

平坦床-反砂堆遷移過程の分岐特性

THE BIFURCATION PATTERN OF THE FLAT BED AND ANTIDUNE TRANSITION

泉 典洋¹・Gary PARKER²
Norihiko IZUMI and Gary PARKER

¹正会員 PhD 北海道大学教授 工学研究科 (〒 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

²PhD Professor, Univ. of Illinois, (205 N. Mathews Ave., Urbana, IL 61801, USA)

It has been observed that upstream migrating antidunes grow to a certain height and decay instantly, and the growth and decay of the wave height is persistently repeated. The observation suggests that there is no equilibrium wave height for upstream migrating antidunes. Weakly nonlinear stability analysis is performed in order to elucidate the bifurcation pattern of the flat bed and antidune transition. It is found from the analysis that the transition is characterized by subcritical bifurcation. It is suggested that there is no equilibrium wave height, causing the strong instability observed in the development process of upstream migrating antidunes.

Key Words: flat bed and antidune transition, subcritical bifurcation, weakly nonlinear stability analysis

1. はじめに

自然河川のように底面が土砂で構成された水路では、水理条件に応じて様々なスケールの河床波が形成される。中でも、特に水深程度のスケールを持つ砂堆（デューン）や反砂堆（アンチデューン）は小規模河床波と呼ばれ、流砂量や流れの抵抗に大きな影響を及ぼすことから、河川工学の分野における重要な課題として古くより数多くの研究が行われてきた。その初期における研究成果の集大成を米国土木学会¹⁾および日本土木学会²⁾の報告論文に見ることができる。

一方、河床波に対する力学的、理論的な面からの研究が急速に進むのは、Kennedy³⁾によって始められ、Engelund⁴⁾によって一応の完成を見る河床波発生線の線形安定論以降のことであろう。Fredsoe⁵⁾は Engelund の理論を拡張し、砂堆の成長過程に関する理論を展開している。さらに近年、Colombini⁶⁾は、開水路乱流をより良好に表現し得るといわれている混合距離モデルを用いた線形安定解析を行い、実験から得られた反砂堆の発生領域を良好に説明できることを示している。また著者らの一人⁷⁾は、Colombini⁶⁾の線形安定解析を弱非線形領域に拡張し、ある条件下で砂堆-平坦床遷移過程は亜臨界分岐で特徴付けられることを明らかにしている。

小規模河床波の中でも、砂堆に関する研究はこれまでも数多く行われているものの、反砂堆に関する研究は比較的少ないのが現状である。河川上流域や扇状地

などの急流河川では激しい水流と大きな土砂輸送量から破壊力が大きく、河床変動も急激であるため、大きな土砂災害に結びつく可能性も高い。したがって、急流河川に生じる代表的な河床形態である反砂堆についても、より詳細な研究が必要であろう。このような観点から反砂堆に関する詳細な研究を行った論文として福岡らの研究が挙げられる⁸⁾。

福岡ら⁸⁾は、流下反砂堆（下流方向に移動する反砂堆）と遡上反砂堆（上流方向に移動する反砂堆）、chutes & pools 河床について詳細な実験を行い、それぞれの河床波の特性を明らかにしている。福岡らの観察によれば、遡上反砂堆が成長すると流れが射流から常流に遷移する跳水が生じるが、跳水が生じ始めると反砂堆は急激に不安定となり一瞬にして破壊されてしまう。遡上反砂堆はこのような成長と破壊を繰り返す特性を有している。このことから福岡らは、跳水が生じる条件から最大波高を理論的に求め、その結果が実験と良好に一致することを明らかにした。

遡上反砂堆がある程度までしか成長できず、成長と破壊を繰り返すことは、遡上反砂堆が安定な平衡振幅を持たないことを意味している。本研究では、このような遡上反砂堆の不安定性の原因が遷移時の分岐形態にあるとの考えから、弱非線形安定解析の手法を用いることによって、平坦床-反砂堆遷移過程の分岐特性を調べ、遡上反砂堆の発達過程を理論的な側面から明らかにする。

