複雑境界上乱流の LES 計算における 壁面モデルの検証

STUDY OF WALL MODEL IN LES CALCULATION OF TURBULENT FLOW OVER COMPLEX BOUNDARY

笠井大彰¹・中山昭彦² Tomoaki KASAI and Akihiko NAKAYAMA

¹学生員 神戸大学大学院 工学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)
 ²正会員 PhD 神戸大学大学院教授 工学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

Wall models that may be used in Large Eddy Simulation (LES) of turbulent flows over complex geometry have been examined comparing with direct numerical simulation and accurate well-resolved LES results. In addition to commonly used logarithmic and linear-power laws, a wall stress model with prescribed resistance coefficient has been tried. The wall stress model combined with shear-improved Smagorinsky subgrid model is found to reproduce very well the direct simulation and well resolved simulation results of flows over model hill and sinusoidal bed. The conventional models based on similarity of velocity distributions failed to predict the correct reattachment point and turbulence stresses were significantly underestimated. The standard Smagorinsky model with nonslip boundary condition without any wall model appears to do better than these.

Key Words : LES, subgrid model, wall model, sinusoidal bed, model hill, resistance

1. はじめに

ラージ・エディー・シミュレーション (LES) 法は一 様乱流やチャンネル流れのみならず複雑な境界上のスケ ールの大きい大気流や開水路流のシミュレーションにも 有用であることが示されている(例えば参考文献 ^{1),2)}).し かしこの方法ではスケールが大きくなるにつれ、解像で きる運動のエネルギーの全運動エネルギーに対する割合 は小さくなりシミュレーション精度も落ちる.従って多 くの研究は、解像出来ない小スケール成分のモデル(サ ブグリッドモデル)あるいは数値計算手法の改良に重点 を置いてきた(たとえば Sagaut¹⁾). しかしこういった小 スケール運動のモデル化の問題以外に、地表近傍や河床 近傍での粘着境界面の影響のモデル化についての問題も 大きい. 壁面近傍流れは乱れの生成とその維持に重要で あるが自然の気流や河川流れの境界近傍はほぼ解像不可 能で、モデル化は避けられない. LES 法が真に有効な予 測法として活用できるにはこの境界問題が解決されなけ ればならない

機械分野では主に滑面を対象にした壁面モデルが提 案・検証されているが未だ解決したと言えない^{3,4)}. 気流 計算の応用では粗面を扱わなければならないこともあり, 今だ瞬時流速場に粘着条件や壁面則を仮定するのが一般 的である⁵⁸⁾.しかし用いられる壁面則は、平坦境界上流 れの平均流速の対数則で、起伏の大きい境界や逆流を伴 う場合には適用できない.

形状や粗度が大きく変化する流れの予測では、壁面抵 抗を正しく再現できる計算法が求められる.著者ら⁹は 粗面を含む任意形状の境界にも適用できる壁面モデルと して一様なフィルタ幅により粗視化された乱流場のシミ ュレーションに動的境界モデルを提案した(北野・中山 ⁹).これは陽的フィルタリング操作を必要とし、複雑な 境界形状に適用するには必ずしも簡単でない.

本研究では、壁面抵抗を直接モデル化し、境界条件と して用いる方法を提案し、既往の幾つかの方法と比較し 検証する。検証は著者ら¹⁰が直接数値シミュレーション (DNS)を実施した波状底面開水路流れ、および高解像 度LES計算結果のあるモデル丘上乱流^{11,12}について行う。 サブグリッドモデルには一般的な標準 Smagorinsky モデ ルと壁面近傍などせん断の強い領域での精度を向上した Shear-improved Smagorinsky model¹³を用い、主に壁面モ デルの精度を比較、検証する。境界は2次元形状である が、手法は複雑3次元境界にも修正なしに使えるもので ある。

