

水深積分モデルによる非定常条件下での 砂堆の遷移過程に関する数値シミュレーション

NUMERICAL SIMULATION OF TRANSITION PROCESSES OF DUNES UNDER UNSTEADY FLOW CONDITION BY MEANS OF DEPTH AVERAGED FLOW MODEL

音田 慎一郎¹・細田 尚²
Shinichiro ONDA and Takashi HOSODA

¹正会員 博(工) 京都大学大学院助教 工学研究科都市社会工学専攻(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

²正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻(同上)

A flow resistance in a river changes with transition of sand waves and it is well known that the hysteresis can be observed during bed form transition under unsteady hydraulic conditions. In this study, a numerical model to reproduce the transition processes of dunes under unsteady flow condition is developed by combining a depth averaged flow model with the effects of vertical acceleration and a non-equilibrium sediment transport model. To verify the numerical model, calculated results of temporal changes in wave height, wave length and water depth are compared with the previous experimental study.

Key Words : dunes, unsteady hydraulic condition, Boussinesq equation, non-equilibrium sediment transport model, numerical simulation

1. はじめに

河床には、水理量に応じて種々の河床波が形成される。例えば、洪水時において、流量が小さい場合に形成された砂堆が流量の増加とともに消滅し、その後、流量の減少に伴って再び発生することが確認されており、流量増加時に砂堆が消滅する流量が、流量減少時に砂堆が再び発生する流量よりも大きくなるというヒステリシス現象を示すことが指摘されている。このような河床波の遷移過程における抵抗変化は、抵抗予測はという観点から河川工学的に非常に重要な課題であると考えられる。

こうした背景から、非定常条件下における河川の流水抵抗、及び河床波の変形過程について、実験的・理論的研究が行われている。澤井^{1), 2)}は、水路勾配・流量を変化させ、砂堆から反砂堆への遷移領域にまたがる河床波の変形過程について実験的に解明するとともに、その機構を定式化している。山口・泉ら^{3), 4)}は流量を増加・減少させて砂堆-平坦河床の遷移過程に関する実験を行い、遷移過程では複数の河床形態が存在する可能性を理論的に説明している。

また、数値解析的研究⁵⁾⁻¹⁰⁾についても行われており、例えばGiriら^{5), 6)}は、非線形 $k-\epsilon$ モデルを組み込んだ鉛直2次元流れ解析とpick-up rate, step lengthを用いた非平衡流砂モデルを適用し、さらにstep lengthの評価に無次元掃

流力の関数を導入することで非定常条件下における河床波の変形過程(ヒステリシス現象)を再現している。また、関根^{7), 8)}は個々の砂粒子の運動方程式を基礎とした数値解析を行っており、定常条件下における河床波の形成過程においてもstep lengthが河床波の発達に伴って変化することを指摘している。一方、著者ら⁹⁾は、鉛直加速度を考慮した1次元Boussinesq方程式と非平衡流砂モデルを組み合わせ、定常状態における砂堆の発生・発達過程に関する数値解析を行っている。しかし、流れの基礎式に定常を仮定した水面形方程式を用いていたため、非定常条件下における河床波の変形過程について考察することはできなかった。上記以外にも、河床波の形成・遷移過程に関する研究として、流れの基礎式に多次元モデルを適用した数値解析¹⁰⁾は行われているものの、実用上有用な水深積分型モデルによる検討は行われていない。

そこで本研究では、有用性の観点から1次元モデルを基本とし、流れの基礎式を非定常Boussinesq方程式に発展させるとともに、非平衡流砂モデルと組み合わせることで、非定常条件下での砂堆の遷移過程を再現できる数値解析モデルの構築を行う。モデルを澤井^{1), 2)}の実験に適用し、河床波の変形過程における非定常特性、及び抵抗特性について比較することで、モデルの検証を行う。