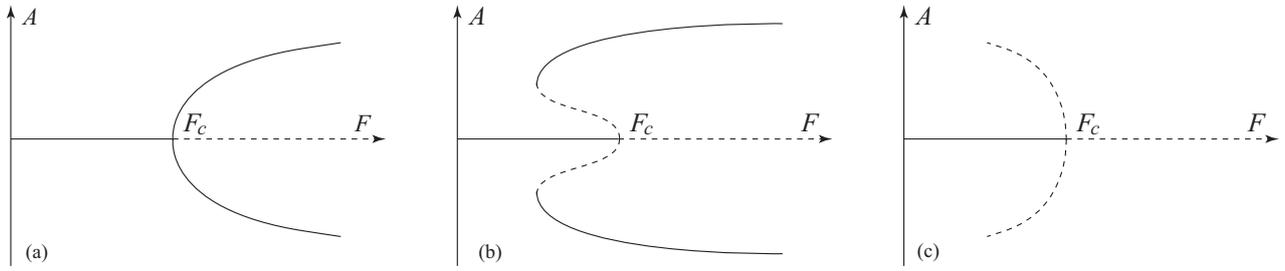


図-1 分岐形態の色々。(a) 超臨界分岐。常に平衡振幅が存在する。(b) 亜臨界分岐。平衡振幅が存在する場合。(c) 亜臨界分岐。平衡振幅が存在しない場合。図中実線は安定な平衡振幅を、破線は不安定な平衡振幅を表す。

2. 平坦床-反砂堆遷移の分岐形態

upper regime では Froude 数が臨界値を越えると平坦床が不安定となり反砂堆が発生する。このことから平坦床-反砂堆遷移過程において考えられる分岐形態を示したのが図-1 である。図中、 A および F 、 F_c はそれぞれ反砂堆の振幅および Froude 数、臨界 Froude 数を、実線および破線はそれぞれ安定および不安定な平衡振幅を表している。(a) は超臨界分岐であり、Froude 数が臨界 Froude 数を超えると安定な有限平衡振幅が現れる。一方 (b) および (c) は亜臨界分岐であり、安定な有限平衡振幅が存在するか否かによって二つのケースに分けられる。すなわち (b) は不安定な有限平衡振幅が臨界 Froude 数以下の領域に現れ、その外側 (振幅 A の大きい領域) に安定な有限平衡振幅が現れる場合であり、(c) は不安定な有限平衡振幅しか現れない場合である。(b) の場合、反砂堆はある波高に達するとそれ以上発達しない平衡状態となるが、(c) の場合は平衡状態が存在しないため、どこまでも発達していくことになる。

前述の観測結果からは遡上反砂堆は安定な平衡振幅を持たないことが推測されるが、そのとき平坦床-反砂堆遷移の分岐形態は (c) であることが予想される。以降の節では、弱非線形安定解析の手法を用いることによって、平坦床-反砂堆遷移過程の分岐形態を明らかにする。

3. 定式化

(1) 流れの方程式

開水路内の流れを、Reynolds 平均を取り平坦床等流状態における摩擦速度 U_{f0}^* および水深 D_0^* を用いて無次元化した Navier-Stokes 方程式を用いて表す。ただし、これまでの砂堆の解析では、河床形状の時間変化に対して流れの時間変化が十分大きいことから、流れの方程式の中の時間微分項を無視する準定常の仮定を用いていたが、反砂堆が形成されるような Froude 数が大きい領域では河床形状の時間変化が大きくなることが予想されるため、準定常の仮定を用いない定式化を行う。そのとき流れの支配方程式は次のように表される。

$$\beta \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

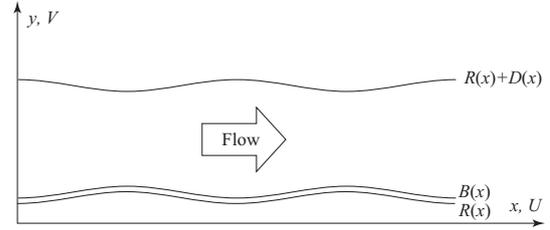


図-2 河床波上の流れの概念図と座標系。

$$\beta \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで t は時間、 x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 P はピエゾ圧力、 U および V はそれぞれ流速の x および y 方向成分 T_{ij} ($i, j = x, y$) は Reynolds 応力テンソルである。 β は河床変化に対する流れの変化の時間スケールの比であり、次式で表される。

$$\beta = \frac{R_s^{1/2}}{(1 - \lambda_p) S^{1/2}} \left(\frac{d_s^*}{D_0^*} \right)^{3/2} \quad (4)$$

ここで R_s および d_s^* 、 λ_p はそれぞれ砂粒子の水中比重 (= 1.65) および粒径、空隙率、 S は河床勾配である。混合距離モデルを用いると Reynolds 応力は次のように表される。

$$(T_{xx}, T_{yy}) = 2\nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right), \quad T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (5a, b)$$

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad l = \kappa (y - Z) \left(\frac{D + R - y}{D} \right)^{1/2} \quad (5c, d)$$

