水工学論文集,第53巻,2009年2月

安定解析に基づく川幅の自律形成機構
Stability Analysis on the Self-adjustment of River Width

渡邊康玄[1]・早川博[1]・清治真人[2]
Yasuharu WATANABE, Hiroshi HAYAKAWA and Masato SEIJI

[1]正会員 博 (工学) 北見工業大学 社会環境工学科（〒 090–8507 北海道北見市公園町 165 番地)
[2]正会員 北海道科学技術総合振興センター 東京出張所 (〒 100–0005 東京都千代田区丸の内 3-2-2)

The relationship between river width and the discharge of the river is expressed the rational regime theory. Several researches established theory on stable channel cross-section of straight gravel rivers. Yamamoto (1994) showed the response of river width which was expanded artificially. However these are not able to explain the formation of distributaries at the alluvial fan and near river mouth. In this paper, the formation of distributaries is considered based on the stability of transverse river bed forms. The stability analysis which is used on bar formation process, is applied on this phenomenon. The results of this theory expressed the validity of the rational regime theory.

Key Words : *Channelized process, river width, discharge, bed forms, weakly nonlinear analysis*

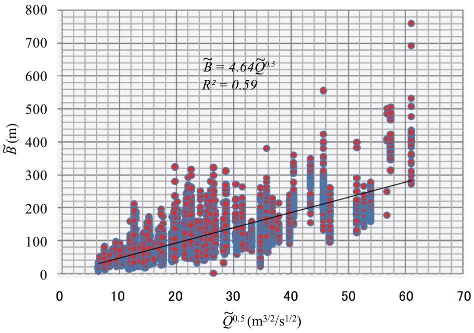
1. はじめに

河道形状は流れによって規定されており，平均年最大流量程度の水理量でほぼ決定されているといわれている．このことは，流量が変化することによって河道形状が変化することを意味し，近年の局所的な集中豪雨による流量の増加や，ダム等による出水時の流量調節による流量の減少に伴い，今後河道形状も大きく変化することが推察される．また，洪水時の流量の低下が要因の一つである砂州や澪筋の固定は，すでに各地で問題となってきている．これらの現象は，流量の減少に伴う流水断面幅の減少とも捉えることができよう．現在の河道幅は，治水上河道拡幅を大規模に行わなければならない場合を除いて，維持管理上からも従来河川が形成してきた川幅に基づいて決定されてきている．しかし，流量が大きく変化する場合については，河川が自身で形成してきた形状が維持管理上好ましいとは限らなくなる．今後の河道管理は，このような流量が大きく変化することを踏まえた上で実施される必要があり，安定的に維持される川幅と水理量とを結びつけておくことが，必要不可欠となる．流量と川幅の関係は，河岸満杯流量の 0.5 乗に比例するとするレジーム則や，動的平衡状態における礫河川における側岸部の静的安定条件を用いた理論式[1)2)3)]で表されている．レジーム則については，藤田[4)]が安定流路の幾何形状について次元解析により，その妥当性を検証している．また，山本[5)]は，改修等によって人工的に川幅が変化された河道の応答について実際の河道データを基に解析し，川幅は流量と摩擦速度に規定されており水理量が変化しない場合その川が形成した川幅に戻ることを示している．しかしながら，扇状地や河口部近傍では流路の分岐が安定的に存在する場合があるが，その形成については従来の研究では説明できていない．

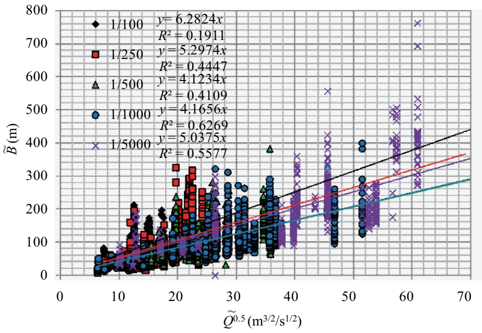
ここでは，比較的継続時間が長く河道に大きな影響を与えるといわれる融雪出水が生じる北海道内の一級河川データを用いて流量と川幅との関係を把握するとともに，これらの河川の分岐現象や川幅の決定機構について，河道の横断的な形状の安定という視点から捉え，これらの形成機構を線形安定理論を適用して解明することを試みる．すなわち，無限の川幅を持つ河川を考えその河床の横断方向の不安定性から論ずるものであり，線形安定解析に中規模河床形態の発生機構を説明する手法を応用し，安定する川幅を見出すものである．なお，本論文ではこの安定する川幅を基本川幅と定義することとする．

