

二次オーダー積分モデルから見た 軸対称な噴流とプルームの自己相似解

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF AXISYMMETRIC TURBULENT JETS
AND PLUMES DERIVED FROM SECOND-ORDER INTEGRAL MODEL

楊 宏選¹・陸 旻皎²・熊倉俊郎³・早川典生⁴

Hongxuan YANG, Minjiao LU, Toshiro KUMAKURA and Norio HAYAKAWA

¹正会員 博士(工学) 長岡技術科学大学助教 環境建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)

²正会員 博士(工学) 長岡技術科学大学教授 環境建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)

³正会員 工博 長岡技術科学大学準教授 環境建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)

⁴フェロー会員 Ph.D. 長岡技術科学大学名誉教授 環境建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)

Analytical solutions for the radial mean velocities, turbulent shear stresses, radial turbulent fluxes of tracer and heat, mean pressure, dominant turbulent kinetic energy production term, and the turbulent diffusivities of momentum, mass and heat, are integrally derived from the mean profiles of the axial velocities, the tracer concentrations, and the excess temperatures. The radial velocity profiles show that the entrainment velocity is a misleading name as the inward velocity never reaches it. Reynolds stresses are found to be almost the same in both jets and plumes, whereas the turbulent tracer fluxes of jet are found to be about 50~60% of those of plume. Though the turbulent Schmidt/Prandtl numbers are found to be constant in the whole self-similarity region, it is shown that the eddy viscosities decrease in radial direction but increase in streamwise. It is also shown that the mean pressure is approximately directly proportional to the radial turbulent normal stress.

Key Words: self-similarity, Reynolds stress, eddy viscosity, turbulent Schmidt/Prandtl number

1. はじめに

密度噴流(buoyant jet, forced plume)は周囲流体と異なる密度を有する流体が運動量を有して排出される流れのことである。そのうち、密度差がない場合は噴流(jet)、密度差のみを有する場合はプルーム(plume, pure plume)と呼ばれ、両者とも密度噴流の特殊なケースである。密度噴流は放流口付近で噴流に近い振る舞いを有し、十分に進んだ距離からプルームに近い挙動をすると考えられている¹⁾²⁾³⁾から、数値解析に際して、噴流とプルームの結果を利用して補間的に密度噴流の値(例えば連行係数)を計算する手法が一般的である¹⁾²⁾³⁾¹⁹⁾²³⁾。軸方向流速、濃度と温度分布の自己相似性(self-similarity)に着目し、運動量、濃度とエネルギーの保存式を横断面内で積分して流速、濃度、温度及び噴流幅の中心軸に関する連立常微分方程式を構築してからルンゲ・クッタ法等で数値的に解くいわゆる積分法が密度噴流計算の主流である。方程式系を閉じるアプローチは初期の研究で二種類が存在した：

Rouse⁴⁾とPriestly&Ball⁵⁾はレイノルズ応力の関数形を仮定して力学的エネルギー方程式を用いたのに対して、Morton⁶⁾は周囲流体が噴流代表流速の一定の割合の速度で噴流に取り込まれていくという連行速度を用いた。両アプローチにそれぞれ追従者がいたが、後者が次第に優勢となり、特にFan&Brooks⁷⁾のAbraham論文の討議から、以降の研究ではほぼ定着したアプローチとなった。なお、連行係数は研究者の間でばらつきがあり、0.082~0.0875(plume)、0.0525~0.057(jet)程度である¹⁾²⁾³⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾。

初期の実験は計測内容が主に軸方向流速、濃度と温度の平均値に限定されていたが、その後、次第に乱流の変動成分にまで広げられ、熱線流速計を主な計測手段にして多くの実験が行われ¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾、密度噴流の乱流特性がだいぶ明らかになった。この時期の計測結果に誤差の範疇にあると思われる違いもあるが、明らかな矛盾も見られ、例えばプルームにおいて濃度プロファイルと流速プロファイルの特性幅の比 λ に関して、Rouse⁴⁾の値 $\lambda=1.16$ は長い間研究者の間に受け入れられた⁷⁾⁸⁾¹⁹⁾が、Wyganski&Fiedler¹⁰⁾の実験で λ は一変、1より小さい値

となる．以降の実験にも混乱が続き、 $\lambda < 1^{(11)(14)(20)}$ と $\lambda > 1^{(12)(3)}$ を主張する研究者が両方いる．SHW(stationary hot-wire)，FHW(flying hot-wire)とLDA(laser Doppler anemometry)を用いたHusseinら¹⁵⁾の計測実験でSHWの結果がFHW，LDAと相当異なることから，従来のSHW技術による計測結果の信憑性に疑問を投げかけた．

