

# 変分原理を用いた河床波上の流れの 再現とその適用性

## REPRODUCTION OF A FLOW OVER SAND WAVES USING VARIATIONAL PRINCIPLE AND ITS APPLICABILITY

中山恵介<sup>1</sup>・堀松大志<sup>2</sup>・柿沼太郎<sup>3</sup>・菅原庸平<sup>4</sup>・丸谷靖幸<sup>4</sup>・鯉目淑範<sup>5</sup>  
Keisuke NAKAYAMA, Daishi HORIMATSU, Taro KAKINUMA, Yohei SUGAWARA,  
Yasuyuki MARUYA and Yoshinori YONOME

- <sup>1</sup>正会員 工博 北見工業大学教授 工学部 社会環境工学科 (〒090-8507 北見市公園町165番地)  
<sup>2</sup>学生会員 北見工業大学大学院 土木開発工学専攻 (〒090-8507 北見市公園町165番地)  
<sup>3</sup>正会員 博(工) 鹿児島大学准教授 工学部 海洋土木工学科 (〒890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)  
<sup>4</sup>学生会員 北見工業大学工学部 社会環境工学科 (〒890-0065 北見市公園町165番地)  
<sup>5</sup>正会員 工修 北見工業大学助教 工学部 社会環境工学科 (〒090-8507 北見市公園町165番地)

This paper describes applicability of a new model for solving flow field over sand waves by using strongly nonlinear strongly dispersive internal wave equations, based on a variational principle. For the case when the ratio of mean water depth and wave length is about 1/4, non-linear effect is found to play a great role in surface water level and velocities over sand waves. Dispersion relation is also revealed to influence them when Froude number is about 0.9. Laboratory experiment results are used to understand how a new model works for solving flow field for the case when a supercritical flow is given in an open channel over dunes. It is revealed that a new model reproduces high frequency components in terms of the comparisons of the number of vertically distributed functions.

**Key Words:** Surface waves, Variational principle, Fully-nonlinear, Strong dispersivity, Sand waves  
Supercritical flow

### 1. はじめに

水圏における環境保全の観点から、河道における水質環境の改善、生態系システムの維持等は、緊急に解決されなくてはならない問題であると考えられる。その中で河道内に発生する瀬と淵は、多様な生物の生息域として重要であることが知られており、その形成・維持メカニズムを理解することが必要とされている<sup>1)</sup>。瀬と淵は、ある流量以上の支配流量により卓越して形成されていると考えられる。そのような流れが発生する場合には、特に山地部において、瀬と淵の波長に比較して水深が大きくなり、一般的に河道の流れの再現に用いられている浅水近似されたモデルでは適用限界があることが報告されている<sup>2)3)4)5)</sup>。

このような問題は、瀬と淵における流れの再現だけでなく、砂堆の形成において流れを考慮する際の砂堆・反砂堆の区分においてもみられる。河床波1波長分の平均水深が河床の波長の1/15以上になる場合、表面波の波速の推定に分散関係を考慮し、常流・射流の判定を行う必

要がある<sup>6)7)8)</sup>。

以上のような問題を解決するためには、非静水圧の効果を考慮し、分散関係を再現できるモデルを利用する必要がある。そのような方法の一つとして、3次元モデルを用いて再現する手法が考えられる<sup>9)10)</sup>。しかし、計算機容量の問題から、再現範囲が限られてしまい、3次元モデルを用いることは現実的ではないと考えられる。

そこで、計算容量が小さいものとして、水深積分型のブシネスクタイプの波の方程式<sup>11)</sup>を用いる方法が挙げられる。しかし、ブシネスクタイプの波の方程式は弱分散性の再現しか出来ず、また、水平流速の鉛直分布を知ることが出来ない。一方、水深積分型であるが、流速の鉛直分布をより正確に考慮し、波の強分散性を再現出来るモデルとしては、灘岡・中川<sup>12)</sup>や磯部<sup>13)</sup>が挙げられる。灘岡・中川による方法は、卓越する波長を事前に調べて与えることにより、進行性表面波の高い再現性が効率的に得られることが分かっている。ただし、瀬や淵における卓越波長を事前に知ることは困難である。また、磯部による方法では、勾配を有する水底に沿った流速の、波

