斜面・河道発達過程の数理モデルを導入した模擬流域発生手法の開発

DEVELOPPING OF THE MODEL OF GENERATING VIRTUAL DRAINAGE BASIN INTRODUCED MATHEMATICAL MODEL OF SLOPE/STREAM EVOLUTION

中北英一[1]・杉谷祐二[2]
Eiichi NAKAKITA and Yuji SUGITANI

[1]正会員　工博　京都大学防災研究所教授　（〒611-0011 宇治市五ヶ庄）
[2]学生員　京都大学大学院　工学研究科修士課程都市社会工学専攻　（〒611-0011 宇治市五ヶ庄）

In this paper, we developed the method of generating virtual drainage basin to understand relationship among characteristics of geomorphic distribution, rainfall distribution, and runoff distribution. Here the concept of generating virtual drainage-basin is that the drainage-basins are generated at random under some physically based conditions on the basin form.

Our model is the improved model of Nakakita and Matsuda (2007). They proposed the method of generating virtual drainage-basin based on erosional developing model of channel network by Horton (1945). To improve it, we introduced mathematical models of evolution of slopes and streams into the model. As a result, we achieved to introduce the concept of time into the generating virtual drainage-basin model.

Key Words : *drainage basin, landform evolution, channel network, slope evolution, longitudinal profile.*

1．はじめに

流域上に降った降雨は，斜面および河道を経由して流域外へ排出される．つまり，流域地形および地質構造は与えられた降雨を流出に変換する役割をもつ．また，降雨の分布は地形性降雨という形で山地地形の影響を受け，逆に地形は，降雨や流出といった水文現象によって浸食という作用を受ける．このように降雨・地形・流出は，相互に影響しあう関係にある．本研究の目的は，流域地形の形成過程および平衡状態にある地形の中で，水文現象との相互作用を受けながら地形がどのように変化するのか，また逆にその地形が流域上の水文現象にどのような変化をもたらすのか．これらの問題を分析するために有効な流域地形モデルを作成することである．そのためには流域地形量などの特性が実流域と整合する模擬流域を，ランダム性を考慮して発生させる必要がある．

模擬流域発生手法については，過去に様々な研究がなされた．塚本[1)]は位数1の河道に単位面積の集水域が付属するという模擬流域を考えることで，流域高度分布と河道網構造の関係を説明した．前田[2)]は設定した河道網構造を満たす流域をランダムに発生させるモデルを開発した．これらモデルは初期条件として与えた流域の地形特性を満たす流域を作成するモデルである．しかし，地形発達過程の中での降雨・地形・流出の相互作用を考慮することが目的である本研究では，流域地形の発達過程を考慮しなければならない．

流域スケールでの地形発達モデルについては，以下のような研究が存在する．Tucker, Slingerland[3)]は，水流による土砂動態の物理プロセス，重力による作用，地殻運動を考慮した地形発達モデルを開発し，地形と気候条件を表すパラメータとの相互作用についての検討をおこなった．さらにTucker, Slingerland[4)]は，標高変化の過程の中に地すべり，飽和流，浸透流の効果の導入を検討した．また，Clevis, et. al.[5)]は，このモデルをベースに断層上の地形において，流域発達プロセスに関する検討を扇状地の形成過程に着目しておこなった．この研究では初期条件として地形に与えられたランダムな微小撹乱に依存した山地河道網の形成が表現されている．

一方，本研究では中北・松田[6)]による模擬流域発生手法を発展させたモデルを開発する．中北・松田の模擬流域発生モデルでは次章でも示す通りHorton[7)]の河道網発

達プロセスに基づいた手法を導入している．このモデルは浸食が卓越した山地流域を対象としている．また中北・松田は発生した模擬流域の地形特性として，次章で述べるHortonの法則[7]hypsometric曲線[8]に着目した検討を行っている．本研究では，地形発達に関わる個々の物理プロセスを直接地形発達モデルに組み込むのではなく，様々な物理プロセスの結果として現れる斜面および河道プロファイルの進化のプロセスを，数理モデルとして導入した模擬流域発生モデルを開発する．この数理モデルは時間を含んだ発達概念であるため，中北・松田の手法では存在しなかった流域地形発達の時間概念を導入することが可能となる．