軸対称な噴流とプルームに限れば，軸方向流速・幅・濃度・温度に関して積分モデルを利用しなくても，多くの実験データにより経験式はすでに提案されている²³⁾⁽²¹⁾．本研究はこれに着目して，積分モデルから軸方向流速・幅・濃度・温度を求める今までの数値解析手法と逆の手順で，それらを既知条件として，積分モデルで無視されてきた二次オーダー項(例えばレイノルズ応力，スカラーの乱流流束，圧力)，代表流速の割合で片付けられた連行速度の実態である半径方向流速，運動量・スカラー・熱の乱流拡散係数，及び乱流エネルギーの生成項など，流れと乱流構造を理解する上に重要な量のプロファイルを導出するのを目的の一つとする．これらの一部は実験²³⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾で計測され，最小二乗法で近似曲線も数値的に得られている．しかし，二次オーダー項であるゆえに，実験間にばらつきが大きく，近似曲線の関数が異なるだけでなく，数値的なためか，係数も式も示されていないのがほとんどである．これは係数に小差があるとは言え定式化されている軸方向流速・濃度等とは対照的である．軸方向流速・濃度等が横断面で自己相似分布を有するならば，他のあらゆる量も同様に自己相似分布特性を有しなければならないと考えられる．それらのプロファイルは多項式近似よりも(軸方向流速と濃度の近似曲線である)ガウス曲線を要素とする近似式の方が自然であろう．導出されたプロファイルに基づいて，連行速度，渦拡散，乱流せん断と垂直応力などの特性およびそれらが噴流とプルーム間の異同について考察することは本研究のもうひとつの目的である．

2. 基礎方程式

中心軸が一次元である軸対称密度噴流に関して非圧縮性，十分発達乱流(分子拡散 $\ll$ 乱流拡散)とブシネスク近似(密度変化が大きい)を適用すれば，円柱座標系(軸 z ，半径 r ，方位角 θ)における連続，濃度及び運動量方程式のレイノルズ平均流方程式は以下ようになる．

$$\text{連続} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial(r\bar{v})}{r\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\text{濃度} \quad \frac{\partial(\bar{u}\bar{c} + \overline{u'c'})}{\partial z} + \frac{\partial(r\bar{v}\bar{c} + \overline{rv'c'})}{r\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$z\text{方向} \quad \frac{\partial(\bar{u}^2 + \overline{u'^2} - \bar{v}^2)}{\partial z} + \frac{\partial(r\bar{u}\bar{v} + \overline{ru'v'})}{r\partial r} = g_e \quad (3)$$

$$r\text{方向} \quad \frac{\partial(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'})}{\partial z} + \frac{\partial(r\bar{v}^2 + \overline{rv'^2})}{r\partial r} = \frac{\overline{w'^2}}{r} - \frac{\partial \bar{p}}{\rho_a \partial r} \quad (4)$$

$$\theta\text{方向} \quad \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} + \frac{\partial(r\overline{v'w'})}{r\partial r} + \frac{\overline{v'w'}}{r} = 0 \quad (5)$$

ここで $g_e = g\Delta\rho/\rho_a$ ， u ， v ， w はそれぞれ z ， θ 方向の流速， ρ_a は周囲流体密度， $\Delta\rho$ と c は噴流と周囲流体の密度差とトレーサー濃度差， p は圧力， g は重力加速度，変数の上線はレイノルズ平均値を，ダッシュは平均値からの変動値を表す．エネルギー方程式は式(2)中の c を温度差 t に置き換えればよく，紙面の関係で載せないことにする．なお，式(3)は以下の近似式

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\rho_a \partial z} \approx \frac{\partial(\overline{v'^2} + \overline{w'^2})}{2\partial z} \approx \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial z} \quad (6)$$

を適用して軸方向圧力勾配項を消去している²⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾．

Husseinら¹⁵⁾とPanchapakesan&Lumley¹²⁾⁽¹³⁾は計測結果から v' と w' の乱れ強度は実質的に同じとしている．

中心軸位置における軸方向流速，濃度差は以下のように軸方向で減衰する²³⁾⁽²¹⁾．

$$\bar{u}_{jc} = k_{ju} \bar{u}_0 D z^{-1}, \quad \bar{u}_{pc} = k_{pu} B_0^{1/3} z^{-1/3} \quad (7)$$

$$\bar{c}_{jc} = k_{jc} \bar{c}_0 D z^{-1}, \quad \bar{c}_{pc} = k_{pc} B_0^{2/3} z^{-5/3} \quad (8)$$

ここで D は放流口直径， B は浮力流束($=Qg\beta t$ ， Q : プルーム流量， β : 熱膨張係数)，下付き文字 0 と c はそれぞれ放流口と中心軸での値を， j と p は噴流かプルームかを表す．

また，軸方向流速と濃度差の半径方向分布はガウス曲線で綺麗に近似できることがよく知られている¹⁾⁻⁽²³⁾．

$$\bar{u} = \bar{u}_c e^{-r^2/b^2}, \quad \bar{c} = \bar{c}_c e^{-r^2/(\lambda b)^2} \quad (9)$$