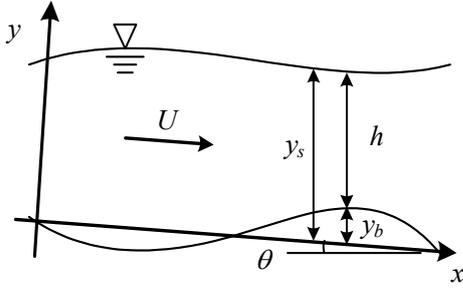


図-1 座標系の説明図

2. 数値解析法

(1) 流れの基礎式

流れの基礎式には、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル(Boussinesq方程式)を用いる。まず、誘導過程を以下に簡単に記載する。用いる座標系と記号は図-1のとおりである。x方向の流速成分 u を水深方向について一様と仮定すると、次式となる。

$$u(x, y) = U(x) \quad (1)$$

ここに、 x ：空間座標、 u ：流速ベクトルのx方向成分、 U ：水深平均流速である。

式(1)を連続式に代入し、 y から自由水面 y_s まで積分すると、 y 方向流速 v について次式が得られる。

$$v = nA + B \quad (2a)$$

ここに、

$$A = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad B = U \frac{\partial y_b}{\partial x} \quad (2b)$$

であり、 h ：水深、 y_b ：基準面からの路床変動、 $n = (y - y_b)/h$ である。

式(1)と(2)を鉛直方向の運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

に代入し、 y から自由水面 y_s まで積分すると圧力分布式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= g \cos \theta (h + y_b - y) + \frac{1}{2} h \frac{\partial A}{\partial t} (1 - n^2) \\ &+ h \frac{\partial B}{\partial t} (1 - n) + \frac{1}{2} U h \frac{\partial A}{\partial x} (1 - n^2) + U h \frac{\partial B}{\partial x} (1 - n) \end{aligned} \quad (4)$$

式(1), (2), (4)をx方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{xx}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} \right)$$

に代入し、路床から水面まで積分すると、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルが導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial U^2 h}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial y_b}{\partial x} \\ = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'^2} h \right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 q ：単位幅流量、 g ：重力加速度、 θ ：路床勾配、 ρ ：水の密度である。また、 P 及び $(p/\rho)_b$ は次式で定義さ

れる。

$$\begin{aligned} P &= \int_{y_b}^{y_s} \frac{p}{\rho} dy \\ &= \frac{gh^2}{2} \cos \theta + \frac{1}{3} h \left\{ -h \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right. \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} &- U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left. \right\} + \frac{1}{2} h \left\{ hU^2 \frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} \right. \\ &- U \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left. \right\} \\ \left(\frac{p}{\rho} \right)_b &= gh \cos \theta + \frac{1}{2} \left\{ -h \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right. \\ &+ hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left. \right\} \quad (6b) \\ &+ \left\{ hU^2 \frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} - U \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

式(6)の右辺2項目以降が鉛直加速度を考慮することによって付加される項である。また、式(5)の右辺最終項は乱れによる運動量輸送項であり、本研究では簡単のため、渦動粘性係数 $D = \alpha h U$ を用いて次のように評価した。

$$-\overline{u'^2} = D \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha h U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (7)$$

ここに、 α は係数であり、波状跳水を対象に同定された0.05を用いる¹¹⁾。

式(5)の右辺第2項の底面せん断応力の評価には、ポテンシャル流解析から得られる流速分布形と路床近傍の局所的な加速・減速効果を考慮した次式¹²⁾を適用する。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \Delta \frac{\partial y_b}{\partial x} \right), \quad \Gamma = 2, \Delta = 1 \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} u_b &= U + \frac{U}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial y_b}{\partial x} - \frac{q}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ &- \frac{q}{2} \frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial y_b}{\partial x} - \frac{h}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (8b)$$

なお、非定常Boussinesq方程式では、式(6a)中の右辺第2項に単位幅流量 q の時間微分が含まれるため、implicit的に解くことになる。

(2) 河床変動モデル

河床変動計算には、非平衡流砂モデルを適用する。

$$\frac{\partial y_b}{\partial t} = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{A_3}{A_2} d (p_d - p_s) \quad (9)$$

ここに、 p_s ：pick-up rate、 p_d ：deposit rate、 d ：河床材料の粒径、 λ ：河床の空隙率、 A_2 、 A_3 ：砂粒の2、3次元の形状係数(= $\pi/4$, $\pi/6$)である。

pick-up rateの算定¹³⁾には、次式を適用し、deposit rateはpick-upされた土砂体積が式(11)で表される確率密度関数に従って堆積するものとして計算する。

$$p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = \tau_* (1 - 0.035/\tau_*)^3 \quad (10)$$