ここで ν_T は $U_{f0}^* D_0^*$ で無次元化した渦動粘性係数、 l および Z 、 D 、 R はそれぞれ D_0^* で無次元化した混合距離および河床高さ、水深、対数流速分布において流速がゼロとなる参照高さ (図-2 参照)、 κ は Karman 定数 (= 0.4) である。

(2) 河床高さの時間変化

河床上の土砂の連続式は次のように表される。

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

ここで B は掃流層上面の高さ (図-2 参照), Φ は無次元掃流砂量 ($= q_s^*/(R_s g d_s^{*3})^{1/2}$), q_s^* は次元量の掃流砂量である。

掃流砂量の見積りには, Colombini⁶⁾が提案した, 底面剪断力の代わりに掃流層上面の接線方向剪断力を用いた Meyer-Peter & Müller の掃流砂量式を用いる。

$$\Phi = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \quad (7)$$

ここで θ_b および θ_c はそれぞれ掃流層上面における接線方向無次元剪断力および限界無次元剪断力であり, 次のように表される。

$$\theta_b = \frac{\tau_b^*}{\rho R_s g d_s^*}, \quad \theta_c = \theta_{ch} - \mu \left(S - \frac{\partial B}{\partial x} \right), \quad \mu = \frac{\theta_{ch}}{\tan \Psi} \quad (8a-c)$$

ここで θ_{ch} は平坦床に対応する限界無次元剪断力であり, Ψ は摩擦角である。ここでは $\mu = 0.1$ とした。

Colombini⁶⁾は, これまでの実験結果から掃流層厚 h_b を次のように見積もった。

$$h_b = l_b d_s, \quad l_b = 1 + 1.3 \left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right)^{0.55} \quad (9a, b)$$

ここで τ_r および τ_c はそれぞれ参照高さ ($y = R$) における剪断力および限界剪断力である。掃流層厚 h_b は B と次のように関係づけられる。

$$B = h_b + d_s/6 = (l_b + 1/6) d_s = (l_b + 1/6) \frac{30R}{m} \quad (10)$$

ここで $m = k_s/d_s$ であり 2.5 とする。上記の Colombini⁶⁾ の掃流砂量モデルが物理的に適当であるかどうかについては未だ議論の余地があるが, 特に本研究で対象としている反砂堆の領域では実験結果との一致が向上しているのは事実である。本研究でも Colombini⁶⁾ のモデルをそのまま採用することにする。

(3) 流関数の導入と変数変換

解析を容易にするために次のような流関数を導入する。

$$(U, V) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (11)$$

すると式 (1) は次のように書くことができる。

$$\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v_T \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \quad (12)$$

上式と式 (2) から P を消去し, (U, V) を $(\partial \psi / \partial y, -\partial \psi / \partial x)$ に書き換えると次式が得られる。

$$\beta \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(v_T \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[v_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \quad (13)$$

底面および水面における境界条件の適用を容易にするために, 次のような変数変換を導入する。

$$(\xi, \eta) = \left(x, \frac{y - R(x)}{D(x)} \right) \quad (14)$$

上式の変数変換を用いると, 例えば混合距離 l は次のように書き直すことができる。

$$l = \kappa D \left(\eta + \frac{R - Z}{D} \right) (1 - \eta)^{1/2} \quad (15)$$

(4) 境界条件

水面と底面における境界条件は次のように書くことができる。

$$\left[\beta \frac{\partial(Z+D)}{\partial t} \mathbf{k} - \mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } \eta = 1 \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } \eta = 1 \quad (17)$$

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } \eta = 1 \quad (18)$$

$$\left[\beta \frac{\partial Z}{\partial t} \mathbf{k} - \mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{e}_{nb} = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (19)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{tb} = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (20)$$

ここで \mathbf{k} は鉛直方向単位ベクトル, \mathbf{u} は流速ベクトル ($= (U, V)$), \mathbf{e}_{ns} および \mathbf{e}_{ts} はそれぞれ水面に対する法線および接線方向の単位ベクトル, \mathbf{e}_{nb} および \mathbf{e}_{tb} はそれぞれ底面に対する法線および接線方向の単位ベクトルである。また \mathbf{T} は応力テンソルであり, 次式で表される。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -P + y/S + T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P + y/S + T_{yy} \end{bmatrix} \quad (21)$$