特性幅 b は軸距離に比例して線形的に増加し($b=\eta z$)，比例係数 η は概ね0.10~0.115¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾⁽¹⁵⁾⁽²⁰⁾である．濃度と流速の特性幅の比 λ は噴流において1.32²⁰⁾，1.19¹⁾，1.21²⁾と1.23³⁾，プルームにおいて0.92¹¹⁾⁽¹⁴⁾⁽²⁰⁾，1.16⁴⁾，1.20²⁰⁾，1.06²⁾，1.04³⁾と報告されている．データのばらつき具合と計測技術の信頼性²³⁾に重みを置く視点から，噴流の λ は1.21程度，プルームの λ は1よりほんの少し大きいが便宜を図り1と考えてよいとした．

3. 自己相似な量の誘導

1) 連行速度および半径方向流速

式(7)と(9)を利用して連続方程式(1)を積分すれば，噴流とプルームの半径方向平均流速が得られる．

$$\frac{\bar{v}_j}{\bar{u}_c} = -\frac{1}{r\bar{u}_c} \int_0^r \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} r dr = \frac{\eta}{2\xi} (e^{-\xi^2} - 1) + \eta \xi e^{-\xi^2} \quad (10)$$

$$\frac{\bar{v}_p}{\bar{u}_c} = \frac{5\eta}{6\xi} (e^{-\xi^2} - 1) + \eta \xi e^{-\xi^2} \quad (11)$$

ここで $\xi=r/b$ である．一方，噴流の横断面にわたって連続方程式(1)を積分すれば噴流/プルームの流量 Q に関する方程式が得られる．

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{d}{dz} \int_0^R 2\pi \bar{u} r dr = -2\pi R \bar{v} \Big|_{r=R} = 2\pi b \alpha \bar{u}_c \quad (12)$$

ここで R は噴流/プルームの実半径， $\alpha \bar{u}_c$ は連行速度と呼

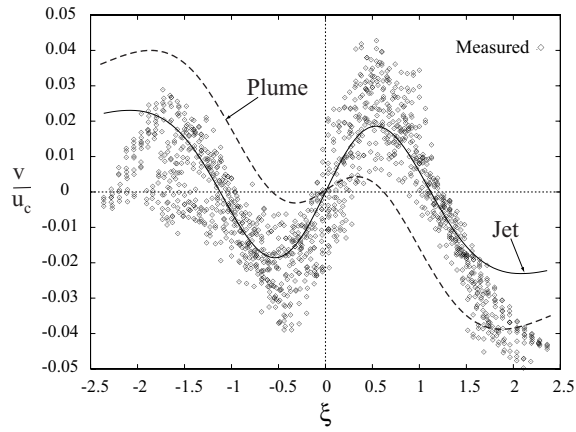


図-1 噴流とプルームの半径方向流速[データ¹⁷⁾]

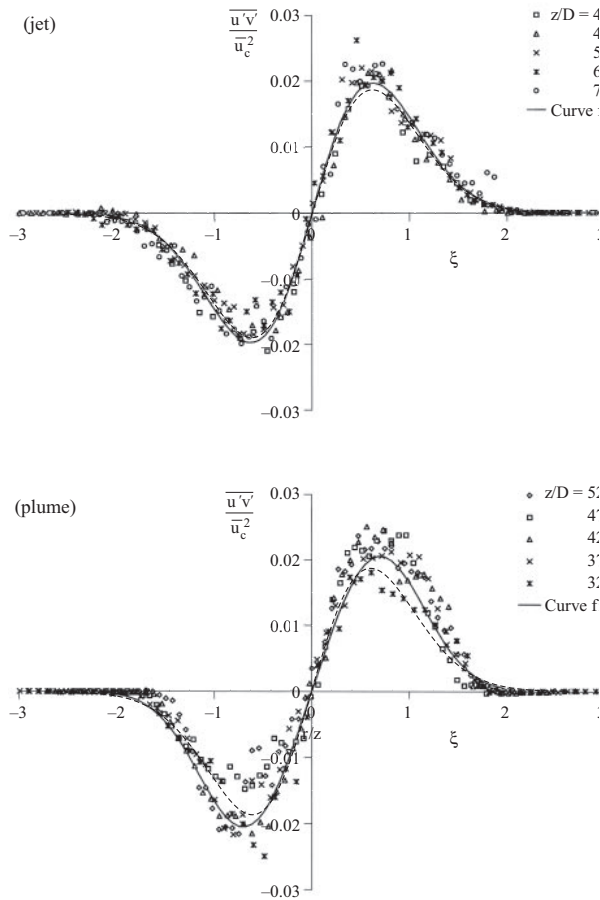


図-2 乱流せん断応力 $\overline{u'v'}$ [データ³⁾]

ばれ、いわば境界外から噴流軸に $\alpha \bar{u}_c$ の大きさで向かう速度²²⁾である。実際に式(12)と異なり次の表現が一般的である¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁹⁾²²⁾が、

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty 2\pi \bar{u} r dr = -2\pi \bar{r} \bar{v} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 2\pi b \alpha \bar{u}_c \quad (13)$$

この式は一種の誤解を与えかねない。噴流流量を求める時にガウス曲線近似(9)を用いる都合上、積分範囲の上限を R から ∞ に置き換えて近似的に積分していいが、 $r \bar{v}$ 項にまで積分範囲を R から ∞ に変えてはならない。実験環