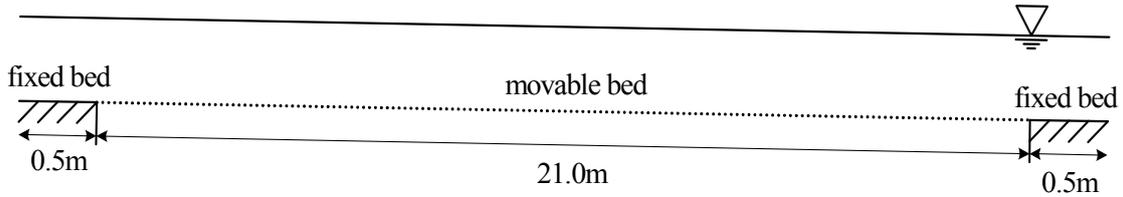


図-2 水路の概念図

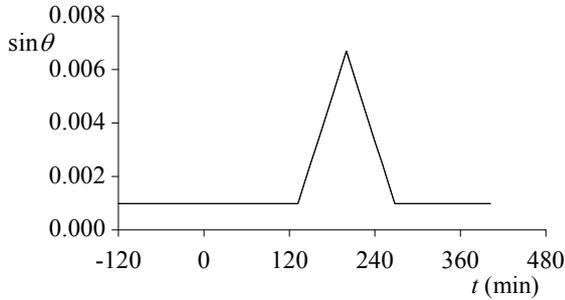


図-3 実験における水路勾配の時間変化

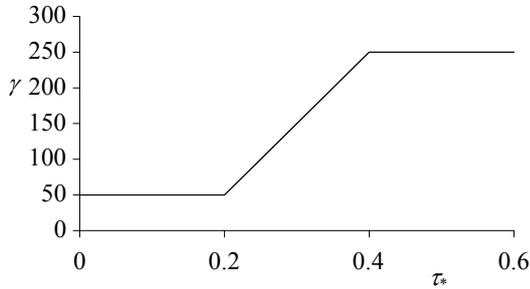


図-4 step lengthと無次元掃流力 τ_* の関係

$$f_s(s) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (11)$$

ここで、 τ_* ：無次元掃流力、 σ ：河床材料の密度、 s ：砂粒がpick-upされた地点からの距離、 Λ ：平均step lengthである。

3. 計算条件

上記のモデルを澤井^{1), 2)}の実験に適用し、モデルの妥当性を検証する。図-2に示すように全長22mの水路の上下流端に0.5mの固定床を設け、その間の21mを移動床区間とした。澤井らの実験では、図-3に示すように水路勾配を時間的に変化させており、1/1000を初期勾配として132分通水した後、勾配を1/1000から1/150まで等速(=1/12000/min)で上昇させ、直ちに同じ速度で1/1000まで下降させ、再度1/1000に保って通水が行われている。なお、単位幅流量 q 、河床材料の平均粒径 d はそれぞれ600cm³/s/cm、0.08cmである。数値解析においても同じ条件のもとで計算するが、図-3のように2時間の助走計算を行っている。また、計算時間短縮のため、流れの計算時間間隔 Δt_f と河床変動計算の時間間隔 Δt_s を変えて計算を行った。即ち、 $\Delta t_f = 0.005$ sとして100ステップ流れの計算を行い、その後 $\Delta t_f = 0.5$ sとして河床変動計算を

表-1 計算条件

	step length Λ	f
Run1	Eq. (12)	Eq. (13)
Run2	50d	Eq. (13)
Run3	Eq. (12)	0.008

行った。x座標の原点は上流側固定床部の上流端であり、 Δx は2cmとした。また、式(5)中の移流項には1次精度の風上差分を適用した。

境界条件として、上流端で流量を、下流端で流量に応じた等流水深を与えた。流砂量については、移動床部の平均河床が低下しないように固定床下流側から土砂をpick-upさせ、土砂の供給を行い、河床変動計算後、河床高を0にした。また、水深勾配が大きい場合に生じる砕波をある程度再現するために、水深勾配が基準値を超えると鉛直加速度項に減衰関数を乗じている⁹⁾。