動への影響に関する検討が過去の研究において十分に行われていない。

その他、河床波の再現に注目した水深積分型の方程式を用いる手法が存在する<sup>14) 15) 16)</sup>。例えば砂堆の発生・発達過程を再現できることが報告されている。しかし、ポテンシャル流の再現は、解析対象である河床波上周辺への注目のみであり、水深方向全域におけるポテンシャル流の再現を考慮するものではない。

本研究の最終目的は瀬と淵を形成するような洪水時における流れの再現を行うことを最終目的とする。洪水時における瀬淵上の流れを正確に再現するには分散関係と渦の効果を考慮しなければならない。しかし、両者の問題を同時に解決することは困難であり、本論文では最初の段階として強分散関係についての検討を行うこととする。これまで著者らは、磯部の表面波モデルを発展させ、大きな地形変化における任意波長の強分散関係を再現できるモデルとして、強非線形強分散内部波方程式モデル<sup>17) 18)</sup>を開発してきた。内部波方程式の適用範囲は広く、単層の流体運動を対象とする問題へは、上層を空気、下層を水と考えることで適用出来る。本研究では、この強非線形強分散内部波方程式モデルを用いて、これまで再現が困難であった、平均水深が河床の波長の1/15以上であるような場合における流れの再現を試み、その適用性を検討する。

## 2. 強非線形強分散内部波方程式

強非線形強分散内部波方程式においては、非静水圧の効果が考慮されており、また、強分散関係を高精度に再現するために、速度ポテンシャルの概念が利用されている。基本的には多層の方程式であり、 $i$ 層目の界面における変位を  $z = \eta_{i,j}$  ( $j=0$  : 各層での上の界面,  $j=1$  : 各層での下の界面), そこでの圧力を  $p_i(x,t)$  とすると、 $i$ 層目における汎関数は以下の式で与えられる。

$$F_i[\phi_i, \eta_{i,j}] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{p_{i-j} + P_i}{\rho_i} \right\} dz dA dt \quad (1)$$

$$P_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k \quad (2)$$

ここで、 $\phi_i$  :  $i$ 層における速度ポテンシャル,  $g$  : 重力加速度,  $\rho_i$  :  $i$ 層の密度,  $p_i$  :  $i$ 層下面の圧力, である。

流速ポテンシャルの再現のために、べき乗で展開される式(3)を用いることとする。

$$\phi_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} Z_{i,\alpha} \{z, h_i(x)\} f_{i,\alpha}(x, t) \equiv Z_{i,\alpha} f_{i,\alpha} \quad (3)$$

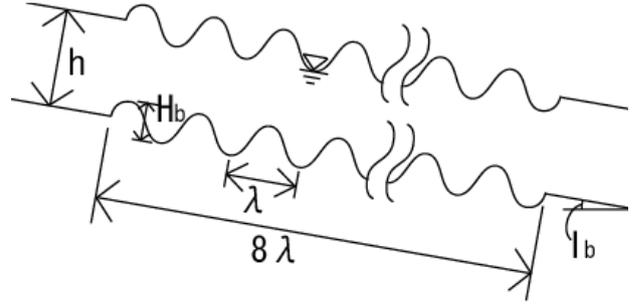


図-1 正弦波を河床波として与えた場合の計算領域。

表-1 正弦波を河床波として与えた場合の計算条件

	流量 Q(m <sup>3</sup> /s)	水路長 (m)	河床波 Hb(m)	河床波長 λ(m)
case1	0.003	9	0.020	0.6
case2	0.003	3	0.020	0.2
case3	0.003	3	0.003	0.2
case4	0.030	3	0.020	0.2

ここで、 $Z_{i,\alpha}$  :  $i$ 層目における $\alpha$ の鉛直分布関数,  $f_{i,\alpha}$  :  $i$ 層目における $\alpha$ に対する重み,  $\alpha$ とはべき乗で展開された式(3)の項数に対応し、 $\alpha=0$ のとき水面から底面まで流速一定という長波の条件となる。本論文では、 $\alpha=0, 1, \dots, N-1$ を次数1, 2,  $\dots, N$ と定義する。