2. 河川データによる水理量と川幅の関係

川幅と水理量との関係については，我が国の河川においても従来から検討が行われてきており，レジーム則の係数は概ね 4~5 程度の値をとるといわれている[6)7)]．ここでは，出水の期間が比較的長く河道の形状を支配するといわれている融雪出水の存在する北海道の一級河川データを用いて，川幅と流量との関係を確認することとする．なお，流量は，データの関係上北海道では融雪出水の流量とほぼ等しい平均年最大流量を用い



図–1 北海道内の 1 級河川における平均年最大流量と川幅との関係



図–2 北海道内の 1 級河川における勾配別平均年最大流量と川幅との関係

るとともに，川幅は，河道掘削や澪筋の固定化等も考慮に入れた実質の川幅とするため，平均年最大流量流下時の水面幅としている．**図-1** は低水路幅と融雪出水時の流量との関係を見たものである．かなりばらつきはあるものの，レジーム則の係数は最小二乗法により求めると，4.6 となり，既往の知見と一致する値となった．同図について，河床勾配をパラメータとして整理し直したものが**図-2** である．各河床勾配のデータについて最小二乗法により線形近似したものも合わせて記述している．極めて大雑把な近似ではあるが，近似直線の傾きは河床勾配が 1/1000 を離れるに従って大きくなる傾向を示しているように見える．

3. 安定解析

川幅一定の直線水路における拡散項を省略した定常 2 次元浅水流式と連続の式および掃流砂を対象とした流砂連続式は，座標系を**図-3** のようにとると，式 (1)〜(4) で表される．

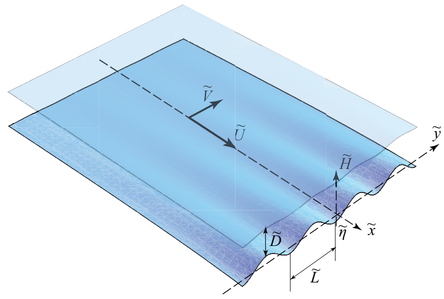
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \widetilde{t}} + \widetilde{U}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \widetilde{x}} + \widetilde{V}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \widetilde{y}} + \widetilde{g}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\widetilde{\tau}_x}{\widetilde{\rho}\widetilde{D}} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \widetilde{t}} + \widetilde{U}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \widetilde{x}} + \widetilde{V}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \widetilde{y}} + \widetilde{g}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{y}} + \frac{\widetilde{\tau}_y}{\widetilde{\rho}\widetilde{D}} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \widetilde{t}} + \frac{\partial \left(\widetilde{U}\widetilde{D}\right)}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial \left(\widetilde{V}\widetilde{D}\right)}{\partial \widetilde{y}} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \widetilde{t}} + \frac{1}{1-p}\left(\frac{\partial \widetilde{Q_{bx}}}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial \widetilde{Q_{by}}}{\partial \widetilde{y}}\right) = 0 \tag{4}$$

ここで，$\widetilde{t}$；時間，$\widetilde{x}, \widetilde{y}$；それぞれ縦断方向および横断方向座標軸，$\widetilde{U}, \widetilde{V}$；それぞれ $\widetilde{x}$ 軸方向および $\widetilde{y}$ 軸方向の流速，$\widetilde{H}$；水位，$\widetilde{D}$；水深，$\widetilde{\eta}$；河床高（$= \widetilde{H} - \widetilde{D}$），$\widetilde{\tau}_x, \widetilde{\tau}_y$；それぞれ $\widetilde{x}$ 軸方向および $\widetilde{y}$ 軸方向の剪断力，$\widetilde{Q_{bx}}, \widetilde{Q_{by}}$；それぞれ $\widetilde{x}$ 軸方向および $\widetilde{y}$ 軸方向の掃流砂量，$\widetilde{\rho}$；水の密度，$\widetilde{g}$；重力加速度，p；河床の空隙率である．なお，各記号に付されている~は次元を有していることを表す記号である．