2. LES基礎式とSGSモデル及び壁面モデル

(1) LES基礎式と連続の式

本計算では水面変動を考慮しない非圧縮流を対象とし、 フィルタ平均された流れについての運動方程式と連続の 式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{T_{ij}}{\rho} \right\}$$
(1)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

である. ここで, x_i は $x_{2=y}$ 方向を鉛直上向きにとったデ カルト座標で, t は時間, u_i はフィルタ平均された速度成 分, p はフィルタ平均された圧力にSGS垂直応力を加え たもの, ρ は流体の密度, T_{ij} は粘性応力とSGS応力 τ_{ij} か らその等方成分を除いたものの和で,

$$\frac{T_{ij}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} \right)$$
(3)

である. ここで、vは動粘性係数である.

(2) Sub Grid Scale (SGS)モデル

SGS応力 τ_{ij} に渦粘性モデルを用いると、

$$\frac{1}{\rho} \left(\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} \right) = -2\nu_t \overline{S_{ij}}$$
(4)

と表される.ここで、 $\overline{S_{ij}}$ はフィルタ平均された流れの

歪速度テンソル, μ は渦動粘性係数で,ここでは以下の 標準 Smagorinsky モデル, Shear-Improved Smagorinsky モ デルを適用する.

標準 Smagorinsky (SdS)モデルは、LES 解析に一般的に 用いられるもので、渦動粘性係数を

$$\nu_t = \left(C_s \cdot \Delta\right)^2 \cdot \left(\overline{S}\right) \tag{5}$$

とおく.ここで、 Δ は格子サイズ、 C_S はSmagorinsky定数 である.ただし、壁面近傍では、Van-Driest減衰関数

$$\left(1 - e^{-y^+/A^+}\right)^2$$
 (6)

を乗じる. ここで, 減衰定数は $A^+=25$, 壁面までの粘性距 離を y^+ とする. また,

$$\left|\overline{S}\right| = \left(2\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}\right)^{1/2} \tag{7}$$

である.

次に Shear-Improved-Smagorinsky (SIS)モデルであるが, これは Leveque ら¹³⁾ によって提案されているもので,平 坦チャネル流では dynamic モデルに相当する精度があ ることが示されているモデルであり, 渦動粘性係数を

$$\nu_t = \left(C_S \cdot \Delta\right)^2 \cdot \left(\left|\overline{S}\right| - \left|\left\langle\overline{S}\right\rangle\right|\right) \tag{8}$$

とおく.ここで、<> はアンサンブル平均を表す.本解 析では、奥行き方向の平均量が一定であるので、奥行き 方向の空間平均を用いている.

(3)壁面モデル

壁面モデルでは粘性底層の速度分布の解像を必要とする粘性法則を用いず、壁面せん断応力 τ_w を壁面近傍の流速や距離などでモデル化する.以下ではuを壁面接線方向流速成分、yを壁面までの距離とし、計算では共に壁面最近傍点の値を使用する.また u^+ 、 y^+ はそれぞれ壁面摩擦速度 u_τ と動粘性係数v用いた無次元速度 u/u_τ と無次元長さ yu_τ/v である.

対数則モデル(LL)は,解析領域を線形領域と対数則領 域の二層に分け,平坦地形で平均量が成立する以下の式 が瞬時場においても成立することを仮定し瞬時速度から 壁面応力を定める.

$$u^{+} = y^{+} \qquad (y^{+} \le 10\mathcal{O} \succeq \mathfrak{E}) u^{+} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^{+}) + A \qquad (y^{+} > 10\mathcal{O} \succeq \mathfrak{E})$$
⁽⁹⁾

ここで, κはカルマン定数, *A*は対数則の定数である. これにより, 求まる壁面応力は,

$$\tau_{w} = \rho \frac{\nu u}{y} \qquad (y^{+} \le 10 \mathcal{O} \succeq \stackrel{>}{>})$$

$$\tau_{w} = \rho u_{\tau}^{-2} \qquad (y^{+} > 10 \mathcal{O} \succeq \stackrel{>}{>})$$
 (10)

ここで、 u_r は (9)式より陰的に求めた値である. この方法はMason¹⁴ により平坦地形上大気境界層のLESに適用され、平均流速等に良い結果が得られているが、粗度とみなせないような起伏を有する複雑地形領域の解析で評価を得ていないため、本解析で検証する.