式(3)を式(1)に代入することにより、以下に示されるオイラー-ラグランジアン方程式が得られる。これが、強非線形強分散内部波方程式である。

$$Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,0}} \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla \left( \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} Z_{i,\alpha} Z_{i,\beta} dz \nabla f_{i,\beta} \right) - \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial Z_{i,\alpha}}{\partial z} \frac{\partial Z_{i,\beta}}{\partial z} dz f_{i,\beta} = 0 \quad (4)$$

$$Z_{i,\beta}^{\eta_{i,j}} \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} Z_{i,\beta}^{\eta_{i,j}} Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,j}} \nabla f_{i,\beta} \nabla f_{i,\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,j}}}{\partial z} \frac{\partial Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,j}}}{\partial z} f_{i,\beta} f_{i,\gamma} + g \eta_{i,j} + \frac{p_{i-j} + P_i}{\rho_i} = 0 \quad (5)$$

本研究では、表面波に着目した再現を行うため2層のみ考慮し、上層を空気、下層を水とする。鉛直分布関数を式(6)のように定義することにより、最終的に上層の方程式(7)、(8)と下層の方程式(9)、(10)が得られる。上層の方程式：

$$Z_{i,\alpha} = z^\alpha \quad (6)$$

$$\eta^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla (\eta^{\alpha+\beta+1} \nabla f_{i,\beta}) - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} \eta^{\alpha+\beta-1} f_{i,\beta} = 0 \quad (7)$$

$$\eta^\beta \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla f_{i,\gamma} + \frac{\beta\gamma}{2} \eta^{\beta+\gamma-2} f_{i,\beta} f_{i,\gamma} + g \eta + \frac{p_1}{\rho_1} = 0 \quad (8)$$

下層の方程式：

$$\eta^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \left\{ (\eta^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_{2,\beta} \right\} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} (\eta^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1}) f_{2,\beta} = 0 \quad (9)$$

$$\eta^\beta \frac{\partial f_{2,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{2,\beta} \nabla f_{2,\gamma} + \frac{\beta\gamma}{2} \eta^{\beta+\gamma-2} f_{2,\beta} f_{2,\gamma} + g\eta + \frac{p_1 + (\rho_2 - \rho_1)gh_1}{\rho_2} = 0 \quad (10)$$

鉛直分布関数の再現次数を高くすることにより、強非線形強分散表面波の再現を行うことが出来る。これまでの研究で、次数6までを考慮することにより、微小振幅における分散関係を完全に再現することが出来ることが報告されている。ちなみに、次数を1つのみ考慮した場合、通常河川の流れの再現に用いられる長波近似された浅水流方程式による解が再現される。式(7)から式(10)までを解く計算スキームについては、Kakinuma・Nakayama<sup>17)</sup>を参考にいただきたい。

### 3. 正弦波で与えられる河床波上の流れの検討

河床波の振幅、波高が変化することにより、水面形がどのように現れるかを検討するために、図-1に示されるような正弦波で再現される河床波上での流れの検討を行った。

#### (1) 計算領域と条件

図-1に示される計算領域を600のメッシュで区切り、両端に波長に応じた距離の一定勾配を持った河床を与え、その中央に8ヶ分の河床波を設置した。1つの河床波は40のメッシュにより再現されるものとし、ブシネスク方程式等を利用して波を再現する場合に最低必要であるといわれる30ヶのメッシュ数より多くした。上流端の境界条件は水位一定、流速は放射条件を与え、下流端は水深、流速ともに放射条件を与えた。水路幅は0.3mとした。表面波に対する検討であるため、2層における上層には密度1.000kg/m<sup>3</sup>、下層には1000kg/m<sup>3</sup>を与えた。CFL条件は0.2程度を与えた。

計算では、上流における一定勾配河床から正弦波で再現される河床への変化点、および下流におけるその逆の変化点において、特殊な波が発生したため、河床波上での流れの検討には、その影響のない中央における4から5波長目の河床波上の流れを検討対象とした。計算は、定常状態に達するまで行われた。本研究で対象とした流れの条件は、表-1に示されるとおりのものであり、それらの条件を与えた意義については、各節において詳細を記す。