図–3 座標系

式 (1)〜(4) は，平坦河床上の等流の諸元を基に，$(U, V) = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}\right)/\widetilde{U_0}$，$D = \widetilde{D}/\widetilde{D_0}$，$H = \widetilde{H}/\left(F_0{}^2\widetilde{D_0}\right)$，$F_0 = \widetilde{U_0}/(\widetilde{g}\widetilde{D_0})^{1/2}$，$(Q_{bx}, Q_{by}) = \left(\widetilde{Q_{bx}}, \widetilde{Q_{by}}\right)/\left(\delta\widetilde{g}\widetilde{d_s}^3\right)^{1/2}$，$(\tau_x, \tau_y) = (\widetilde{\tau}_x, \widetilde{\tau}_y)/\left(\widetilde{\rho}\widetilde{U_0}^2\right)$，$(x, y) = (\widetilde{x}, \widetilde{y})/\widetilde{D_0}$，$t = \widetilde{t}/\left(\widetilde{D_0}/\widetilde{U_0}\right)$ で無次元化を行うと，式 (5)〜(8) となる．ここで，添え字の $_0$ は等流時の値を示している．また，$\widetilde{d_s}$；河床材料の粒径，δ；河床材料の水中比重，$Q_0 = \left(\delta d_s{}^3\right)^{1/2}/\left[F_0\left(1-p\right)\right], d_s = \widetilde{d_s}/\widetilde{D_0}$ である．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\tau_x}{D} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\tau_y}{D} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial\left(UD\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(VD\right)}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Q_0\left(\frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y}\right) = 0 \tag{8}$$

A を摂動パラメータとして (U, V, H, D) を式 (9) で示されるよう等流時の値と摂動量とに分ける．

$$(U, V, H, D) = (1, 0, H_0, 1) + A\left(U_1, V_1, H_1, D_1\right) \tag{9}$$

摂動量については式 (10) で表す横断方向に波長 $\widetilde{L}$ を持つ微小撹乱を与える．ここで摂動量の縦断的な形状が問題となる．本来上下流端の境界条件を満足するように縦断変化を規定することとなる．ここでは上流から下流に向けて分岐する現象を考えることとし，上流端では分岐をしていない状態すなわち平坦床であること

が境界条件として与えられる．下流端においては分岐部における形状が境界条件となるが，形状が一義的に決定できないため，ここでは，自然河川で見られる緩やかな分岐形状を考慮することとする．以上から，摂動量の縦断変化は，無限上流 ($x=-\infty$) で振幅が 0，下流端で微小な振幅を持つ形状を与えることとし，縦断的な増幅率を r としている．

$$(U_1, V_1, H_1, D_1) = (C_1 u_1, S_1 v_1, C_1 h_1, C_1 d_1)\, E_1 \quad (10)$$

ここで，

$$(S_1, C_1, E_1) = (\sin(\lambda y), \cos(\lambda y), \exp(rx + \omega t)) \quad (11)$$

$$\lambda = 2\pi \frac{\widetilde{D}}{\widetilde{L}} \quad (12)$$

式 (5)〜(8) に式 (9) および式 (10) を代入し，式 (11) 中の摂動量の時間に関する増幅率 ω が十分に小さく摂動パラメータと同様のオーダーであると仮定すると，A の１次のオーダーに関して式 (13) が得られる．

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ h_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

ここで，f_{11}-f_{44} は，行列の各要素であり，それぞれ次式で表される

$$f_{11} = r + \frac{2C_{f0}}{1 - C_T}$$
$$f_{12} = f_{21} = f_{24} = f_{33} = 0$$
$$f_{13} = f_{31} = f_{34} = r$$
$$f_{14} = \frac{(-1 + C_H + C_T)C_{f0}}{1 - C_T}$$
$$f_{22} = r + C_{f0}$$
$$f_{23} = -\lambda$$
$$f_{32} = \lambda$$
$$f_{41} = \frac{2F_T Q_0 r \phi_0}{1 - C_T}$$
$$f_{42} = Q_0 \lambda \phi_0$$
$$f_{43} = (\omega + \frac{Q_0 R \lambda^2 \phi_0}{\theta_0^{1/2}})F_0^2$$
$$f_{44} = -\omega + \frac{Q_0 \phi_0}{(-1 + C_t)\theta^{1/2}} [\{(-1 + C_T)F_H - C_H F_T\} r \theta^{1/2} - (-1 + C_T) R \lambda_2]$$