4. 一次元基本状態

安定解析の基本状態である, 平坦床等流状態における解を導く。平坦床等流状態における各変数を添字 0 を付けて次のように表すことにする。

$$(U, V, D, Z, R) = (U_0, 0, 1, 0, R_0) \quad (22)$$

そのとき支配方程式は次のようになる。

$$1 + \frac{dT_{xy0}}{d\eta} = 0, \quad T_{xy0} = v_{T0} \frac{dU_0}{d\eta} \quad (23a, b)$$

$$v_{T0} = l_0^2 \frac{dU_0}{d\eta}, \quad l_0 = \kappa(\eta + R_0)(1 - R_0 - \eta)^{1/2} \quad (23c, d)$$

上式を解くために, 次の境界条件を適用する。

$$U = 0, \quad T_{xy0} = 1 - R_0 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (24)$$

式 (23) および (24) より, 次の対数流速分布が得られる。

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (25)$$

上式を $\eta = 0$ から 1 まで積分すると抵抗則 (抵抗係数 $C^{-1} = U_{a0}^*/U_{f0}^*$) が次のように得られる。

$$C^{-1} = \frac{U_{a0}^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{\kappa} \left[(1 + R_0) \ln \left(\frac{1 + R_0}{R_0} \right) - 1 \right] \quad (26)$$

ここで U_{a0}^* は基本状態における水深平均流速である。

5. 線形安定解析

§4 で導かれた基本解に対し微小な擾乱 (摂動) を与える. 各変数を次のように展開する.

$$(\psi, P, D, Z, R, B) = (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0) + A(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1, \hat{R}_1, \hat{R}_1) \quad (27)$$

ここで A は摂動の振幅であり, 線形安定解析では無限小であると仮定する. 上式を式 (12) および (13) に代入し, A について整理すると, $O(A)$ において次式が得られる.

$$\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \xi} + \hat{\mathcal{R}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{R}}^R \hat{R}_1 + \hat{\mathcal{R}}^D \hat{D}_1 = 0 \quad (28)$$

$$\hat{\mathcal{L}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{L}}^D \hat{D}_1 + \hat{\mathcal{L}}^R \hat{R}_1 = 0 \quad (29)$$

境界条件 (16)–(20) および Exner 方程式 (6) から次式が得られる.

$$\beta \frac{\partial(\hat{R}_1 + \hat{D}_1)}{\partial t} + \partial \hat{\psi}_1 / \partial \xi = \hat{P}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 1 \quad (30)$$

$$\beta \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial t} + \partial \hat{\psi}_1 / \partial \xi = \partial \hat{\psi}_1 / \partial \eta = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \quad (31)$$

$$\hat{\mathcal{E}}^\psi \hat{\psi}(\eta_B) + \hat{\mathcal{E}}^R \hat{R}_1 + \hat{\mathcal{E}}^D \hat{D}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \eta_B \quad (32)$$

ここで $\eta_B = (B - R)/D$, $\hat{\mathcal{L}}^\phi$ および $\hat{\mathcal{R}}^\phi$, $\hat{\mathcal{E}}^\phi$ ($\phi = \psi, D, R$) は線形演算子であり, 準定常の仮定を行っていない現解析では, 時間微分項まで含んだ演算子となっている. ただし, その具体的な形はスペースの都合上省略する.

ここでノーマルモード解析を行うために, 摂動が次のように表されるとする.

$$(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1) = (\psi_1, P_1, D_1, R_1) e^{\Omega t} e^{i(\alpha \xi - \omega t)} \quad (33)$$

ここで α および $\omega + i\Omega$ はそれぞれ摂動の波数および複素角周波数である. 上式を式 (28)–(32) に代入すると次式が得られる.

$$\mathcal{L}^\psi(\eta) \psi_1(\eta) + \mathcal{L}^D(\eta) D_1 + \mathcal{L}^R(\eta) R_1 = 0 \quad (34)$$

$$\mathcal{R}^\psi(1) \psi_1(\eta) + \mathcal{R}^D(1) D_1 + \mathcal{R}^R(1) R_1 = 0 \quad (35)$$

$$\beta(\omega + i\Omega)(R_1 + D_1) - \alpha \psi_1(1) = 0 \quad (36)$$

$$\beta(\omega + i\Omega) R_1 - \alpha \psi_1(0) = 0 \quad (37)$$

$$\mathcal{D} \psi_1(0) = 0 \quad (38)$$

$$\mathcal{E}^\psi \psi_1(\eta_B) + \mathcal{E}^R R_1 + \mathcal{E}^D D_1 = 0 \quad (39)$$

ここで $\mathcal{D} = d/d\eta$ である.

Chebyshev 多項式を用いると ψ_1 は次のように展開される.