２．模擬流域発生手法に関する既往研究

前章でも述べたとおり，本研究は中北・松田[6]による模擬流域発生手法を発展させた研究である．ここでは中北・松田の既往研究について説明する．

中北・松田は，Horton[7]による流域の浸食発達過程を基盤とした模擬流域発生手法を開発した．ここで，Hortonの流域の浸食発達理論を説明する．

まず流域発達の初期段階として流域一様な斜面を仮定する．降水によって初期斜面上に表面流が発生し，その表面流は斜面勾配の方向に流下するとともに斜面を浸食するため，初期斜面には勾配方向に幾筋もの平行な溝（リル）が生じる．図-1の図形bcc'b'は斜面にできたリル群の平面図である．図-1の①から⑤ではリル群の平面図におけるd-d'断面の鉛直断面図で浸食過程を説明している．リルは，①から③のように長いものほど浸食強度が大きいため広く深いリルとなる．斜面上の最長のリルは周囲のリルより浸食が卓越する．やがて④のように周囲のリルから水流が越流して流入し，斜面全体の流れは最長のリルへ集中し，最長のリルはさらに浸食される．こうして，⑤のように最長のリルを中心として両側に斜面ができ，V字谷ができあがる．

こうして一様な斜面は1つの河道(谷)とその両側の2つの斜面に変化する．次にこの2つの斜面上で，上記のような過程が繰り返され，新たな谷が形成される．その結果河道は分岐を持つようになり，このプロセスが繰り返されることで流域地形は河道網とともに発達していく．

中北・松田は，以上のようなHortonの浸食過程を踏まえて，以下のような模擬流域発生の手順を考えた．

まず，図-2左上のような一様方向の一定勾配を持つ初期斜面領域を設定する．次に，流域内の最長落水線の90%以上の長さを持つ落水線を全て抽出し，その中からランダムに1本の落水線を選択してそれを1本目の河道とする．図-2左上では初期斜面上の点線で選択した落水線が示されている．この落水線探索による手法は，Hortonの理論の中での「斜面上の最長のリルが谷になる」という概念に，ランダム性を加えた手法である．このランダム性を考慮することで，発生する模擬流域の地形に多様性を持たせることができる．

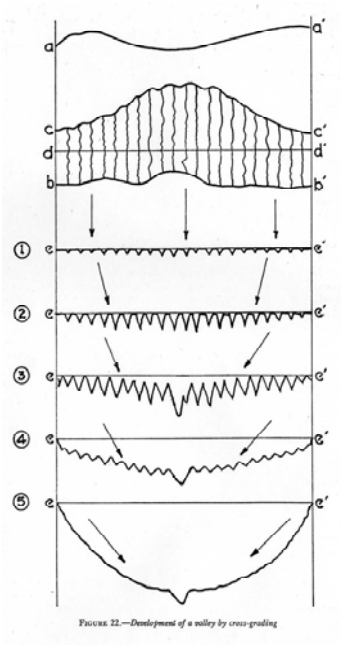

図-1　浸食による谷地形の形成理論，Horton[7].

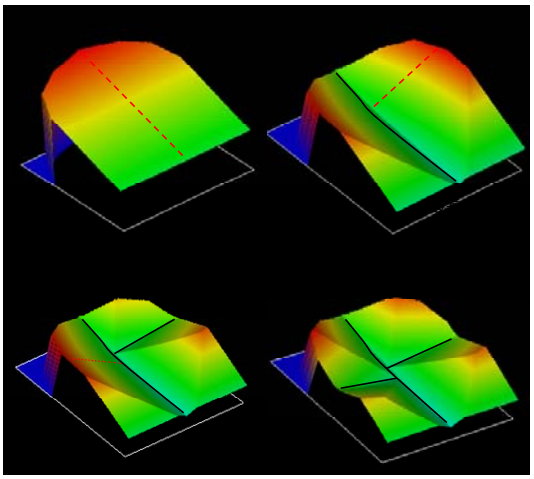

図-2　模擬流域発生過程，中北・松田[6].