#### (2) 長波近似可能領域近辺における検討 (case 1)

河床波の波長が水深に比して大きな場合、長波近似を利用することが出来、通常のフルード数による水面波の評価を行うことが出来る。本節では、水深波長比に1/12、

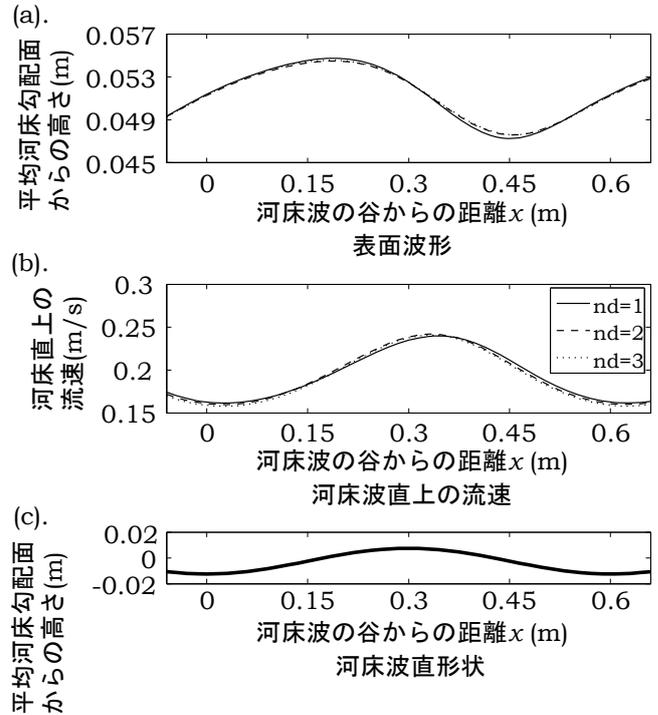


図-2 case 1 の計算結果

(a) 表面波形 (b) 河床波直上の流速  
(c) 河床波形状

河床波の振幅に0.020m、フルード数約0.28を与えることにより、河床波と1/4波長程度ズレた逆位相の水面形が、本モデルを利用することにより再現されることを確認した(図-2)。α=0、次数1の場合、本論文で用いている方程式は弱非線形の長波方程式となる。そのため、長波近似した方程式を用いても1/4波長程度ズレを再現することが出来たと考えられる。その傾向は次数を大きくしてもほぼ変わりなく、水深波長比が1/12である場合、長波近似でも比較的再現性が良いことが確認された(図-2)。

#### (3) 水深波長比が1/4およびフルード数が0.28での検討 (case 2 & case 3)

続いて、前節と同じフルード数0.28を与え、水深波長比を1/4まで増加した場合における再現計算を行った(case 2: 図-3)。その際、河床波の波高は前節のケースと同様な0.020mを与えた。次数1である長波近似のケースにおいては、フルード数が0.28であるため、河床波と1/8波長程度ズレた逆位相の水面波が発生することが確認された。次数が2以上になると同様に逆位相の水面形が現れるが、位相が大きく異なっていた(図-3b)。そのため、河床波直上の流速のピークに位相差が生じることとなり、流砂量の計算などにおいて重要な違いが現れる可能性が示された。

case 2では、河床波の振幅を大きく与えたため、水深波長比に1/4を与えたことによる影響と、どちらが強く現れたか不明である。そこで以上の2つの要因のうち、どちらが主たる要因であるかを究明するために、河床波の振幅を0.003 mとし再現計算を行った(case 3: 図-4)。

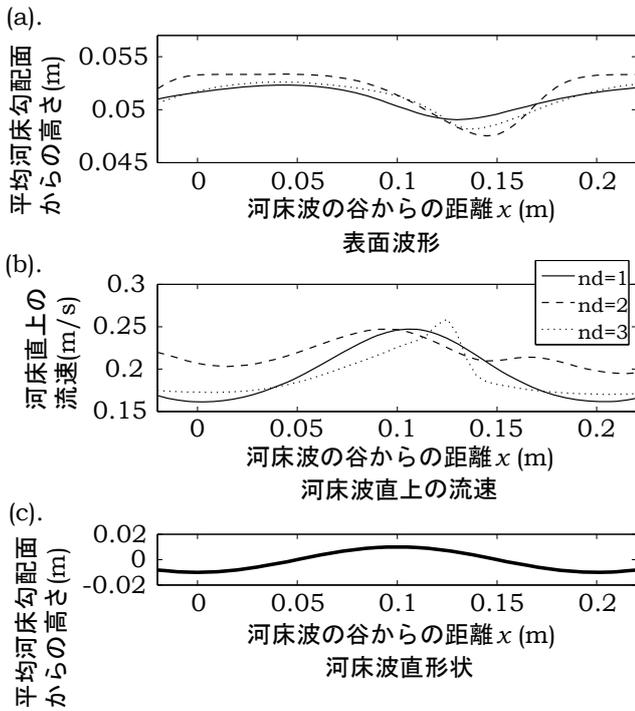


図-3 case 2 の計算結果

- (a) 表面波形 (b) 河床波直上の流速  
(c) 河床波形状

振幅が小さくなったことにより、case 2で見られたような流速の大きな変化は見られなくなったが、位相の違いは残ったままであった。過去の研究に示される通り<sup>6)7)8)</sup>、位相を正確に再現することは河床波形状を再現する上で重要であり、河床波の振幅が小さくなった場合でも、水深波長比が大きい場合には長波近似されたモデルでは再現が不十分であることが分かった。