べき乗モデル(WW)は、壁面近傍瞬時速度分布が以下のように線形分布とべき乗分布に従うとした Werner and Wengle¹⁵のモデルより壁面応力を求める.

$$u^{+} = y^{+} \qquad (y^{+} \le 11.8\mathcal{O} \succeq \mathfrak{E})$$

+ = 8.3(y^{+})¹/7 (y^{+} > 11.8\mathcal{O} \succeq \mathfrak{E}) (11)

この式より,壁面応力τωは以下のようになる.

и

$$\tau_{w} = \rho \frac{u}{y} \qquad (y^{+} \le 11.8\mathcal{O} \ge \mathfrak{E})$$

$$\tau_{w} = \rho \left(\frac{u^{7}}{8.3^{7}y}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (y^{+} > 11.8\mathcal{O} \ge \mathfrak{E})$$
(12)

このモデルは、簡易化された壁面モデルで、Temmerman and Leschziner¹²⁾によってresolved LES解析結果と比べて 鉛直、奥行き方向の格子を半分にした解析で良好な結果 を示しているモデルである.しかし、これは粘性底層域 を解像する程度細かい格子であり、高レイノルズ数乱流 の解析で同様の結果を得るには現在の計算能力上、不可 能である.本検証は高レイノルズ数乱流の計算での壁面 モデルの精度を調べることが目的であるので、粗い格子 で計算を行う.

次に壁面抵抗モデル(WSM)を示す. 上のような壁面モ

モデル要素	手法
座標	境界適合座標系(シグマ座標系)
格子,変数配置	コロケート
移流項差分	保存型2次精度中心差分
粘性項	2次精度中心差分
圧力解法	SOR 法
計算アルゴリズム	2 次精度 A-B 法
時間進行法	Fractional-step 法

表-1 数値計算手法の概要



デルは瞬時の速度分布に相似則を仮定するが,瞬時速 度分布には相似則が成り立たず¹⁰,こういった方法には 限界がある.しかし瞬時の壁面抵抗,とくに高レイノル ズ数流れの場合,粘性の依存性は小さく壁面近傍の流速 の大きさに強く関連している.そこで,以下の壁面摩擦 を壁面最近傍点の速度から決定する抵抗モデル

$$\tau_w = \rho C_d u | u \tag{13}$$

を適用する.ここで、Caはモデル抵抗係数である.

こういった抵抗モデルは植生キャノピーによる抵抗な どのモデルに用いられているが、粗面にもこの形の抵抗 を導入することで対数則を仮定することなく対数則に沿 う平均速度分布が得られている(Chow et al.⁷⁾). (10)式 中の抵抗係数 C_d は、なんらかの方法で決定する必要があ る. 平板境界層の場合、摩擦抵抗係数を評価する式とし てKarman-Schoenhert¹⁷⁾の半経験式

$$\sqrt{2C_d} = \frac{0.242}{\log(\operatorname{Re} \cdot 2C_d)} \tag{14}$$

を始め、数多く存在するが、複雑境界上での関係は明らかでない.また、北野・中山⁹の方法ではこの係数を陽的フィルタリングをすることにより任意の時間、場所で動的に決定する方法を提案したが、その結果をみると、この定数は陽的フィルタのフィルタ幅が広い場合ほぼ一定になることが見出されている.本研究では壁面最近傍格子の主流方向格子幅Axと壁面最近傍格子の平均流入流速を基準とするレイノルズ数を式(14)に代入し、モデル抵抗係数を陰的に決定した.

また、上記壁面モデル以外に壁面モデルを用いず、単 にnon-slip条件を適用したものをNSと簡略化して示す.