選択された河道は定められた縦断形に従って標高が修正され，その河道の両岸には定められた一定勾配の斜面が形成される．これによって図-2右上のような地形が形成される．なお,この際の河道縦断形には実際の河川の縦断形を表現する手段としてStrahler(1952b)[9]による指数関数曲線で表現している．この地形から，上記と同様に最長落水線の90%以上の長さを持つ落水線を全て抽出し，その中からランダムに1本の落水線を選択し，2本目の河道とする．ただし，2本目の河道選択以降は，流域下端線からの落水線探索ではなく，河道点からスタートして上流方向への落水線探索を行う．2本目の河道は決められた河道縦断形に従って標高が修正され，その両岸の一定勾配の斜面も形成される．結果，図-2左下のような地

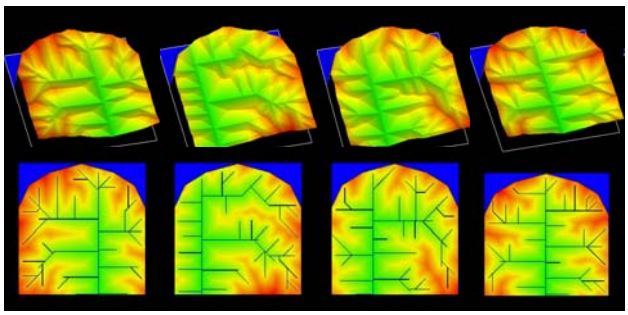

図-3　模擬流域発生例，中北・松田[6]．

形が形成される．

本来Hortonの河道浸食理論では卓越した谷地形の左右両岸から同時的に新たな谷が発生する．しかしこのモデルでは河道の同時発生は行わずに1本ずつ河道を発生させる．これは石原ら[10]の河道数則の統計則導出過程を参考にした手法である．石原らは1本ずつの河道形成を考えて，河道網構造に着目した分岐比の期待値を導出した．この結果と模擬流域の河道網構造との比較のために中北・松田は同様な河道発生過程を用いることとした．

このように，落水線探索による河道選択，選択された河道に沿った流域標高の修正の繰り返しで河道網が形成される．

この手法のストップ条件は，位数1の河道数で与える．図-3は発生河道数30の模擬流域を4つ発生させた例である．この図から，河道発生位置を最長落水線長の90%以上の中からランダムに選択することによって発生する河道網構造に多様性が生じることがわかる．

中北・松田は発生した模擬流域河道網の分岐比，河道長比，河道勾配比，集水面積比を導出し，Hortonの法則[7]との整合性を検討した．また，流域の高度分布を正規化して表現したhypsometric曲線[8]も導出し，適切に河道や斜面形状のパラメータを与えると模擬流域のhypsometric曲線が実流域の平衡地形である壮年期地形の特性を表現できていることを明らかにした．

3．斜面・河道発達過程の数理モデルを導入した模擬流域発生手法

中北・松田の模擬流域発生手法では，斜面勾配と河道勾配をあらかじめ設定した形状で与えていた．しかしこの手法では斜面と河道の発達過程を考慮していないため，モデル上で流域発達の時間発展を表現できないという大きな問題がある．また，将来的に降雨や流出の効果と地形との相互作用を表現するモデルへと発展させるためには，降雨，流出，地質構造の空間的分布を表現できることが望ましい．これらの問題を解決する方法として，本研究では中北・松田の模擬流域発生手法における斜面・河道の形成手法を改良し，それらの時間発展と空間分布を表現できる数理モデルを新たに導入する．

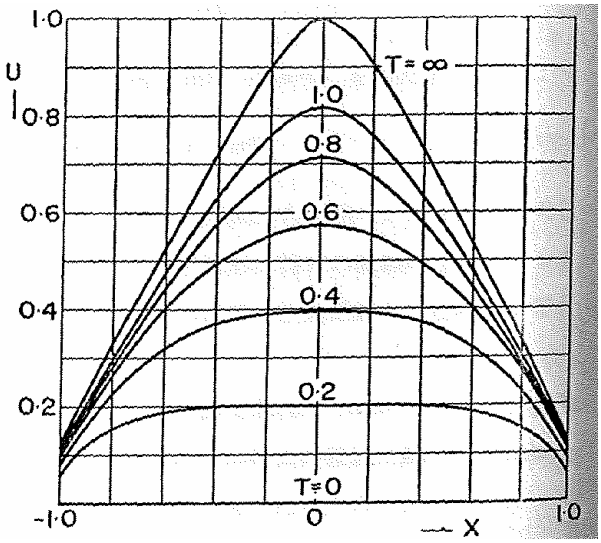

図-4　2つの河谷間の山体の発達過程，平野[11]．

(1) 斜面発達過程

本研究の模擬流域発生モデルにおいては，斜面発達過程の基礎方程式に平野[11]の式

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - b\frac{\partial z}{\partial x} + k \qquad (1)$$