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\zeta) \quad (40)$$

ここで T_n は n 次の Chebyshev 多項式であり, ζ は $[-1, 1]$ を定義域に持つ Chebyshev 多項式の独立変数である. さ

らにここでは解析の精度を向上させるために, 次のような変数変換を行っている.

$$\zeta = 2 \left\{ \frac{\ln[(\eta + R_0)/R_0]}{\ln[(1 + R_0)/R_0]} \right\} - 1 \quad (41)$$

式 (40) を支配方程式に代入した後, 次の Gauss-Lobatto 点において評価する.

$$\zeta_j = \cos(j\pi/N), \quad (j = 1, \dots, N-2) \quad (42)$$

Gauss-Lobatto 点で評価した支配方程式と境界条件から, 次のような線形代数方程式系が得られる.

$$\mathbf{L} \mathbf{a} = 0 \quad (43)$$

ここで

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N, D_1, R_1] \quad (44)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{E}}^\psi T_0(\zeta_B) & \dots & \hat{\mathcal{E}}^\psi T_N(\zeta_B) & \hat{\mathcal{E}}^D & \hat{\mathcal{E}}^R \\ -\alpha T_0(-1) & \dots & -\alpha T_N(-1) & 0 & \beta(\omega + i\Omega) \\ \hat{\mathcal{D}} T_0(-1) & \dots & \hat{\mathcal{D}} T_N(-1) & 0 & 0 \\ -\alpha T_0(1) & \dots & -\alpha T_N(1) & \beta(\omega + i\Omega) & \beta(\omega + i\Omega) \\ \hat{\mathcal{R}}^\psi T_0(1) & \dots & \hat{\mathcal{R}}^\psi T_N(1) & \hat{\mathcal{R}}^D & \hat{\mathcal{R}}^R \\ \hat{\mathcal{L}}^\psi T_0(\zeta_1) & \dots & \hat{\mathcal{L}}^\psi T_N(\zeta_1) & \hat{\mathcal{L}}^D & \hat{\mathcal{L}}^R \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathcal{L}}^\psi T_0(\zeta_{N-2}) & \dots & \hat{\mathcal{L}}^\psi T_N(\zeta_{N-2}) & \hat{\mathcal{L}}^D & \hat{\mathcal{L}}^R \end{pmatrix} \quad (45)$$

式 (45) 中の $\hat{\mathcal{L}}^\psi$ は独立変数 η を ζ に変数変換した線形演算子を表している. また Exner 方程式と四つの境界条件を \mathbf{L} の最初の五行に挿入されている. 式 (43) が自明でない解を持つためには, 可解条件 $|\mathbf{L}| = 0$ が成立しなければならない. この可解条件から, 次のような一般的な形で表される複素各周波数 $\omega + i\Omega$ が得られる.

$$\omega + i\Omega = f(\alpha, F; C) \quad (46)$$

Ω が摂動の成長速度に対応している.

図-3 に α - F 平面における Ω のコンタを示した. 図中縦軸が Froude 数 F を, 横軸が波数 α を表している. 図を見るとわかるように Froude 数が 0.8–1 より大きい領域と小さい領域に, Ω が正の領域が 2 箇所現れる. 前者が本研究で対象としている反砂堆の発生領域であり, この領域において Froude 数が最小となる点 (図中黒丸) の Froude 数が反砂堆の臨界 Froude 数である. 次の節では, この臨界 Froude 数の近傍で解がどのように分岐しているのかを, 増幅率展開法を用いた弱非線形安定解析の手法を用いて明らかにする.

6. 弱非線形安定解析

臨界 Froude 数よりわずかに大きい領域での解の挙動を調べるために, 次のような微小パラメータ ϵ を導入する.