ここで、河床波の変形過程に影響を与えるパラメータとして、step length Λ 、及び摩擦損失係数 f が考えられる。step length Λ は通常、粒径の定数倍($\Lambda = \gamma d$, γ は定数であり、50~250とされる)として評価されるが、定常条件下においても河床波の発達に伴って平均step lengthが変化すること⁷⁾、また γ の値によって砂堆の波高、波長が異なること¹⁴⁾が指摘されており、計算結果¹⁴⁾をみると γ の値が大きいとき、波長が若干長くなっている。非定常条件下においてもstep lengthは重要なパラメータであると考えられ、Giriら⁶⁾は、step lengthを無次元掃流力 τ_* の関数として与えている。これは、流量(無次元掃流力)が小さいとき、step lengthの値も小さいが、流量(無次元掃流力)が大きくなるとstep lengthを大きくし、波長を長くするように作用させることで、砂堆が消滅する過程をモデル化したものであると考えられる。そこで、本研究でも以下に示す関係式を導入してstep lengthを評価した。但し、 γ の値については図-4に示すように与えた。

$$\Lambda = \gamma d \quad (12)$$

一方、非定常条件下において、流量の変化に対する水深の変化が異なるため、河床波が遷移することも考えられる。粗面での対数則による平均流速公式において、流速係数 U/u_* は相対水深 h/k_s (k_s : 等価粗度)の関数であり、例えば、等価粗度を一定値とした場合、流量(水深)が小さいとき流速係数は小さく(この場合、摩擦損失係数は大きい)、流量(水深)が大きくなると流速係数も大きくなる(摩擦損失係数は小さくなる)。従って、非定常条件下において流量と水深の変化過程が異なり、流況(Fr 数等)