ここで，θ は無次元掃流力，C_f は河床の摩擦係数，ϕ は流砂量であり添え字の $_0$ は等流時の値を示している．C_H, C_T, F_H および F_T はそれぞれ

$$C_H = \frac{1}{C_{f0}} \frac{\partial C}{\partial D}, C_T = \frac{\theta_0}{C_{f0}} \frac{\partial C}{\partial \theta},$$

$$F_H = \frac{1}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial D}, F_T = \frac{\theta_0}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

である．さらに，R は，流砂と流れの方向のずれを表す Engelund の式[8]の係数である．

式 (13) が解を持つための条件として式 (14) が得られる．

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = F_1(\lambda, \omega, \theta_0, d_s) = 0 \quad (14)$$

式 (14) から，θ_0 と d_s を与えることによって，任意の波数の摂動量の時間に関する増幅率 ω を算出することが可能である．すなわち，ある水理量の条件下において，最大の増幅率となる波数を求めることが可能となる．

4. 基本川幅

前節で求められる河床の摂動量は十分発達した場合，幾筋もの澪筋を形成することなる．この澪筋を派川形成のきっかけ，あるいはある単位幅流量が与えられた時に形成される河床形状の横断方向の単位と捉えると，摂動量の増幅率 ω が最大となる波数は，ある水理量の下で維持可能な川幅あるいは派川を形成する基本川幅と考えることができる．このことから，以下に解析結果の各水理量等における挙動を調べるとともに，レジーム則との比較を試みる．

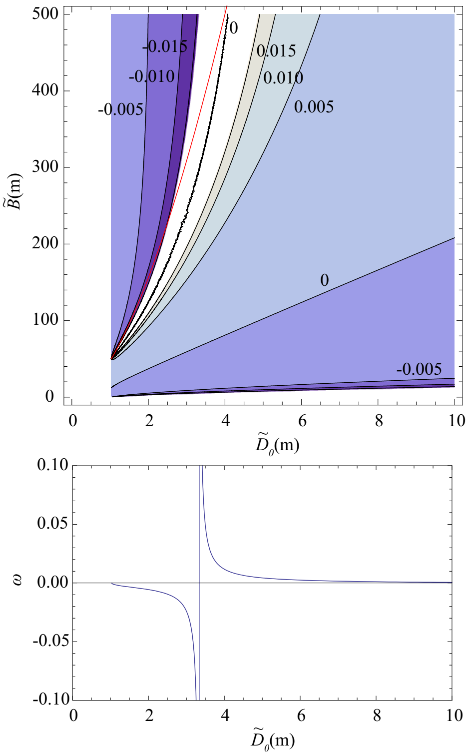
(1) 安定解析結果

解析に用いる流砂量式 ϕ および河床抵抗 C_f にそれぞれ，式 (15)，(16) で表される Meyer-Peter & Müller の式および Engelund & Hansen の式を用いて，等流水深と基本川幅の関係の一例を示したものが**図-4**(d_s = 0.05m，I = 1/250) および**図-5**(d_s = 0.01m，I = 1/1000) である．ここで，I は河床勾配，$\widetilde{B}$ は川幅である．なお r は初期微小攪乱の縦断方向の増幅率であり未知数であるが，ここではそれぞれ $r = 0.20$ および $r = 0.10$ としている．r に関する考察は次項で行う．