$$\epsilon = \left(\frac{F - F_c}{F_c} \right)^{1/2} \quad (47)$$

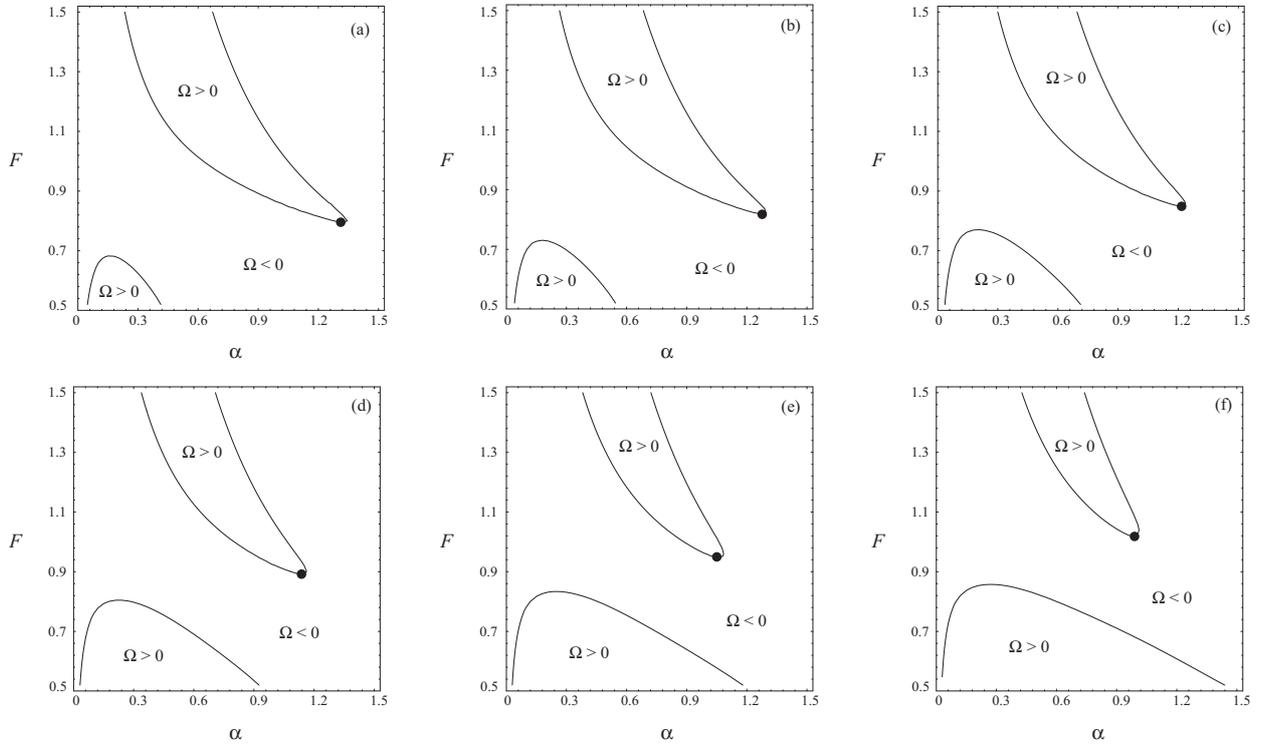


図-3 安定性ダイアグラム. (a) $C^{-1} = 16$, (b) $C^{-1} = 17$, (c) $C^{-1} = 18$, (d) $C^{-1} = 19$, (e) $C^{-1} = 20$, (f) $C^{-1} = 21$,

ここで F_c は臨界 Froude 数である. デューンの場合と異なり, 反砂堆は Froude 数が臨界 Froude 数より大きい領域で発生するため, $F > F_c$ の領域を考えていることに注意する必要がある.

多重尺度法を用いるために, 次のように定義される二つの異なるスケールを持った時間変数 T_0 と T_1 を導入する.

$$(T_0, T_1) = (t, \epsilon^2 t), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_1} \quad (48a, b)$$

すべての変数を微小パラメータ ϵ を用いて次のように展開する.

$$(\psi, D, R) = (\psi_0, 1, R_0) + \sum_{i=1}^3 \epsilon^i (\psi_i, D_i, R_i) \quad (49)$$

$O(\epsilon)$ における解, すなわち与える基本擾乱が次のような形を持つと仮定しよう.

$$(\psi_1, D_1, R_1) = (\psi_{11}, D_{11}, R_{11}) E \quad (50a)$$

$$E = \exp[i(\alpha\xi - \omega t)] \quad (50b)$$

$O(\epsilon)$ における解の 2 次および 3 次の積の形を考えると $O(\epsilon^2)$ および $O(\epsilon^3)$ の解は次のような形を持つことが推測できる.

$$(\psi_2, D_2, R_2) = A^2 (\psi_{22}, D_{22}, R_{22}) E^2 + \text{c.c.} \\ + A\bar{A} (\psi_{20}, D_{20}, R_{20}) + (\psi_{00}, 0, 0) \quad (51)$$

$$(\psi_3, D_3, R_3) = A^3 (\psi_{33}, D_{33}, R_{33}) E^3 + \text{c.c.} \\ + (\psi_{31}, D_{31}, R_{31}) E + \text{c.c.} \quad (52)$$

式 (50)–(52) を式 (12) および (13), (16)–(20), (6) に代入し, ϵ の各オーダーで整理すると, 次のような結果が得られる.

