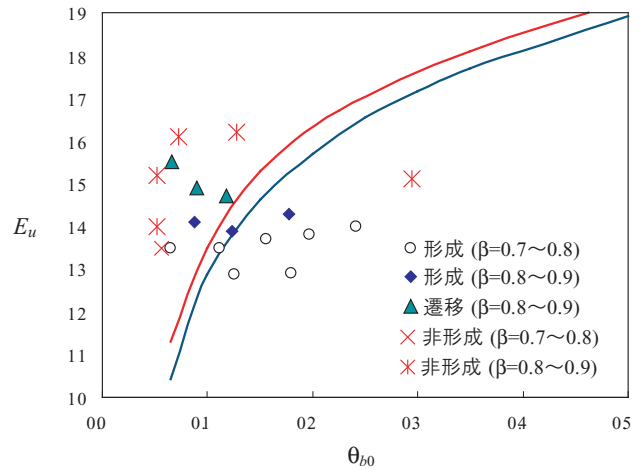


図-7 臨界 Euler 数と実験結果 .

面および滑面の対数分布則を用いた．

$$\frac{U_{10}^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{30y_I^*}{k_s^*} \right) \quad (30)$$

$$\frac{U_{10}^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{9U_{f0}^* y_{II}^*}{\nu} \right) \quad (31)$$

ここで k_s^* は粗度高さ， ν は動粘性係数 ($= 1.3 \times 10^{-6} m^2/s$) である．境界面において流速が連続であることから，粗面および滑面の流速分布則の連立方程式を解くことで流速が一致する境界面の高さが求められる．式 (1) および (12) より β は境界面の高さの比で表現できることから，表 1 に示したように実験条件ごとの β が算出できる．

図 7 に解析と実験結果を示す．横軸が Shields 数，縦軸が Euler 数であり，図中の二本の曲線が解析から得られた臨界 Euler 数であり，これより高い Euler 数ではデューンが発生しないことを意味する．青の曲線が上面が等粗度と仮定した場合，赤の曲線が $\beta = 0.7$ とし

た場合の解析結果である．実験データの β についてはそれぞれの条件によって異なるが， β は 0.7 から 0.9 の値を取る．また，図 3 から分かるように β が小さくなるにつれて，臨界 Euler 数は増加傾向にある．

$\beta = 1$ の理論曲線と実験結果を比較すると Euler 数が大きく Shields 数が小さい領域でデューンが非発生となっており，Euler 数および Shields 数がともに小さい領域でデューンの発生が見られる点を除けば両者の一致は概ね良好である．さらに $\beta = 0.7$ として得られる理論曲線では，より Euler 数が大きく Shields 数の小さい側へ不安定領域が広がっており，十分とは言えないものの，より実験結果との一致が改善されていることが判る．

5. 結論

本研究による上下の粗度が異なる場合に拡張された解析，および実験結果との比較から以下のようなことがわかった．

1. 上面の粗度が底面より小さく， β の値が小さくなるにつれて，臨界 Euler 数は増加することが解析により明らかとなった．
2. 上面と底面の粗度が異なる効果を取り入れることによって，実験との整合性が改善されることが明らかとなった．

参考文献

- 1) Kennedy, J. F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *J. Fluid Mech.* 16, Part 4, pp. 521–544, 1963.
- 2) Coleman, S. E., Fedele, J. J. & Garcia, M. H.: Closed-conduit bed-form initiation and development, *J. Hydr. Eng.* 12, pp. 956–965, 2003.
- 3) 関 陽平，泉 典洋: 管路における砂-水界面の安定性, 応用力学論文集, Vol. 11, pp. 753–760, 2008.
- 4) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *J. Fluid Mech.* 502, pp. 1–16, 2004.

(2009.9.30 受付)