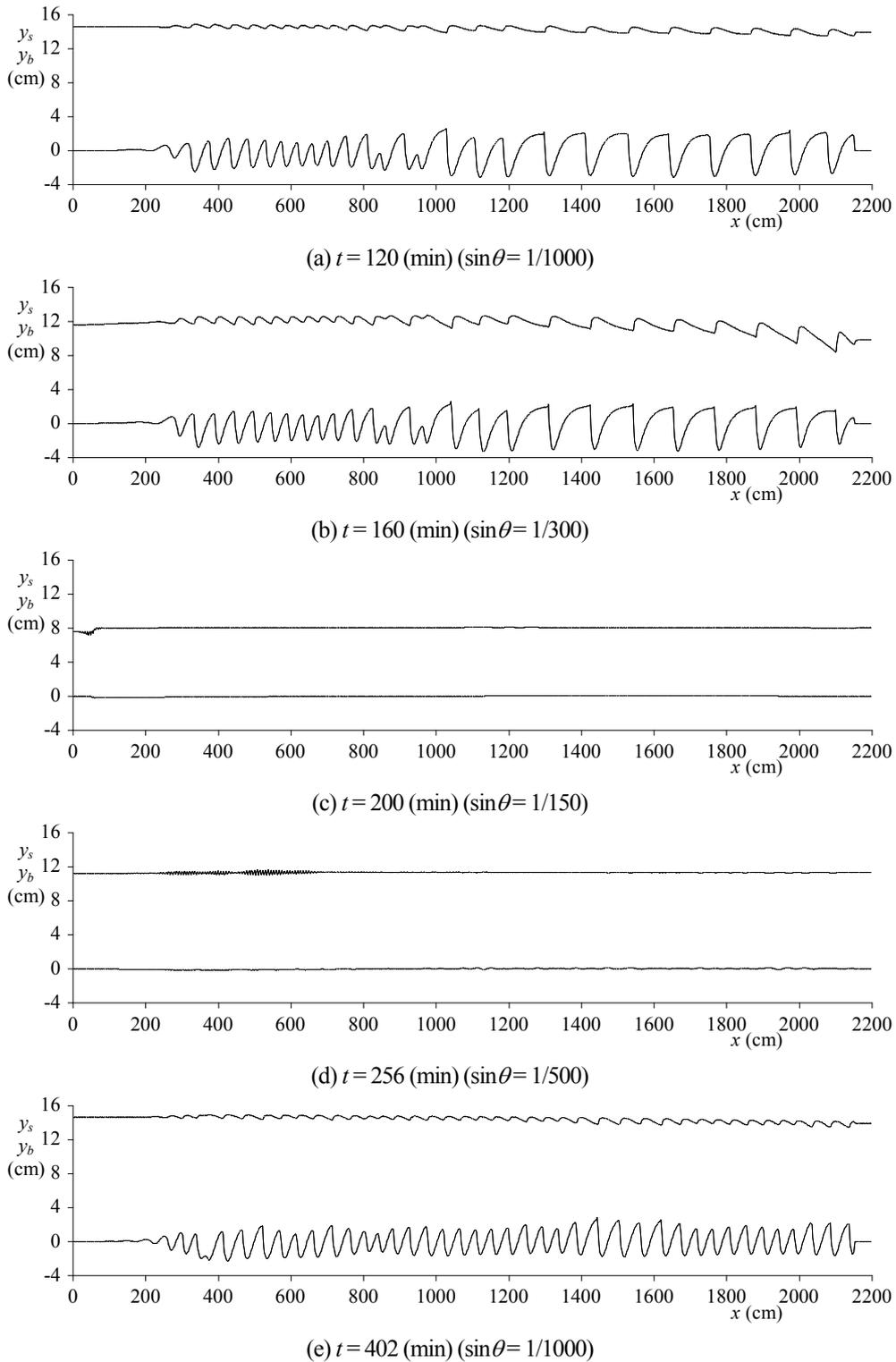


図-5 Run1における水面と河床高の時間変化

が変わること河床波が変形することが考えられる。本研究では、以下のように摩擦損失係数を評価した¹⁵⁾。

$$\frac{u_b}{u_*} = \frac{1}{\sqrt{f}} = 1.9 + 2.5 \ln \left(\frac{h}{k_s} \right) \quad (13)$$

ここで、 h は全区間での平均水深を用いて評価し、 k_s は粒径 d の3.5倍とした。

計算条件を表-1に示す。本研究では、step length Λ 、及び摩擦損失係数 f の値を一定値とした場合について

も検討した。

4. 計算結果と考察

まず、実験結果の報告^{1), 2)}を整理すると勾配の上昇に伴い、1/300付近で砂堆から反砂堆への遷移が生じている。勾配が1/150から減少し始めると、河床形状が不規

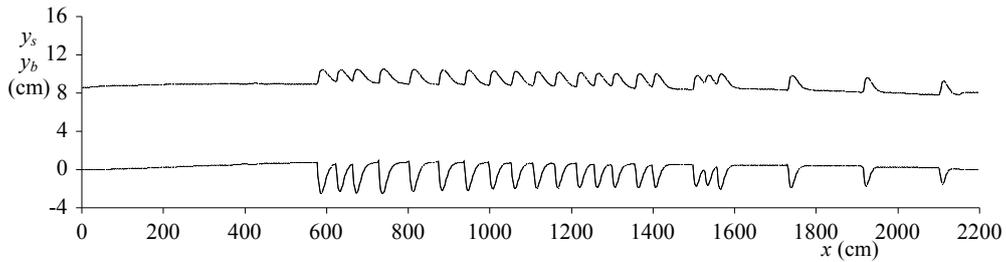
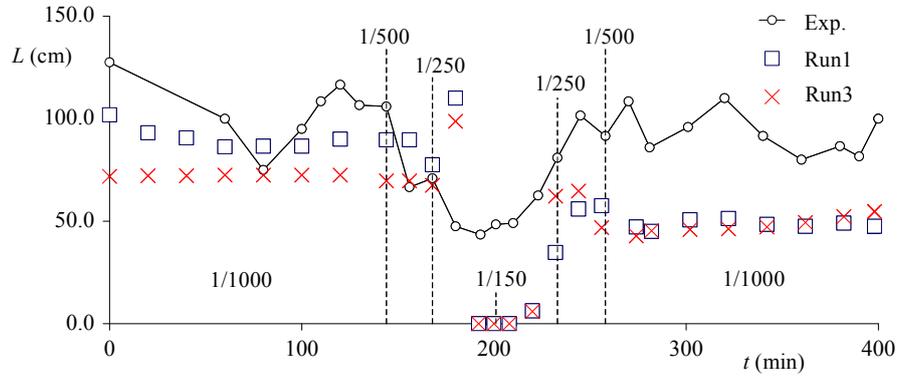
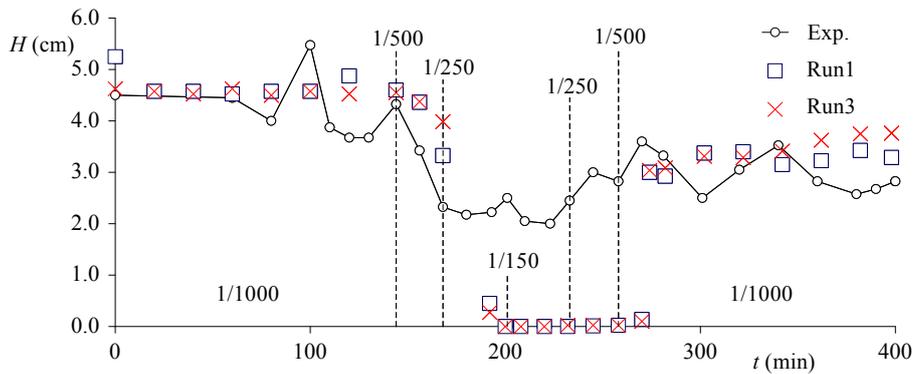