$O(\epsilon)$:

$$\mathcal{L}_1^\psi \psi_{11} + \mathcal{L}_1^D D_{11} + \mathcal{L}_1^R R_{11} = 0 \quad (53)$$

$$\mathcal{E}_1^\psi \psi_{11}(\eta_B) + \mathcal{E}_1^D D_{11} + \mathcal{E}_1^R R_{11} = 0 \quad (54)$$

$$\beta\omega R_{11} - \alpha\psi_{11}(0) = \mathcal{D}_1 \psi_{11}(0) \\ = \beta\omega(R_{11} + D_{11}) - \alpha\psi_{11}(1) = 0 \quad (55)$$

$$\mathcal{R}_1^\psi(1)\psi_{11}(1) + \mathcal{R}_1^D(1)D_{11} + \mathcal{R}_1^R(1)R_{11} = 0 \quad (56)$$

$O(\epsilon^2)$:

$$\mathcal{L}_2^\psi \psi_{22} + \mathcal{L}_2^D D_{22} + \mathcal{L}_2^R R_{22} = \mathcal{N}_{22} \quad (57)$$

$$\mathcal{E}_2^\psi \psi_{22}(\eta_B) + \mathcal{E}_2^D D_{22} + \mathcal{E}_2^R R_{22} = \mathcal{S}_{22} \quad (58)$$

$$\beta\omega R_{22} - \alpha\psi_{22}(0) = \mathcal{D}_2 \psi_{22}(0) \\ = \beta\omega(R_{22} + D_{22}) - \alpha\psi_{22}(1) = 0 \quad (59)$$

$$\mathcal{R}_1^\psi(1)\psi_{22}(1) + \mathcal{R}_1^D(1)D_{22} + \mathcal{R}_1^R(1)R_{22} = \mathcal{P}_{22} \quad (60)$$

$$\mathcal{L}_0^\psi \psi_{20} + \mathcal{L}_0^D D_{20} + \mathcal{L}_0^R R_{20} = \mathcal{N}_{20} \quad (61)$$

$$\mathcal{E}_0^\psi \psi_{20}(\eta_B) + \mathcal{E}_0^D D_{20} + \mathcal{E}_0^R R_{20} = \mathcal{S}_{20} \quad (62)$$

$$\psi_{20}(0) = \mathcal{D}\psi_{20}(0) = \psi_{20}(1) = 0 \quad (63)$$

$$\mathcal{R}_0^\psi(1)\psi_{20}(1) + \mathcal{R}_0^D(1)D_{20} + \mathcal{R}_0^R(1)R_{20} = \mathcal{P}_{20} \quad (64)$$

$O(\epsilon^3)$:

$$\mathcal{L}_1^\psi \psi_{31} + \mathcal{L}_1^D D_{31} + \mathcal{L}_1^R R_{31} = \mathcal{N}_{31} \quad (65)$$

$$\mathcal{E}_1^\psi \psi_{31}(\eta_B) + \mathcal{E}_1^D D_{31} + \mathcal{E}_1^R R_{31} = \mathcal{S}_{31} \quad (66)$$

表-1 臨界 Froude 数と Landau 定数.

C^{-1}	α	F_c	ω	$\text{Re}[\lambda_0]$	$\text{Re}[\lambda_1]$
16	1.329	0.795	-8.31	32.2	-56.3
17	1.282	0.818	-12.2	38.4	32.9
18	1.219	0.850	-17.6	44.2	168
19	1.144	0.892	-23.9	47.2	370
20	1.063	0.948	-30.1	47.4	652
21	0.991	1.018	-34.4	45.6	1120

表-2 福岡らの実験結果⁸⁾.

Run	d_s^* (mm)	D_0^* (cm)	C^{-1}	jump
1	0.19	4.0	17.1	伴う
2	0.19	2.7	16.1	伴う
3	0.19	4.5	17.4	伴う
9	0.19	3.42	16.7	時々起こす
10	0.19	5.38	17.8	時々起こす
28	0.19	3.96	17.1	時々起こす
101	0.4	2.45	14.0	ほとんどなし
102	0.4	1.72	13.2	ほとんどなし
139	0.19	4.26	17.3	伴う

$$\beta\omega R_{31} - \alpha\psi_{31}(0) = \mathcal{D}\psi_{31}(0) \\ = \beta\omega(R_{31} + D_{31}) - \alpha\psi_{31}(1) = 0 \quad (67)$$

$$\mathcal{R}_1^\psi(1)\psi_{31}(1) + \mathcal{R}_1^D(1)D_{31} + \mathcal{R}_1^R(1)R_{31} = \mathcal{P}_{31} \quad (68)$$

ここで \mathcal{L}_n^ϕ および \mathcal{R}_n^ϕ , \mathcal{E}_n^ϕ ($\phi = \psi, D, R; n = 0, 1, 2$) はそれぞれ (F, k) を (F_c, nk) に入れ替えて Ω をゼロとした \mathcal{L}^ϕ および \mathcal{R}^ϕ , \mathcal{E}^ϕ であり, \mathcal{N}_{ij} および \mathcal{S}_{ij} , \mathcal{P}_{ij} ($(i, j) = (1, 1), (2, 2), (2, 0), (3, 1)$) はより低次の解からなる非同次項である.