3. 数値計算法



本計算で用いる数値計算法は一般座標上コロケート格 子を用いたFractional step法を基にしたもので、移流項は保 存型2次精度中心差分で、粘性応力項も2次精度中心差 分を用いている.この差分法では等間隔格子あるいは格 子間隔の変化が小さい場合比較的安定な計算ができる. 壁面応力は前節で説明した非線形代数式で与えられる ので時間進行には陽的Adams - Bashforth 法を用いている. 数値計算法の概要は**表-1**にまとめてある.座標系は両検 証ケースとも境界適合シグマ座標を用いている.

4. 計算ケースと計算条件

(1)丘地形

まず図-1に示すAlmeida¹¹⁾により定められた丘地形上流 れの計算を行い,壁面モデルの検討を行う.解析領域は 丘をひとつ含むものだが,丘が連続して配置していると 仮定し,流下方向に周期境界条件を用いている.また, 奥行き方向には地形が一様に続くとし,周期境界条件を 適用する.計算領域は丘高さをhとしたとき,(主流方向 長さ,鉛直方向高さ,奥行き方向幅)=(9h,3.035h,4.5h) である.また,格子数は(主流方向,鉛直方向,奥行き方 向)=(60,18,30)である.本計算は,LES壁面モデルを検証



することが目的であるため、格子は図-1に示すようにか なり粗いものを用いる.計算結果は、Temmerman and Leschziner¹²⁾により行われたresolved LES解析結果と比較 し、その精度を検証する.レイノルズ数は丘高さhと丘の 頂上部の平均流速 U_b を基準とし、10595である.また、 resolved LES解析の境界上端は粘着面であるため、本計算 でも境界上端に底面と同様な壁面モデルを適用している.

図-2に平均流速分布,図-3に主流方向レイノルズ垂直 応力分布,図-4にレイノルズせん断応力分布をそれぞれ *x/h*=1,5,8の3断面でプロットしている.ここで上付き横 棒は時間平均を, 'はそれからの変動をあらわす.

図-2の平均流速分布では、SGS モデルの如何に関わら ず、LL モデル、WW モデルは、壁面近傍で流速が resolved LES 解析結果と比べて過大に計算されている.壁面境界 にNS 条件を用いた解析では、SGS モデルが SdS モデル のとき、resolved LES 解析結果に近い値を示すものの再 付着点等に差異が生じている.SGS モデルに SIS モデル を用いた場合は壁面近傍で平均せん断応力が瞬時のせん 断応力にほぼ等しくなり、SGS 応力が小さくなるため平 均流速が大きく計算されている.これらの結果に対し、 壁面モデルに WSM を用いた解析では、SGS モデルの如 何に関わらず、ほぼ resolved LES 解析結果に等しい値を 示す.SGS モデルの違いに関わらず共に良好な結果を得



図-4 レイノルズせん断応力分布

たということは、2 つの SGS モデルの違い、すなわち、 非等方性の強い壁面近傍に強制的に減衰を効かせたもの とせん断流域で歪速度の変動量が小さくなるといった違 いがあるので、どちらのモデルも本計算では、壁面近傍 の渦粘性の減衰の方法に問題があり、それを WSM モデ ルが適切に壁面摩擦応力として与えているといえる.

レイノルズせん断応力分布において、SGS モデルに SdS モデルを用いたものは、壁面境界にNS 条件、WSM モデルを用いたものが resolved LES 解析結果に近い計算 結果を示している. それに対し、LL モデル、WW モデ ルは、resolved LES 解析結果に比べ、小さい値を示して いる. これは、どちらのモデルも平均場においてしか成 立しない代数式を瞬時場に適用しているためであるとい える.また、SGS モデルに SIS モデルを用いた解析では、 NS 条件、LL モデル、WW モデルで変動がかなり小さく 計算されている.しかし、壁面モデルに WSM を用いた 解析では平均流速同様に resolved LES 解析結果にかなり 近い計算結果を示した.