#### (4) 水深波長比が1/4およびフルード数が0.55での検討 (case 4)

前節で、水深波長比が大きく河床波の振幅が大きい場合には、長波近似では十分な再現が行われず、水位や流速と河床波との位相は水深波長比が大きく関与していることが示された。つまり分散関係の高精度な再現が、位相の再現につながるということが分かった。そこで本節では、分散関係による影響が大きく出る場合、つまり長波近似した際のフルード数が1以下であり、分散関係を考慮した際のフルード数が1以上である場合における流れ場の変化に対する検討を行った。case 2において流量を3 l/sから30 l/sへと増加させ、平均流速を約0.67 m/sとした(case 4)。長波近似による波速は1.2 m/sであり、分散関係を考慮した波速は0.56 m/sであるため、分散関係を考慮できる次数2以上である場合、長波近似である次数1と大きな違いが現れることが期待される。

次数1である場合、波速が平均流速よりも大きいため、いわゆる常流状態の河床波と逆位相の表面波が再現された(図-5)。その結果を次数2以上と比較すると、その差は明らかであった。次数2以上である場合、分散関係を

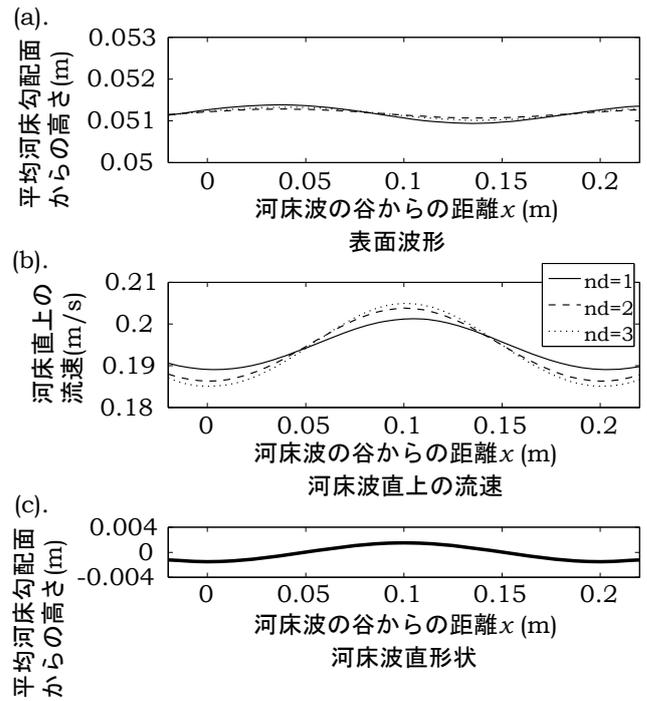


図-4 case 3 の計算結果

- (a) 表面波形 (b) 河床波直上の流速  
(c) 河床波形状

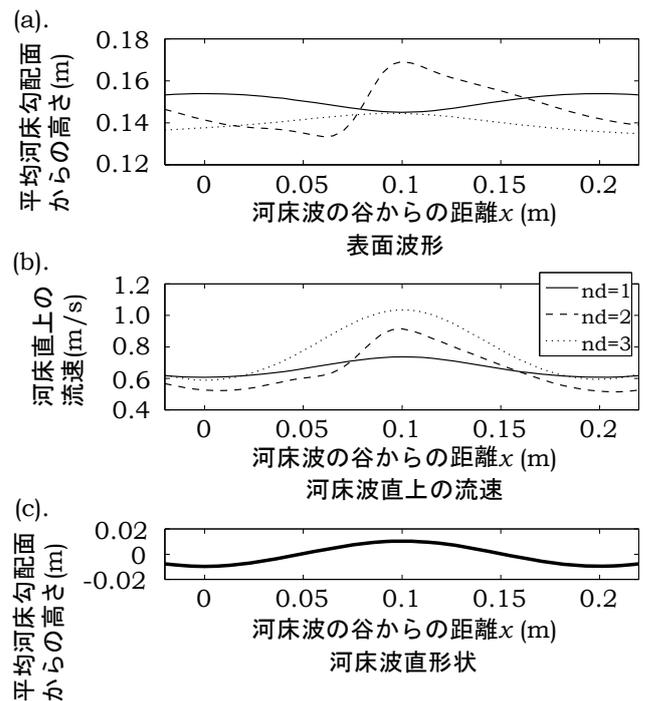


図-5 case 4 の計算結果

- (a) 表面波形 (b) 河床波直上の流速  
(c) 河床波形状