Chebyshev 多項式展開を用いたスペクトルコロケーション法を使うと上式の解は次のように得られる.

$$\frac{dA}{dT_1} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \quad (69)$$

ここで λ_0 は線形増幅率に相当し, λ_1 は Landau 定数である. 式(69)の平衡解は $\sqrt{-\text{Re}[\lambda_0]/\text{Re}[\lambda_1]}$ と表される. $\text{Re}[\lambda_1] > 0$ であるとき, $\text{Re}[\lambda_0] > 0$ の領域には物理的に意味のある平衡解が存在しない, 亜臨界分岐となることになる.

7. 結果と考察

表-1 は, 線形・弱非線形安定解析によって得られた臨界 Froude 数と Landau 定数を示した表である. $C^{-1} = 16$ のとき $\text{Re}[\lambda_1]$ は負の値となり平坦床-反砂堆遷移過程の分岐形態は超臨界分岐となるが, C^{-1} がそれより大きい場合, $\text{Re}[\lambda_1]$ が正となり亜臨界分岐 (図-1 の (b) か (c)) となる. またいずれの場合も河床波の位相速度を示す ω は負の値を取っており, 臨界 Froude 数付近では遡上反砂堆が発生することを示している.

表-2 は福岡ら⁸⁾の実験結果から, jump (跳水)を「伴う」,「時々起こす」,「ほとんどなし」と記述されているケースだけを抜き出したものである. 表には平均粒径 d_s^* および平均水深 D_0^* と, 粗度高さを $2.5d_s^*$ と仮定し, d_s^* および D_0^* を用いて式(26)から導いた C^{-1} の値が示されている. この表から, 遡上反砂堆が jump を伴い成長と破壊を繰り返すのは C^{-1} が 16 より大きくなる場合であり, 13-14 である Run 101 および 102 では, jump がほとんど見られず反砂堆が安定的に存在できていることが判る. このことは, 安定な有限平衡振幅は C^{-1} が小さい領域で存在するものの, 大きい領域では存在しないことを示唆している.

本解析によって, 平坦床-反砂堆遷移過程の分岐形態は C^{-1} が小さい内は図-1(a) となるが, C^{-1} が大きくなると図-1(b) あるいは (c) となることが明らかとなった. もし C^{-1} が大きいとき (c) の分岐形態を取るとすれば, 本解析の結果は福岡らの実験結果⁸⁾を良好に説明できることになる.

8. 結論

平坦床-反砂堆遷移過程の分岐特性を明らかにするために弱非線形安定解析を行った結果, その遷移過程は C^{-1} が大きいとき亜臨界分岐となり, C^{-1} が小さいとき超臨界分岐となることが明らかとなった. このことは, C^{-1} が大きい場合, 安定な有限平衡振幅が存在しない可能性を示しており, それによって遡上反砂堆の発達時に強い不安定性が現れる可能性が示唆された. この解析結果は実験結果とも整合性を持つことが示された.

参考文献

- 1) ASCE Task Force on Bed Forms in Alluvial Channels of the Committee on Sedimentation: Nomenclature for bed forms in alluvial channels, *J. Hyd. Div.*, Vol. 92(3), pp. 51-64, 1966.
- 2) 水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会: 移動床流れにおける河床形態と粗度, 土木学会論文報告集, 第 210 号, pp. 65-91, 1973.
- 3) Kennedy, J. F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, pp. 521-544, 1963.
- 4) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 225-244, 1970.
- 5) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channel, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, pp. 1-16, 1974.
- 6) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dunes formation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 502, 1-16, 2004.
- 7) 泉 典洋: 混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析, 水工学論文集, 第 51 巻, pp. 1021-1026, 2007.
- 8) 福岡捷二・奥津一夫・山坂昌成: 急勾配移動床流れにおける河床波の形状, 伝播特性, 土木学会論文報告集, 第 323 号, pp. 77-89, 1982.

(2008. 9. 30 受付)