レイノルズ垂直応力分布についてもレイノルズせん断 応力分布と同様の傾向がみられた.

(2) 波状底面開水路

次に,前節の丘地形の計算で resolved LES 結果に最も



近い良好な結果を示した,壁面モデルにWSM, SGS モデル にSIS モデルを使用した LES 解析を,波状底面開水路に 適用し, DNS データと比較することによりこのモデルが 一般性のあるものかを検証する.また計算領域が底面起 伏高さに比べ大きい場合,地形を粗度とみなすことがで きるが,この波状底面が,粗度をもつ平坦面とみなせる 領域での計算を行う.

形状は Maass and Schumann(1994)¹⁸⁾により DNS 計算が 行われた余弦波状チャンネル(図-5)であり、比較には中 山・崎尾によって行われた DNS 結果¹⁰ を用いる.計算 領域は主流方向に余弦の3周期分とり、周期的に連続し ていると仮定する.また奥行き方向は一様で、この方向 にも周期境界条件を適用する. 領域上端は水面とし, で すべり条件を与える.計算領域は、余弦波の平均高さの 位置(基準断面)での水路高さ h を基準にし、主流方向 長さ,鉛直方向高さ,奥行き方向幅をそれぞれ 3h, 1.05h, 1.6h である. また, 格子数は(主流方向, 鉛直方向, 奥 行き方向) = (90, 35, 48) である. チャンネル平均高さ h と基準断面での平均速度 Ub を基にしたレイノルズ数 は6760である. x = 0, 0.25h, 0.5h, 0.75h の4断面での平 均流速分布を図-6に、主流方向レイノルズ垂直応力分布 を図-7に、レイノルズせん断応力分布を図-8に、それぞ れプロットしている。 平均流速分布は DNS 計算結果を 非常に良く再現している. またレイノルズ応力結果も底 面近傍の一部以外は DNS 結果によく合っている. 底面 近傍の大きな変動がなめされた結果になっているがこれ はLES がフィルタ平均された流れ場を計算対象として



図-8 レイノルズせん断応力分布

いるためで、粗い格子でのLES 結果としては問題ないと 考えられる.

図-9は、4 断面の DNS 解析結果を式(15)から求まる摩擦速度 U_r で無次元化した対数則プロットである. この図から $U_{ev}/v>$ 150 (v/h> 0.4)の領域で滑面対数則から約8下方にずれた対数分布になっているのが分かる. これは粗度高さが約hの粗面対数則に相当する. これはy/h>0.4の底面から離れた底面波が粗度と見なせる領域での LES 計算結果が粗面乱流を再現していることを示している.

$$A\Delta p = B\rho u_{\tau}^{2} \tag{15}$$

ここで、Aは流入部または流出部の断面積、Bは壁面の全面積である. Apは領域全体の圧力差である.

6. 結論

モデル丘をすぎる流れおよび波状底面を有する開水路 乱流を,既往の Smagorinsky SGS モデルと幾つかの壁面 モデルを用いて LES 計算を行った.これまで,こういっ た変化の大きい境界形状で逆流をともなう流れの LES



図-9 平均流速分布

計算は,壁面則を仮定する既往の壁面モデル (LL モデル やWWモデル)を用いた場合再現性に問題があったが, 本検証計算においても対数則やべき乗則を仮定したもの は高解像度で計算した結果や DNS 結果を再現できない ことが確認された. それに対し、本報で提案する流れの 広い領域での抵抗を合わせる壁面抵抗モデルを用いると, 丘流れ及び波状底面流れとも良い結果が得られた.底面 から十分離れた領域では、底面の起伏は粗度とみなせ、 全体の流れは平坦な粗面上乱流になり、平均流速分布は 粗面相似則に従う. この領域での計算結果は起伏の高さ に相当する粗度高さを有する粗面対数則に合致する結果 が得られ、本抵抗が解像度により粗面乱流をも再現でき るものであることが分かった.ただし、本計算法では摩 擦抵抗係数を便宜的に壁面近傍点に適応させた Karman-Schoenherr の半経験式から求めているが、この方 法はさらに検証すべきものであり、この係数をより合理 的に決定する方法を明らかにする必要がある. 単純な形 状では著者らが既に行っている、陽的テストフィルタを 施す方法などを導入することでより一般的なモデルとす ることができるであろう. また複雑地形上に粗度がある 場合,異なる大小2つのスケールで本モデルを用い,そ れにより求まる2つのせん断応力を用いることで、小さ な粗度を含む複雑地形上の解析が可能であるだろう.