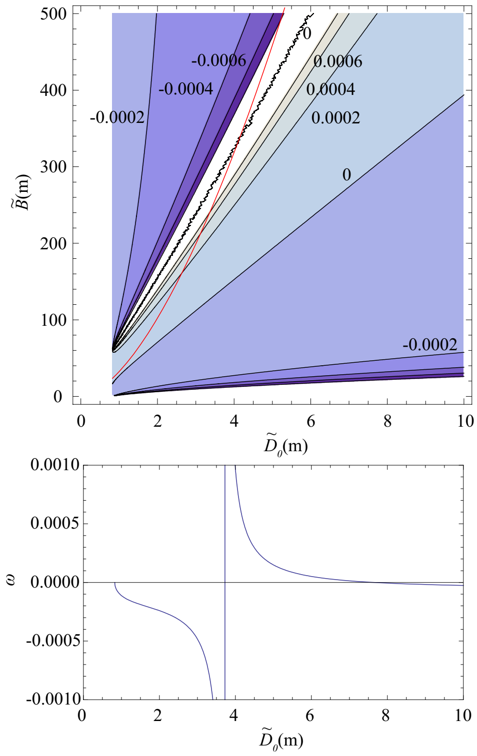
$$\phi = (\theta - \theta_{cr})^{3/2} \quad (15)$$

$$C_f = \frac{1}{\left[6 + 2.5 \ln\left(\frac{1}{2.5 d_s}\right)\right]^2} \quad (16)$$

ここで，θ_{cr} は限界掃流力である．**図-4** および**図-5** には，式 (17) で示されるレジーム則の値も赤線で併記している．等流水深すなわち，流量の増加とともに基本川幅は増加しており，この条件ではレジーム則とほぼ同様の傾向を示していることがわかる．なお，比例定数は前述の北海道内のデータを基に $\alpha = 4.64$ としている．



図–4 等流水深と基本川幅の関係 ($\widetilde{d_s} = 0.05$m, $I = 1/250$, $r = 0.20$) 上図：時間増幅率 ω のコンター，下図：$\widetilde{B} = 300$(m) の ω の値



図–5 等流水深と基本川幅の関係 ($\widetilde{d_s} = 0.01$m, $I = 1/1000$, $r = 0.10$) 上図：時間増幅率 ω のコンター，下図：$\widetilde{B} = 300$(m) の ω の値

$$\widetilde{B} = \alpha \widetilde{Q}^{0.5} = \alpha \sqrt{\frac{\widetilde{g}\widetilde{D_0}I}{C_{f0}}}\widetilde{D_0} \tag{17}$$

図-4 および**図-5** における川幅 $\widetilde{B}$ を固定した場合の時間増幅率 ω の水深 $\widetilde{D_0}$ に関する変化をみると，増幅率が最大になる条件は ω が無限大になる場合であることがわかる．このことは，式 (14) を ω で解いた場合の分母が 0 になる条件であることを示している．すなわち，増幅率が最大となる条件は，増幅率の特異点である式 (18) で表される分母が 0 となる場合を求めることになる．このように増幅率が不連続となることは通常の安定解析では出現せず，極大値を持つ連続的な増幅率が得られる．本解析においても極めて限定的な条件で極大値を持つ連続する増幅率が得られるが出現する条件が限られていることおよび，特異点では何らかの不安定性を表現していると考えられることから，本論文では，この特異点に焦点を当てて議論することとする．なお，限定的な条件で出現する連続的な増幅率の極大値の解釈は今後の課題である．

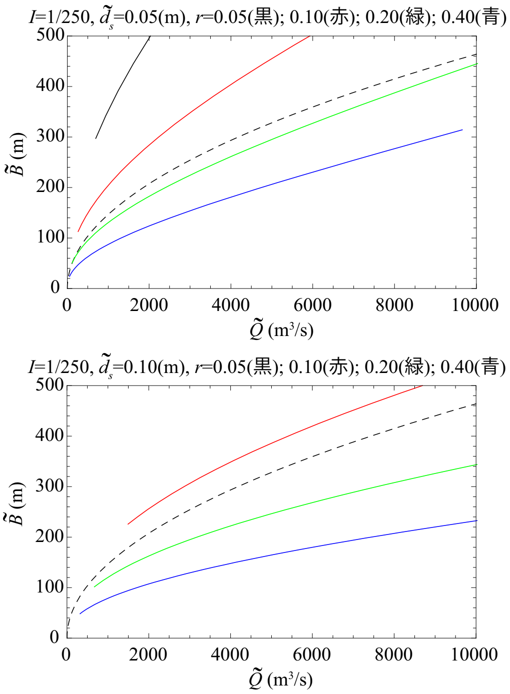
$$\begin{aligned}-\frac{1}{-1+C_T}[\ (&-3+C_H+C_T)rC_{f0}^2F_0^2\\ &+(-1+C_T)r(-r^2+\lambda^2+r^2F_0^2)\\ &+C_{f0}\{r^2-C_Tr^2-2\lambda^2\\ &+(-4+C_H+2C_T)r^2F_0^2\}]=0 \end{aligned} \tag{18}$$