境を満たす十分大きな水槽でも壁で $\bar{v} = 0$ のために $-r \bar{v} \Big|_{r \rightarrow \infty}$ は0となり連行がなくなってしまうからである。

$\bar{v}$ が $\bar{u}$ に比べ非常に小さいために高精度に計測することが難しく、プロファイルがわかるほど広範囲且つ高精度に計測されたものはFalcone&Cataldo¹⁶⁾、Agrawalら¹⁷⁾とChhabra¹⁸⁾のデータがあるぐらいである。式(10)と(11)で表される $\bar{v}$ はAgrawalら¹⁷⁾の噴流実験データと共に図-1にプロットされている。 $-1.5b < \xi < 1.5b$ の範囲で式(11)と実験データは凡そ一致するが、それを超えるとずれが大きくなる。計測データが逆対称でないことから、このずれは主にデータ精度の問題に起因すると思われる。図-1から中心軸に向かう速度は噴流よりプルームの方が大きいことが確認できる。これはプルームの連行係数が噴流のそれより大きいことに一致する。式(10)と(11)を式(12)に代入すれば連行係数 α がそれぞれ $\eta/2$ と $5\eta/6$ になり、 $\eta=0.105^3)$ とすれば α は0.0525と0.0875となりWang&Law³⁾の結果と一致する。よって、 α は半径を b とする前提条件があつての係数である。図-1のプルームと噴流の $v/\bar{u}_c$ が各自の連行係数に遠く及ばない事実からも、連行速度 $\alpha \bar{u}_c$ は実際に存在せず、特性幅 b と連携して $\alpha b \bar{u}_c$ の形で連行現象を記述する仮想的な速度と考えるべきである。

2) レイノルズ応力とスカラーの乱流流束

$(\overline{u'u' - v'v'}) \ll \bar{u}^2$ に注目して z 方向運動方程式(3)を積分すれば、乱流せん断応力 $\overline{u'v'}$ の近似式が得られる。

$$\overline{u'v'} \approx \frac{1}{r} \int_0^r g_\epsilon r dr - \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} r dr - \bar{u} \bar{v} \quad (14)$$

式(7), (9), (10)と(11)を代入すれば噴流とプルームにおける $\overline{u'v'}$ の式が得られる。

$$\frac{\overline{u'v'_j}}{\bar{u}_c^2} \approx \frac{\eta}{2\xi} (e^{-\xi^2} - e^{-2\xi^2}) \quad (15)$$

$$\frac{\overline{u'v'_p}}{\bar{u}_c^2} \approx \frac{\eta}{6\xi} [-2 - 3e^{-2\xi^2} + 5e^{-\xi^2} + (1 - e^{-\xi^2/\lambda^2}) 3\lambda^2 k_{pc} / k_{pu}^2] \quad (16)$$

式(16)は煩雑に見えるが、 $k_{pc}=11.3$, $k_{pu}=4.13^3)$ を適用すれば $3k_{pc}/k_{pu}^2=1.99 \approx 2$ 、さらに $\lambda=1$ を代入すれば

$$\overline{u'v'}_{plume} \approx \bar{u}_c^2 \frac{\eta}{6\xi} [-2 - 3e^{-2\xi^2} + 5e^{-\xi^2} + (1 - e^{-\xi^2/\lambda^2}) 2\lambda^2] \approx \overline{u'v'_j} \quad \text{let } \lambda=1 \quad (17)$$

となる。従って、プルームの λ を1に近い値と受け入れれば、 $\overline{u'v'}$ は噴流とプルームの間に違いがない。図-2に式(26)の結果(破線)と計測データ³⁾がプロットされている。最大値は0.6b近辺で得られ、中心と境界に近づくにつれ0にまで減衰する特徴が見られる。

$\overline{v'w'}$ ¹²⁾¹³⁾¹⁵⁾を踏まえれば、 $\overline{u'w'} \approx \overline{u'v'}$ となる。 $\partial \overline{u'w'}/\partial z$ が比較的小さいので θ 方向運動方程式(5)からこの項を省いて $\overline{v'w'}$ の r に関する偏微分方程式を解くと $\overline{v'w'} = C/r^2$ が得られる。 $r=0$ で $\overline{v'w'}$ が有限な値であるた