考慮することが出来るため、波速は平均流速よりも遅くなり、河床波と同位相の表面波が発生し易くなる。

本研究で提案している強非線形強分散内部波方程式の大きな特徴は、流速の鉛直分布を把握することが出来る点である。そこで河床波上の鉛直流速分布を計算した

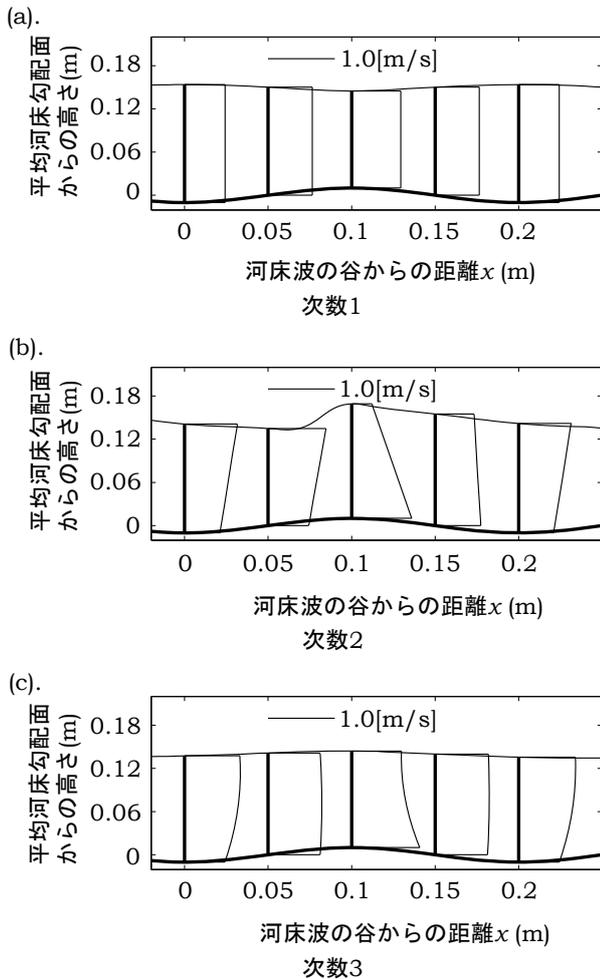


図-6 case 4での河床波上における流速の鉛直分布  
(a) 次数1 (b) 次数2 (c) 次数3

(図-6). 長波近似である次数1では、鉛直方向に一様な水平流速が再現されていることが確認された。次数2以上になると、峰における流速の増大、谷における流速の減少が再現されており、ポテンシャルの特徴を良く再現できている。以上の結果より、河床波の波長が水深に比して小さい場合、本研究では1/4の場合、長波近似による再現には大きな限界があり、少なくともブシネスクタイプ方程式に対応する、次数2または次数3を用いた再現計算を行う必要があることが分かった。

#### 4. 河床波上の流れの再現

本研究で提案している強非線形強分散内部波方程式が河床波上の流れ場をどの程度再現できるかを検討するために室内実験を行ない、その再現性を検討した。室内実験はフルード数を常流状態から射流状態まで考慮して行ったが、紙面の都合上、フルード数で判断すると常流であるが、分散関係を考慮して修正されたフルード数を用いると射流となるケースについて報告する。流量12 l/s, 幅0.3 m, 勾配1/357, 流路長15 m, 河床波の振幅0.008m, 河床波波長0.2m, 河床波の波長に40メッシュ、を与えて