(2) 縦断増幅率 r および水理量の違いによる変化

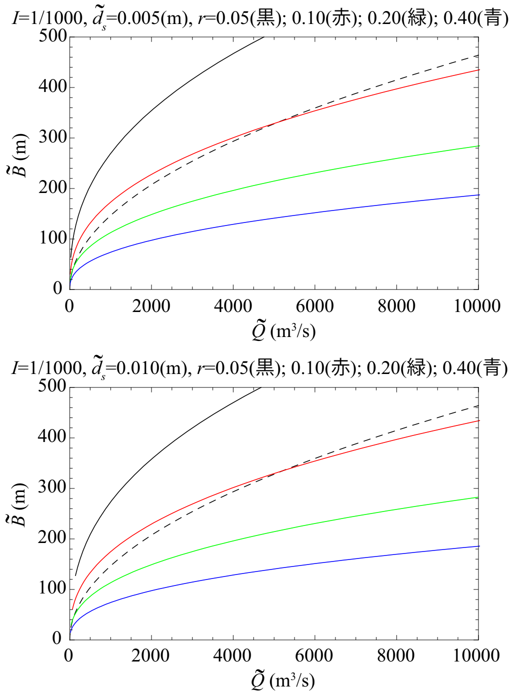
式 (18) を用いて，河床勾配 I，河床材料粒径 $\widetilde{d_s}$ および r に対する基本川幅 $\widetilde{B}$ の挙動を調べることとする．**図-6** は急勾配の例として，r をパラメータにとり，河床勾配 $I = 1/250$，河床材料粒径 $\widetilde{d_s}$=0.05(m), 0.10(m) を与えたものである．また**図-7** は緩勾配の例として，河床勾配 $I = 1/1000$，河床材料粒径 $\widetilde{d_s}$=0.005(m), 0.01(m) を与えたものである．なお，r は両図とも 0.05, 0.1, 0.2, 0.4 の 4 ケースとしている．なお，比例定数を 4.64 とした場合のレジーム則の値も比較のため黒破線で併記している．

全体として河床勾配や河床材料粒径に関係なく，r が大きいほど同じ流量では基本川幅が小さくなる傾向を示している．また，$I = 1/1000$ の場合には粒径の違いが結果に大きく影響を与えていない．一方 $I = 1/250$ の場合については粒径により結果が大きく異なっており，粒径が大きくなるに従って基本川幅が小さくなる．レジーム則との比較では，$I = 1/250$ の場合には $r = 0.1 \sim 0.2$ が，$I = 1/1000$ の場合には $r = 0.1$ がほぼ一致する傾向を示した．

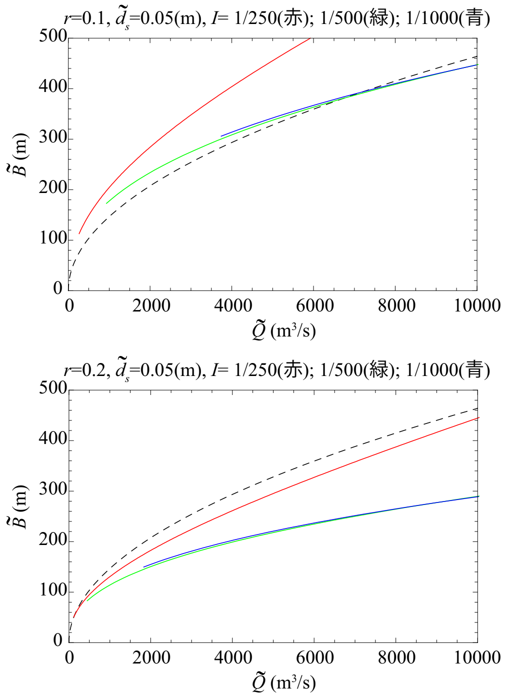
次に，河床勾配の影響を直接みるために，河床勾配をパラメータにとり r と河床材料粒径 $\widetilde{d_s}$ を与えて図化したものが**図-8** および**図-9** である．**図-8** は $\widetilde{d_s} = 0.05$(m), **図-9** は $\widetilde{d_s} = 0.005$(m) のものであり，両図とも r につ