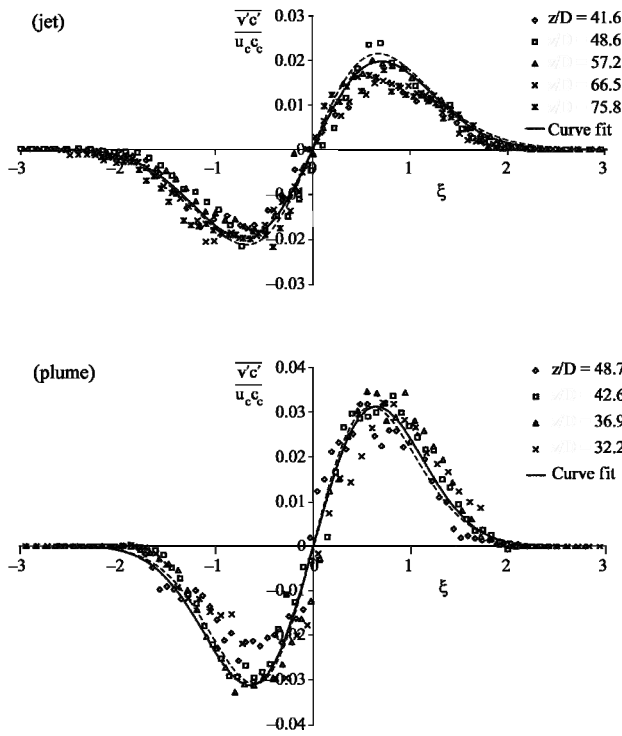


図-3 スカラーの半径方向乱流流束[データ³]

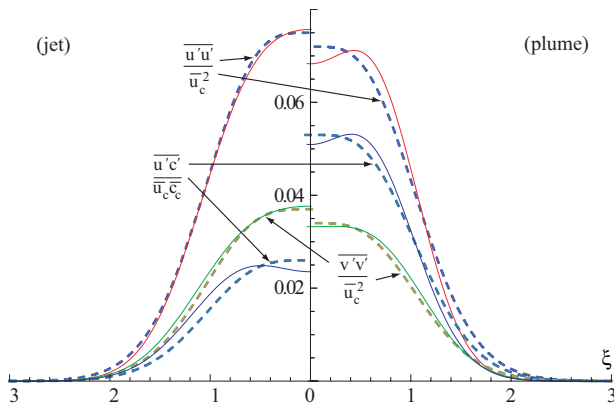


図-4 乱流直応力と軸方向乱流スカラー流束[データ³]

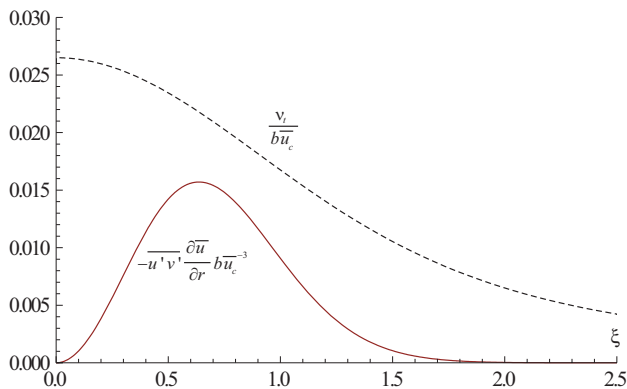


図-5 kの生成と\$v_i\$の半径方向変化[データ³]

め、定数Cは0でなければならず結局 $\overline{v'w'}=0$ となる。 v' と w' は同程度の乱れ強度を持ち、それぞれ u' と相関関

表-1 関数中の係数 m の値

f	$\overline{u'u'}/\overline{u_c^2}$	$\overline{v'v'}/\overline{u_c^2}$	$\overline{u'c'}/(\overline{u_c c_c})$
$m(\text{jet})$	0.075	0.037	0.026
$m(\text{plume})$	0.072	0.034	0.053

係があるが、両者は互いに依存せず無相関なのである。

$\overline{u'c'} \ll \overline{u_c c_c}$ を用いてトレーサ拡散方程式(2)を積分して半径方向乱流トレーサ流束 $\overline{v'c'}$ が求められる。

$$\begin{aligned} \overline{v'c'}_j &\approx -\frac{d}{rdz} \int_0^r \overline{u_c c_c} r dr - \overline{v_c c_c} \\ &= \overline{u_c c_c} \frac{\eta}{2\xi} (e^{-\xi^2/\lambda^2} - e^{-\xi^2(1+1/\lambda^2)}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\overline{v'c'}_p \approx \overline{u_c c_c} \frac{5\eta}{6\xi} (e^{-\xi^2/\lambda^2} - e^{-\xi^2(1+1/\lambda^2)}) \quad (19)$$

λ の違いを無視すれば噴流の値がプルームの3/5程度である。図-3に式(18), (19)の結果(破線)と計測データ³がプロットされている。なお、 λ は噴流に1.21, プルームに1を用いた。計算結果が計測データとよく一致している。なお、最大値は0.66b(jet)と0.58b(plume)で得られる。

残念ながら、レイノルズ平均方程式中に残っている $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{u'c'}$ は直接に導出する手立てがない。これらの共通点是对称分布である²³⁾¹⁰⁻¹⁵⁾。逆対称な $\overline{u'v'}$ 等は幅の異なるガウス曲線の重ね合わせであることから、推測的に、対称な $\overline{u'u'}$ 等もガウス曲線の重ね合わせと考えられる。 $\overline{u'v'}$ の式をベースに対称な波形を作り出す以下の関数形を仮定して

$$f \approx m(2e^{-\xi^2} - e^{-2\xi^2}) \quad (20)$$

計測データに一致するように係数 m を特定する。表-1にWang&Law³⁾の計測データに基づいて本研究で求めた m の値である。図-4に式(20)の計算結果(破線)と計測データ³から得た最適曲線(実線)をプロットしている。紙面節約のために対称性を利用して図の左側に噴流の、右側にプルームの曲線を示した。完璧な一致ではないが、全体的にバランスよく $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{u'c'}$ のプロファイルを表現できている。