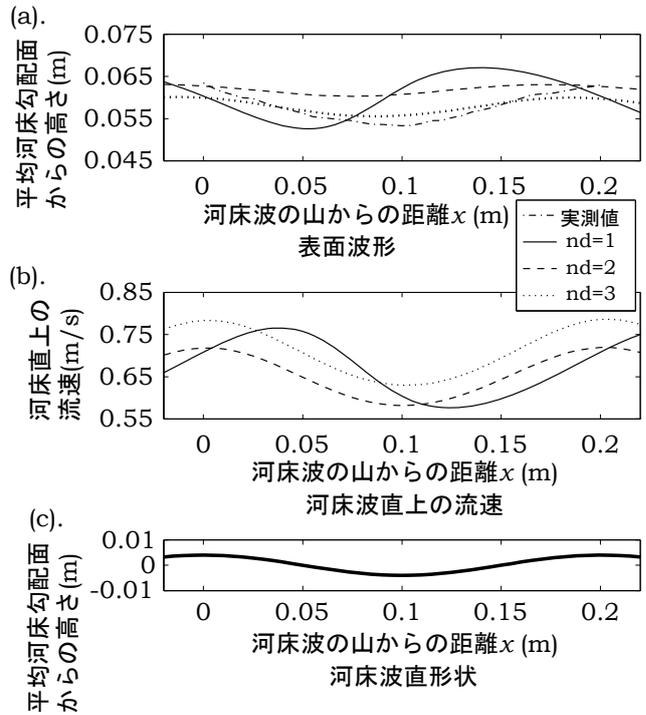


図-7 室内実験の再現結果  
(a) 表面波形 (b) 河床波直上の流速  
(c) 河床波形状

室内実験と再現計算を行った。

まず、水位に関する検討を行った(図-7)。長波近似である次数1の場合、河床波と逆位相の水面形が再現されており、全く一致しなかった。次数2の場合、分散関係を考慮できており、河床波と同位相の水面形を再現できていたが、全体的に水深が大きく評価されていた。次数3の場合はほぼ室内実験結果を再現できており、本ケースでは次数3においてのみ十分な再現精度を持つことが分かった。

本研究では渦の効果を見逃してモデルを構築しているため、実際には底面から発生する渦により流速分布が影響を受けており、流速の実験と数値計算の直接比較を行うことは出来ない。そこで、次数が変化することによる流速分布形状の変化について、数値計算結果を利用して検討した(図-8)。峰における流速の増大、谷における流速の減少が再現されており、ポテンシャルの特徴を良く再現できていることが分かる。次数1と比較し、この点が次数3における水面形の良好な再現性につながったものと考えられる。