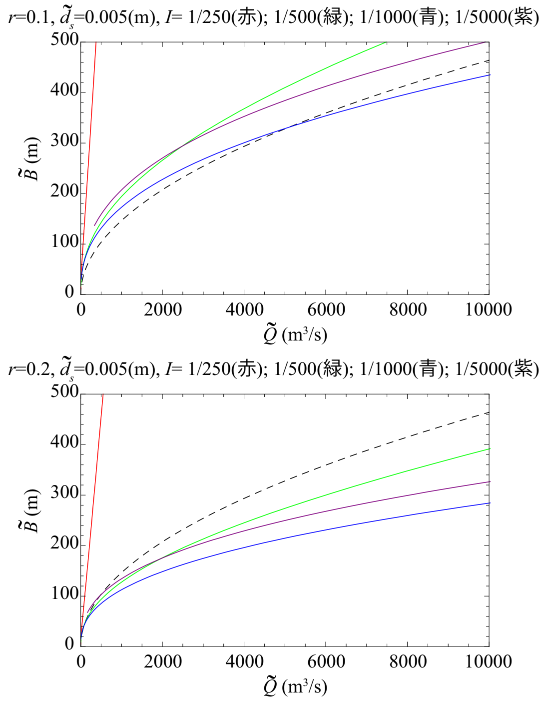
図–6 流量と基本川幅の関係 ($I = 1/250$)



図–7 流量と基本川幅の関係 ($I = 1/1000$)

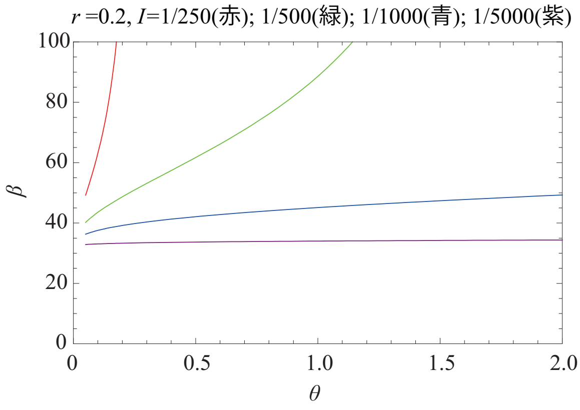


図–8 流量と基本川幅の関係 ($\tilde{d}_s = 0.05$(m))

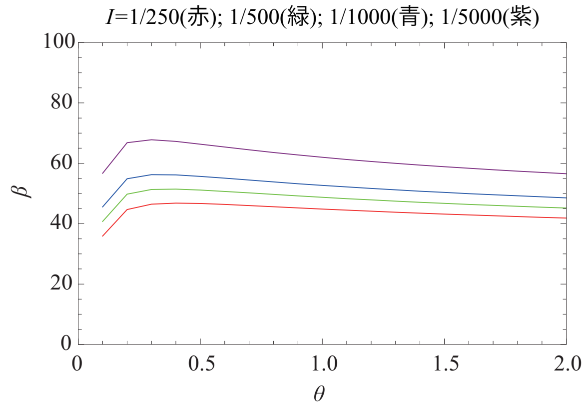


図–9 流量と基本川幅の関係 ($\tilde{d}_s = 0.005$ (m))

いては，**図-6** および**図-7** の結果から，$r = 0.1$ および $r = 0.2$ の 2 ケースとしている．勾配が緩やかになるほど基本川幅は小さくなる傾向を示すが，**図-8** では，$I = 1/500$ と $I = 1/1000$ とでほぼ同じ値となっており，**図-9** では $I = 1/1000$ を超えて勾配が緩やかになると逆に広がる傾向を示す．この勾配と基本川幅の広がりとの間にある傾向の閾値は粒径が大きくなるほど急な勾配になることが読み取れる．勾配が緩くなると流砂形態や抵抗則が変化するため現状では明確にできないが，勾配が極めて緩くなると逆に基本川幅が広がることについては，粒径の影響は考慮されていないものの**図-2** に示される実際の河川においても見られる傾向である．また，河床勾配により基本川幅が大きく異なることは，山本[5]の指摘している摩擦速度にも依存するという結果とも一致する結果となっている．