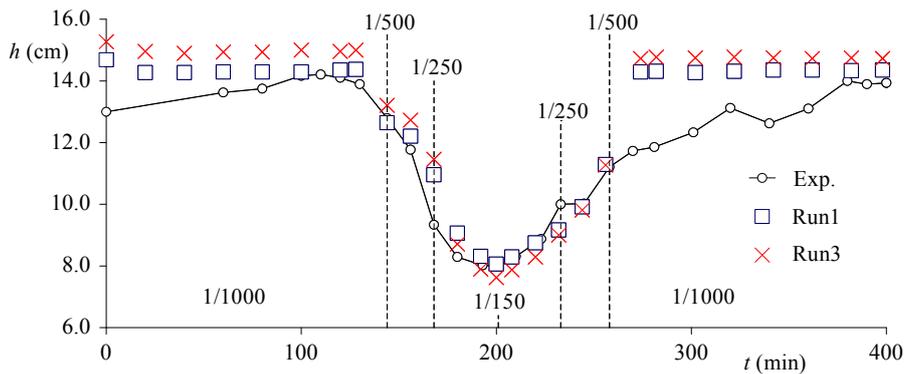
図-6 Run2における水面形と河床高 ($t = 200$ (min), $\sin\theta = 1/150$)



(a) 波長



(b) 波高



(c) 水深

図-7 平均水理量の時間変化

則となり、 $1/300$ 程度まで勾配が減少すると、再び砂堆が形成している。

次に、計算結果の考察を行う。図-5はRun1における水面と河床高の時間変化を表したものである。 $t = 120, 160$ minの結果をみると砂堆の形成に伴い、抵抗の増加が見られる。これは、鉛直加速度項が形状抵抗として作用したためである。その後、時間の経過とともに砂堆が

消滅し、 $t = 200$ minではほぼ平坦河床となっている。また、勾配が減少すると、 $t = 256$ minあたりから砂堆が発生・発達していく様子が確認される。Run2における $t = 200$ minでの計算結果を図-6に示す。この場合、step lengthを粒径の50倍として固定しており、pick-up地点から近い位置に土砂が堆積しやすいため、勾配が $1/150$ のときでも砂堆の消滅が再現できなかった。従って、砂堆

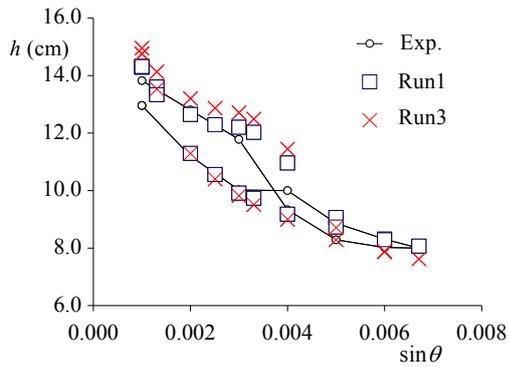


図-8 水深の履歴

の変形過程を再現するには、Giriら⁶⁾、関根⁷⁾が指摘しているようにstep lengthの取り扱いに注意を要する必要があることがわかる。Run3の計算結果は紙面の都合上、省略するが、河床波の変形過程はRun1とほぼ変わらなかった。