#### 5. おわりに

変分原理に基づく強非線形強分散内部波方程式を利用して、河床波上における流れを再現し、その結果の検討を行い、以下のような結論を得た。

- (1) 強非線形強分散内部波方程式モデルを用いて水深河床波波長1/12の再現計算を行い、常流状態である場合、

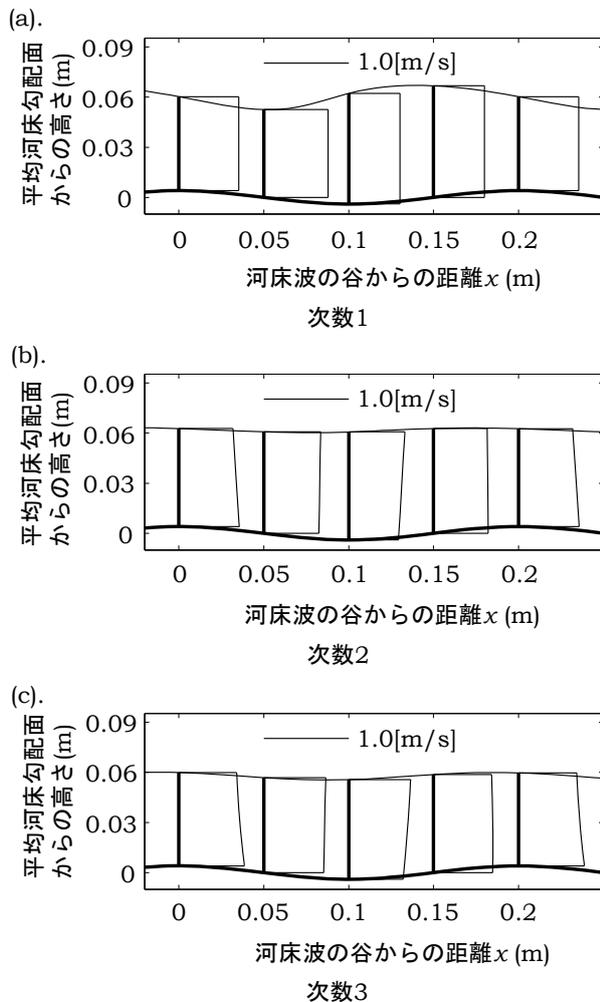


図-8 室内実験の再現での河床波上における流速の鉛直分布

(a) 次数1 (b) 次数2 (c) 次数3

次数3までの間で、逆位相の表面波が再現されることが確認された。また、常流状態であっても水深河床波波長が1/4である場合、河床波と表面波の位相差が大きく現れることが分かった。

(2) 長波近似だと常流であるが、分散関係を考慮することにより波速が流速よりも小さくなる場合においては、最低でも次数2以上を用いた再現計算を行うことが必要であることが分かった。

(3) 河床波上の流れを室内実験により計測し、水面形について数値計算結果との比較を行い、次数が大きくなることによる再現性の向上が確認された。

最後に、河床波の背後では渦の生成による死水域が発生しており、強非線形強分散内部波方程式がポテンシャル流れを再現するものであることから、その再現性に限界があることを記しておく。但し、柿沼・中山<sup>18)</sup>に示されている通り、渦度を考慮した強非線形強分散内部波方程式とその解法が既に提案されており、今後、この手法を適用した鉛直断面内における渦度の再現を試みる予定である。

## 参考文献

- 1) 藤田正司, 道上正規: 千代川における淵の構造と魚類の生息, 水工学論文集, 第40巻, pp.181-187, 1996.
- 2) 上林悟, 長谷川和義: 山地河川の三次河床波に関する水理的解析, 土木学会北海道支部論文集, 第53号, pp.32-37, 1997.
- 3) 竜澤宏昌, 林日出喜, 長谷川和義: 溪流の小規模河床形態に関する研究 - 魚類等の生息環境保全対策への応用を目指して -, 土木学会論文集II, 第656巻/II-52号, pp.83-101, 2000.
- 4) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志: CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, 水工学論文集, 第42巻, pp.1159-1164, 1998.
- 5) 中山恵介, 堀川康志, 三上卓哉: 射流場におかれた円柱周辺の流れの解析, 水工学論文集, 第43巻, pp.365-370, 1999.
- 6) 河村三郎: 土砂水理学, 森北出版株式会社, pp. 107-148, 1982.
- 7) Kennedy J. F., The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, pp.521-544, 1963.
- 8) Hayashi, T., Formation of dunes and antidunes in open channels, *Proceedings of ASCE*, Vol.96, HY2, pp.357.366, 1970.
- 9) 孟岩, 奥村卓也, 日野幹雄, 直接数値計算による任意波状境界をもつ2次元及び3次元波状曲面上の流れの解析, 水工学論文集, 第36巻, pp.355-360, 1992.
- 10) Nakayama K.: Comparisons of using CIP, compact and CIP-CSL2 schemes for internal solitary waves, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.51, pp.197-219, 2006.
- 11) 平山克也, 高山知司, 安田誠宏, 平石哲也: ソリトン分裂と砕波を伴う津波の変形と作用波圧に関する数値計算, 海洋開発論文集, 第23巻, pp. 171-176, 2007.
- 12) 灘岡和夫, 中川康之: 不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集II, 467/II-23号, pp.83-92, 1993.
- 13) 磯部雅彦: 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 1-5, 1994.
- 14) 細田尚, 村本嘉雄, 宮本雅章, 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, 第38巻, pp.457-462, 1994.
- 15) 細田尚, 加藤隆彰, 水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第44巻, pp.617-622, 2000.
- 16) 音田慎一郎, 細田尚, 水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解, 水工学論文集, 第48巻, pp.973-978, 2004.
- 17) Kakinuma T., K. Nakayama: Numerical simulation of internal waves using a set of fully nonlinear internal wave equations, *Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE*, Vol. 51, pp.169-174, 2006.
- 18) 柿沼太郎, 中山恵介: 渦度を考慮した非線形波動方程式による表面波及び内部波の数値解析, 海岸工学論文集, 第54巻, 印刷中, 2007.

(2008.9.30受付)