図–10 β と θ との関係 ($r = 0.2$)



図–11 単列および複列砂州領域境界の β と θ との関係

(3) 複列砂州の川幅水深比との関係

中規模河床形態が形成される場合，単列砂州では 1 筋の流れであるが，複列砂州が形成される場合には 2 筋の流れとなる．すなわち，1 筋の流れの限界川幅が複列砂州と単列砂州の発生領域の境界であると考えることも可能である．このことから，今回解析を行った基本川幅を水深で除した川幅水深比 β の値について調べることとする．**図-10** は，河床勾配 I をパラメータにとり基本川幅から求めた β と無次元掃流力 θ との関係を示したものである．なお，r は 0.2 としている．河床勾配がゆるやかな場合は無次元掃流力によらず基本川幅水深比はほぼ一定の値を示すが河床勾配が大きくなるに従って無次元掃流力の増加とともに基本川幅水深比が大きくなる特徴を示す．一方，複列砂州の発生限界である川幅水深比と無次元掃流力との関係は，Colombini らの手法[9]を用いて算出すると**図-11** となる．この場合は，どのような河床勾配においても無次元掃流力にかかわらずほぼ一定の川幅水深比をとり，明らかに基本川幅水深比とは異なる傾向を示す．さらに安定解析上，初期微小攪乱の時間に関する最大増幅率 ω の値が，基本川幅の場合特異性を持って定まるのに対し，砂州の場合は滑らかに変化する中での最大値として決定されることから，両者には機構上大きな違いが存在するものと考えられる．

5. おわりに

摂動量の時間発達が極めて遅くかつ，下流への伝播も流れに対して遅いという仮定を設け，横断方向の波形の増幅により，流量に対する限界の川幅の存在を導いた．今後さらに，微小攪乱の縦断方向の増幅率 r ならびに，浮遊砂の影響や抵抗則の変化に伴う影響等の諸現象の検討が必要と考えられるが，今回導き出された結果はレジーム則の結果とほぼ一致しており，派川の形成や安定河道の川幅決定機構についてのひとつの仮説となりうると考えられる．今回の結果を用いることにより，今後の地球温暖化による流量変動を見越した河川管理・河道管理に対して，維持が容易な川幅の設定が可能となる．一方，現状においても，ダムの建設等で，下流流量の平滑化や融雪出水規模の変化により，河道内の樹林化あるいは砂州の固定化等が進行しているが，これらの問題解決に対しても，適切な川幅の設定手法を提供することが可能となる．また, 谷底平野等に大規模出水が生じた際の流速を持った氾濫流の幅等が予測可能となるため，ハザードマップの作成，土地利用の誘導等にも利用が可能である．

謝辞：本研究は，科学研究費補助金基盤研究 (B)(代表：渡邊康玄，課題番号：20360224) の助成を受けて行われた．また，河道データに関しては国土交通省北海道開発局から提供していただいた．記して謝意を表す．

参考文献

1) Parker, G.: Self-formed straight rivers with equilibrium bank and mobile bed, Part 2. The gravel river, JFM, Vol.89, pp.127-146, 1978.
2) 池田駿介，Gary PARKER，千代田将明，木村善孝：直線礫床河川の動的安定横断形状とそのスケール, 土木学会論文集, 375, II-6, pp.176-126，1986.
3) 泉典洋，池田駿介：直線砂床河川の安定横断形状, 土木学会論文集, 429, II-15, pp.57-66，1991.
4) 藤田裕一郎：沖積河川の流路変動に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1980.
5) 山本晃一：沖積河川学-堆積環境の視点から，山海堂，1994.
6) 水山高久：山地河川の掃流砂に関する研究，京都大学学位論文，1977.
7) Parker, G.：Hydraulic geometry of active gravel rivers,Proc., ASCE, No. HY 9, 1979.
8) Engelund, F.：The motion of sediment particles on an inclined bed, Tech. Univ. Denmark ISVA Prog. No.53, pp.15-20, 1981.
9) Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M.：Finite-amplitude alternate bars, J. Fluid Mech., vol. 181, pp. 213-232, 1987.

(2008．9．30 受付)