$x = 800\text{cm}$ から 1600cm 区間での計算結果をもとにRun1, 3における波長、波高、水深の時間変化について実験結果と比較したものが図-7である。図をみると、計算初期におけるRun3での波長が若干短いものの、勾配が1/250までは実験結果とよく適合している。その後、勾配が急になると計算結果の波長が長くなり($t = 180\text{min}$)、平坦河床に遷移するため、勾配が1/200から1/150付近での適合性が十分でない。再び、勾配を減少させると、河床波が形成する様子は再現できているが、波高、水深が急激に増大しており、実験結果に比べて波長が短い。この点については今後の検討を要する。今回の数値解析では、反砂堆への遷移、及び平坦河床から砂堆が形成するまでの変形過程を良好に再現することができなかった。その理由として次のように考えられる。実験では、砂堆から反砂堆、或いは反砂堆から砂堆への遷移過程において、完全に平坦河床になるのではなく、波高が小さくなって平坦河床に近づき、河床波が変形するのに対し、数値解析では波長の増大と波高の減少を伴いながら、完全に平坦河床となる。その結果、河床波が再び形成するためかなりの時間を要するため、反砂堆への遷移過程、及び砂堆の形成過程を再現できなかったと考えられる。砂堆から平坦床へ遷移する際の波長の増大は、鉛直2次元流れ解析を行ったGiriらの結果⁶⁾でも確認されており、これは無次元掃流力の増加に伴ってstep lengthを長くしたためである。従って、流れのモデルに簡易な1次元モデルを適用したために砂堆の遷移過程が再現できなかったとは考えにくい。今後、砂堆の遷移過程に関する実験を行い、現象の解明と流砂のモデル化について検討したい。一方、Run1, 3の計算結果について比較すると、大きな差異は見られなかったが、河床形態の遷移過程における抵抗則の評価は重要な課題であると考えられる。この点については、今後の検討課題としたい。

図-8は図-7のデータをもとに水深の履歴について整理し直したものである。図より勾配の減少、増加過程にお

いて、同じ勾配に対して2つの河床形態が現れることが確認され、本モデルはヒステリシス現象を再現していることがわかる。

4. おわりに

本研究では、非定常Boussinesq方程式と非平衡流砂モデルを組み合わせ、非定常条件下における砂堆の遷移過程の数値シミュレーションを行った。変形過程における砂堆の非定常特性について実験結果と比較することで、妥当な結果が得られたことを示した。今後、流量が変化する場合について考察するとともに、浮遊砂の計算を組み込み、モデルの発展について検討したい。

参考文献

- 1) 澤井健二：水理量の時間変化に伴う河床波の変形過程に関する研究，第31回水理講演会論文集，pp.647-652，1987。
- 2) Sawai, K.: Transformation of sand waves due to the time change of flow conditions, *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, Vol.5, No.2, pp.1-14, 1988.
- 3) 山口里美, 泉 典洋, 五十嵐 章：デューンの遷移過程に関する実験，*水工学論文集*，第47巻，pp.613-618，2004。
- 4) 山口里美, 泉 典洋：デューン-平坦床遷移過程に見られる亜臨界分岐現象，*土木学会論文集*，No.740/II-64，pp.75-94，2003。
- 5) Giri, S. and Shimizu, Y.: Numerical computation of sand dune migration with free surface flow, *Water Resources Research*, Vol.42, W10422, 2005.
- 6) Giri, S., Yamaguchi, S., Shimizu, Y. and Nelson, J.: Simulating temporal response of bedform characteristics to varying flows, *Proc. of River, Coastal and Estuarine Morphodynamics:RCEM 2007*, Vol.2, pp.939-946, 2007.
- 7) 関根正人：土砂粒子の運動の解析を基礎とした河床波の形成過程シミュレーションの試み，*土木学会論文集*，No.691/II-57，pp.85-92，2001。
- 8) 関根正人：砂礫の運動解析を基礎とした河床波形成過程シミュレーション，*水工学論文集*，第49巻，pp.973-978，2005。
- 9) 音田慎一郎，細田 尚：水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析，*水工学論文集*，第48巻，pp.973-978，2004。
- 10) Paarlberg, A.: Modelling dune evolution and dynamic roughness in rivers, PhD thesis, University of Twente, 2008.
- 11) 細田 尚，多田章秀：鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析，*水工学論文集*，第38巻，pp.457-462，1994。
- 12) 細田 尚，村本嘉雄，宮本雅章：水深積分モデルによる波状路床上流れの底面せん断応力解析，*土木学会論文集*，No.558/II-38，pp.81-89，1997。
- 13) Nakagawa, H., and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Proc. of ASCE*, Vol.106, HY12, pp.2029-2051, 1980.
- 14) Toyama, A., Shimizu, Y., Yamaguchi, S. and Giri, S.: Study of sediment transport rate over dune-covered beds, *Proc. of River, Coastal and Estuarine Morphodynamics:RCEM 2007*, Vol.1, pp.591-597, 2007.
- 15) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.42, pp.225-244, 1971.