3)乱流エネルギーとその生成項, 乱流粘性係数, 乱流シュミット数, 乱流プラントル数, 圧力平均値

式(20)と $v' \sim w'$ を利用して、乱流エネルギー k は

$$k/\overline{u_c^2} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + 2\overline{v'^2}) = m(2e^{-\xi^2} - e^{-2\xi^2}) \quad (21)$$

となる。表-1の係数で計算すれば m は噴流時0.075, プルーム時0.070となる。よって、噴流とプルームの乱流エネルギー k は各自の軸方向乱流直応力 $\overline{u'u'}$ と同程度である。また、乱流エネルギー方程式において k の生成項が次式で示されるが、

$$-\left[\overline{u'v'} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right) + \overline{u'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial r} + \frac{\overline{v'}}{r} \overline{w'^2} \right] \quad (22)$$

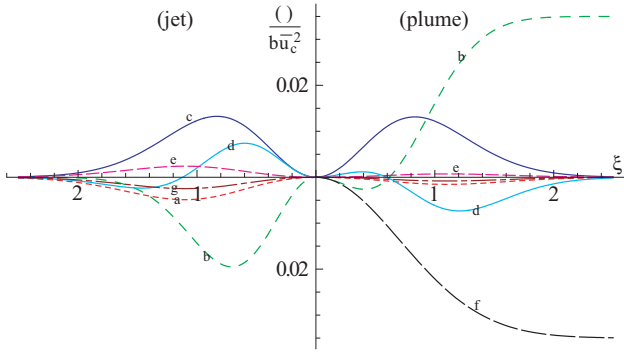


図-6 軸方向運動量輸送の収支[データ³⁾]

$\partial/\partial z \ll \partial/\partial r$ と $\bar{v} \ll \bar{u}$ を考慮すれば上式は近似的に $-\bar{u}'v'\partial\bar{u}/\partial r$ で表される．これは積分モデルを閉じるためにRouseら⁴⁾とPriestly&Ball⁵⁾が導入した力学的エネルギー方程式に現れる関数でもある．この関数は仮定されていたが，式(9)と(15)を用いて導出できる．

$$\text{Jet\&Plume} : -\bar{u}'v' \frac{\partial\bar{u}}{\partial r} b^1 \bar{u}_c^{-3} = \eta(e^{\xi^2} - 1)e^{-3\xi^2} \quad (23)$$

k の生成項もまたガウス関数の重ね合わせである．図-5に $\eta=0.105^3)$ として式(23)の結果がプロットされている．最大値は $0.63b$ で得られ，中心と境界に近づくにつれ0にまで減衰する．

ブーシネスクの渦粘性モデルに従えば

$$-\bar{u}'v' = v_t \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} \right) \approx v_t \frac{\partial\bar{u}}{\partial r} \quad (24)$$

よって，渦動粘性係数 v_t が次のように求められる．

$$v_{ij} = -\bar{u}'v' \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} \right)^{-1} = b\bar{u}_c \frac{\eta}{4\xi^2} (1 - e^{-\xi^2}) \quad (25)$$

$$v_{ip} = \frac{b\bar{u}_c \eta}{12\xi^2} (5 - 3e^{-\xi^2} - 2e^{\xi^2(1-1/\lambda^2)}) \approx v_{ij} \quad (26)$$

ブルームの $\lambda=1$ を受け入れれば，乱流せん断応力と同様に渦粘性係数も噴流とブルームの間に差がない． $r=0$ として式(7)と $b=\eta z$ を代入すれば，中心軸位置の v_t は z^0 (jet), $z^{2/3}$ (plume)に比例して変化することがわかる．図-5に渦動粘性係数の半径方向分布を示している．渦動粘性性は $r=0$ で最大値 0.026 になり， $r=2.5b$ で最大値の $1/5$ 以下に減衰している．

勾配拡散モデルによりスカラーの半径方向乱流流束は

$$-\bar{v}'c' = \frac{v_t}{S_{ct}} \frac{\partial\bar{c}}{\partial r} \quad (27)$$

で近似される．噴流の既知量を代入すれば，噴流の乱流シュミット数が $S_{ct}=\lambda^{-2}$ と求められる． $\lambda=1.21$ を代入すれば $S_{ct}=0.68$ となりKiser²³⁾の 0.68 に一致する． c を t に置き換えてブルームの既知量を代入すればブルームの乱流プラントル数が $P_{tr}=3\lambda^2/5$ と求められ， $\lambda=1$ として $P_{tr}=0.6$ となり，Kataoka&Takami²⁴⁾の 0.60 に一致する． λ にばらつきがあるように，乱流シュミット/プラントル数にも研究者間でばらつきがあるのは当然であるが，本研究の式か