参考文献

- Sagaut, P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- Grinstein, F., Margolin, L.G and Rider, W. J.: *Implicit Large Eddy* Simulation, Cambridge University Press, 2007.
- Piomelli, U. and Balaras, E.: Wall-layer models for large-eddy simulations, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 34, pp.349–74, 2002.
- 4) Hickel, S. and Adams, N.A. :"On implicit subgrid-scale modeling

in wall bounded flows," Phys. Fluids Vol.19, pp. 30-50, 2007.

- 内田孝紀,大屋裕二:風況予測シミュレータ RIAM-COMPACTの開発-風況精査とリアルタイムシミ ュレーション-日本流体力学会誌,ながれ,Vol.22, pp.417-428,2003.
- Mason, P. J. : Large-eddy simulation: A critical review of the technique, *Q.J.R.Meteorol .Soc.* Vol.120, pp.1-26, 1994.
- Chow, F. K., Street, R.L., Xue, M. and Ferziger, J.H., : Explicit filtering and reconstruction turbulence modeling for large-eddy simulation of neutral boundary layer flow, *J. Atmos. Sci.*, Vol.62, pp.2058-2077, 2005.
- 岸修士郎,中山昭彦:温度変化のある実地形上気流のLES 計算,応用力学論文集,Vol.4, pp.647-654, 2001.
- 9) 北野有哉,中山昭彦:LES における動的境界条件の導入, 応用力学論文集, Vol.9, pp.773-782, 2006.
- 中山昭彦,崎尾幸司: 波状粗面上乱流の直接数値シミュレ ーション,土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.839-846, 2003.
- Almeida, G. P., Durao, D.F.G. and Heitor, M.V.: Wake flows behind two dimensional model hills, *Exp. Thermal and Fluid Science*, Vol.7, pp. 87-93, 1992.
- 12) Temmerman, L. and Leschziner, M.A.:Large Eddy Simulation of separated flow in a streamwise periodic channel construction, Proc. 4th. Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Stockholm, pp.27-29, 2001.
- Leveque, E., Toschi, F., Shao, L. and Bertoglio, J.-P.: Shearimproved Smagorinsky model for large-eddy simulation of wallbounded turbulent fows, *J. Fluid Mech.*, Vol.570, pp.491-502, 2007.
- Mason, P. and Callen, N. : On the magnitude of subgrid scale eddy coefficient in large-eddy simulation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.162, pp.439-462, 1986.
- 15) Werner, H. and Wengle, H. :Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel, Proc. 8th Symp. On Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, pp.19.4.1-19.4.5, 1991.
- 16) Nakayama, A, Noda, H. and Maeda, K. : Similarity of instantaneous and filtered velocity fields in the near wall region of zero-pressure gradient boundary layer, *Fluid Dynamics Research*, Vol. 35, No. 4, pp. 299-321, 2004.
- Schoenherr, K. E. Resistance of at surfaces moving through a uid. Trans. SNAME. 40, pp.279-313, 1932.
- 18) Maass, C. and Schumann, U. Numerical simulation of turbulent convection over wavy terrain. Direct and Large-Eddy Simulation I, ed. P.R. Voke, L. Kleiser and J.-P. Chollet,pp. 287-297, Kluwer Academic, Dordrecht, The Nethelands, 1994.

(2008.9.30受付)