らブルームの方が噴流より少し小さいと判断できよう．

r 方向運動方程式(4)において， $\partial/\partial z$ の項と $\partial(r\bar{v}^2)/\partial r$ のオーダーが比較的小さいのでそれらを省略すると，

$$\frac{\partial\bar{p}}{\rho_a \partial r} \approx -\frac{\partial\bar{v}'v'}{\partial r} \quad (28)$$

が得られる．式(6)と合わせると $\bar{p}$ の式が導出される．

$$-\frac{\bar{p}}{\rho_a \bar{u}_c^2} \approx \frac{\bar{v}'v'}{\bar{u}_c^2} \quad (29)$$

よって，式(29)は図-4の $\bar{v}'v'/\bar{u}_c^2$ 曲線に凡そ一致する．

$r=0$ として式(7)と $b=\eta z$ を代入すれば，圧力 $\bar{p}$ は軸方向で z^{-2} (jet), $z^{-2/3}$ (plume)に比例して変わることがわかる．

噴流中心軸を中心に厚さ ds ，半径 r となるコントロールボリュームを出入りする運動量の収支を考えて，式(3)を横断面で0から r まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_0^r \bar{u}^2 r dr + \frac{d}{dz} \int_0^r \bar{u}'u' r dr - \frac{d}{dz} \int_0^r \bar{v}'v' r dr \\ + r\bar{u}\bar{v} + r\bar{u}'v' - \int_0^r g_e r dr = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となる． $b\bar{u}_c^2$ で割り無次元化して各項の半径方向分布を図-6に示す．なお，図中のa, b, c, d, e, fとg曲線はそれぞれ式(30)左辺の第2, 1, 5, 4, 3, 6項とその合計(エラー)を表す．噴流の場合， $\bar{u}^2$ 流束の軸方向変化率(b曲線)が， $r\bar{u}'v'$ (c曲線)と大体つりあっている．一方，ブルームの場合，浮力項(f曲線)が $r < b$ で $r\bar{u}'v'$ とつりあい， $r=b$ 以遠からb曲線とつりあっている構図である．b曲線は噴流とブルームで，正負が逆転するだけでなく，曲線形も大きく異なる．浮力に駆動されるブルームと運動量のみの噴流との根本的な違いはここにある．エラー曲線gが理論値ゼロではないが，半径方向にわたって非常に小さい．紙面の関係で図を載せないが，受動スカラーおよび r と θ 方向運動量の収支図は噴流とブルームの間に図-6ほどの大きな差異がなく，いずれもエラーが非常に小さい．エラーが小さいことは本研究の導いた関数がレイノルズ平均方程式をほぼ満たしている証である．

因みにAliら²⁵⁾が k と ε の分布を仮定してレイノルズ応力の近似解を非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いて求めている．そのモデルにモデル定数が多く式も複雑であるが，渦巻き噴流へ容易に拡張できる長所を持つ．ただ，拡張性を考えず近似解にだけ着目するなら， k と ε の分布を仮定しない本研究は，パラメータが少なく式も極めてシンプルであり，解には信頼性・実用性が高いと判断される．

6. まとめ

本研究は噴流とブルームのレイノルズ平均方程式を，流速・濃度等の軸方向減衰特性と半径方向自己相似性に基いて積分法を用いてその乱流特性を解析的に導出し分析した．得られた主な知見は

1) 連行速度は周囲流体を噴流内に連行する実速度では

なく、噴流半径を b と想定した仮想的な速度である。また、連行速度と幅 b の積は $-R\bar{v}|_{r=R}$ の置き換えであり、 $(-r\bar{v})|_{r\rightarrow\infty}$ は一種のミスリーディングである。

2) 乱流せん断応力と半径方向乱流スカラー流束の関数は境界層近似の下で導出された。乱流直応力と軸方向乱流スカラー流束は乱流せん断応力の関数形を逆対称から対称に変形して推測的に求められた。乱流せん断応力は噴流とプルームの間に差がほとんどなく、乱流直応力は噴流の方がわずかに大きい。一方、乱流スカラー流束 $\overline{u'c'}$ と $\overline{v'c'}$ はプルームの方が大きく、それぞれ噴流の2倍と1.7倍である。

3) 乱流エネルギー k は $\overline{u'u'}$ とほぼ同じである。 k の生成は噴流とプルームの間に差がほとんどなく、最大値位置は $\overline{v'c'}$ 、 $\overline{u'v'}$ と大体同じで、 $0.58\sim 0.66b$ の区間にある。

4) 圧力 $\bar{p}$ は凡そ $-\rho_a\overline{v'v'}$ と同じ大きさで、軸方向で噴流の場合 z^{-2} 、プルームの場合 $z^{-2/3}$ のペースで変化し、半径方向で $-\overline{v'v'}$ のプロファイルに相似する。

5) 噴流の乱流シュミット数は0.68、プルームの乱流プラントル数は0.6程度である。

6) 渦動粘性係数は噴流とプルームの間に大差がなく、軸方向で噴流の場合 z^0 、プルームの場合 $z^{2/3}$ に比例して増加する。半径方向は中心軸で最大値 $0.26b\bar{u}_c$ となり、 $r=2.5b$ で軸値の1/5以下にまで減衰する。

7) z 方向運動量の収支から、噴流とプルームが明らかに異なる流れ構造を有することが確認できる。噴流は $\bar{u}^2$ の項が $\overline{ru'v'}$ 項と大体均衡するのに対して、プルームはこの両者が一緒になって浮力項と均衡する構図である。

8) 横断面での自己相似性はよく知られている軸方向流速と濃度にだけでなく、あらゆる量に認められる。

参考文献

- 1) Fischer, H. B., List, J. H., Koh, R. C. Y., Imberger, J., and Brooks, N. H.: Mixing in inland and coastal waters, Academic Press, New York, 1979.
- 2) Papanicolaou, P. N., and List, E. J.: Investigations of round vertical turbulent buoyant jets, J. Fluid Mech., Vol. 195, pp.341-391, 1988.
- 3) Wang, H., and Law, A. W.-K.: Second-order integral model for a turbulent buoyant jet, J. Fluid Mech., Vol. 459, pp. 397-428, 2002.
- 4) Rouse, H., Yih, C. S., and Humphreys, H. W.: Gravitational convection from a boundary source, Tellus, 4, pp.201-210, 1952.
- 5) Priestley, C. H. B. and Ball, F. K.: Continuous convection from an isolated source of heat, Q. J. R. Met. Soc.81, pp.144-157, 1955.
- 6) Morton, B. R., Taylor, A. G., and Turner, J. S.: Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Journal of the Royal Society of London, A234, pp. 1-23, 1956.
- 7) Fan, L.-N., and Brooks, N. H.: Discussion of "Horizontal jets in stagnant fluid of other density," Proc. ASCE, J. Hydr. Div., HY2, pp.423-429, March 1966.
- 8) Fan, L. N., and Brooks, N. H.: Numerical solutions of turbulent buoyant jet problems, Report No. KH-R-18, Calif. Inst. of Technology, Pasadena, Calif., 1969.
- 9) List, E. J.: Mechanics of turbulent buoyant jets and plumes, Turbulent Buoyant Jets and Plumes(ed. W. Rodi), pp.1-68, 1982.
- 10)Wynanski, I. and Fiedler, H.: Some measurements in the self-preserving jet, J. Fluid Mech., 38, pp.677-612, 1969.
- 11)George, W. K., Jr. and Alpert, R. L.: Turbulence measurements in an axisymmetric buoyant plume, Intl J. Heat Mass Transfer 20, pp.1145-1154, 1977.
- 12)Panchapakesan, N. R., and Lumley, J. L.: turbulent measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet, J. Fluid Mech. 246, pp.197-223, 1993.
- 13)Panchapakesan, N. R., and Lumley, J. L.: turbulent measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Helium jet, J. Fluid Mech. 246, pp.225-247, 1993.
- 14)Shabbir, A., and George, W. K.: Experiments on a round buoyant plume, J. Fluid Mech. 275, pp.1-32, 1994.
- 15)Hussein, H. J., Capp, S. P., and George, W. K.: Velocity measurements in a high-Reynolds-depth, J. Fluid Mech., 94, pp.275-304, 1994.
- 16)Falcone, A. M. and Cataldo, J. C.:Entrainment velocity in an axisymmetric turbulent jet, Trans. ASME, 125, pp.620-627, 2003.
- 17)Agrawal, A. Sreenivas, K. R. and Prasad, A. K.: Velocity and temperature measurements in an axisymmetric turbulent jet with cloude-like off-sorece heating, Intl J. Heat Mass Transfer 47, pp.1433-1444, 2003.
- 18)Chhabra, S, Shipman, T. N. and Prasad, A. K.: the entrainment behavior of a turbulent axisymmetric jet in a viscous host fluid, Experiments in Fluids 38, pp.70-79, 2005.
- 19)Hirst, E. A.: Analysis of round, turbulent, buoyant jets discharged to flowing stratified ambients, ORNL-4685, ORNL, 1971.
- 20)Chen, J. C., and Rodi, W.: turbulent buoyant jets - A review of experimental data, Pergamon, 1980.
- 21)Tenekes, H., and Lumley, J. L.: A first course in turbulence, MIT Press, Cambridge, MA, pp.127-142, 1972.
- 22)Turner, J. S.: Turbulent entrainment: the development of the entrainments assumption, and its application to geophysical flows, J. Fluid Mech., 173, pp.431-471, 1986.
- 23)Kiser, K. M.: Material and momentum transport in axisymmetric turbulent jets of water, AIChE J., 9(3), pp.386-390, 1963.
- 24)Kataoka, K. and Takami, T.: Experimental study of eddy diffusion model for heated turbulent free jets, AIChE J.,23(6),pp.889-896, 1977.
- 25)Ali, M.S., Hosoda, T.,Kimura,I. and Onda,I.: Approximate Solution for an Axisymmetric Swirling Jet Using Non-Linear k-EPsILON. Model with Consideration of Realizability, J. Appl. Mech. JSCE, Vol.9, pp.821-832, 2006.

(2008. 9. 30受付)