を導入する．ここで，xは位置，tは時間，$z(x,t)$は標高を表す．a，bは係数で，aは従順化係数，bは後退係数と呼ばれている．$k(x,t)$は地盤運動による隆起速度である．式(1)の右辺第1項は斜面形状が丸みを帯びていく過程を表し，右辺第2項は斜面形状が平行後退する過程を表している．式(1)は，元々実際の斜面形の観測によって経験的に得られたものであるが，平野(1971)[12]によると右辺第1項は流水，クリープ，風化，雨洗の作用として，右辺第2項は流水の作用としての物理的意義を説明できるとしている．図-4は2つの河谷間の山体が式(1)に従って時間経過とともに発達する過程を表したものである．位置x，高度z，時刻tを，水平距離と平衡状態の山体の最大高度を基準に無次元化してそれぞれX, Z, Tとして式(1)の解析解を無次元時刻0.2ごとにプロットしている．ここで初期条件はT=0においてX=0，境界条件は全ての時刻でX=0において$\partial Z/\partial X$=0としている．時間が十分経過すると(T=∞)，山体はある定常状態に達することがわかる．これは地盤運動による隆起と外的営力による浸食，クリープなどの作用が動的平衡状態に達したことを意味する．

(2) 河道縦断形発達過程

野上[13]は，平野によって提唱された斜面発達の基礎方程式を河道縦断形にも適用することを試みた．すなわち，河道縦断形発達の方程式は，

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a_s \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - b_s \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (2)$$

で表される．この式については物理プロセスからの説明は難しい．しかし，野上は式(2)を実際の河川に適用して検討したところ，河道縦断形の発達をよく再現する結果が得られた．この式は河道の下流端点を標高一定（Dirichlet境界条件），河道上流端点を勾配一定（Neumann境界条件）とすると，指数関数曲線

$$z = C_1 e^{(-rx)} + C_2 \qquad (3)$$

に収束する．ただし，C_1，C_2は積分定数，$r=b_s/a_s$である．この収束形は実河川の河道縦断形の特性と一致し，中北・松田の模擬流域発生モデルにも導入されているStrahlerの指数関数曲線による河道縦断形と一致するものである．

(3) 模擬流域発生手法

本研究では以上のような斜面・河道発達過程の数理モデルを中北・松田の模擬流域発生モデルに導入する．

本研究ではまず初期条件として流域界形状を設定する．流域界形状が決定されると，流域界内部の標高0の平面地形が初期条件として与えられる．本研究では中北・松田の既往研究で用いられているような流域界形状を考え，図-5のような50mメッシュで与えられる初期地形を設定する．

この初期地形から斜面・河道発達を進行させる．最初は流域内に河道が存在しないものと見なし，斜面の発達のみを進行させる．境界条件としては，流域最下端線を一定標高z=0（Dirichlet境界条件），その他の流域境界線上では，境界線に対する法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$として，$\partial z/\partial \boldsymbol{n}$=0の，法線方向勾配ゼロの境界条件（Neumann型境界条件）として設定する．その上で，式(1)を三次元空間に拡張させた式

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - b|\nabla z| + k \qquad (4)$$

を差分展開して繰り返し計算を行う．差分計算では，2階微分項は周囲4地点のグリッドの標高差をもとにした前進差分法を用い，右辺第2項では落水線下流方向のグリッドの標高を用いた風上差分法によって計算している．なお，上式の係数は，流域一様で時間的に定常と考えて，a=0.012 m^2/year , b=1.0 mm/year , k=0.4 mm/year とした．この係数は平野(1972)[11]によると実際の山地地形において係数bは 1.0 mm/year 前後であるとの推定を参考にしている．

この計算を繰り返すと，図-5右で示すようにこれ以上標高が変化しない平衡状態に達する．本研究ではすべてのグリッドにおいて，標高が1回のタイムステップの計算で 5m 以上標高変化が無かった場合に流域は平衡状態に達したと見なす．

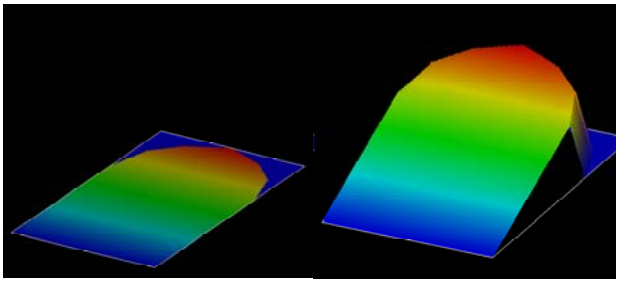

図-5　初期斜面と河道発生数0の平衡地形.

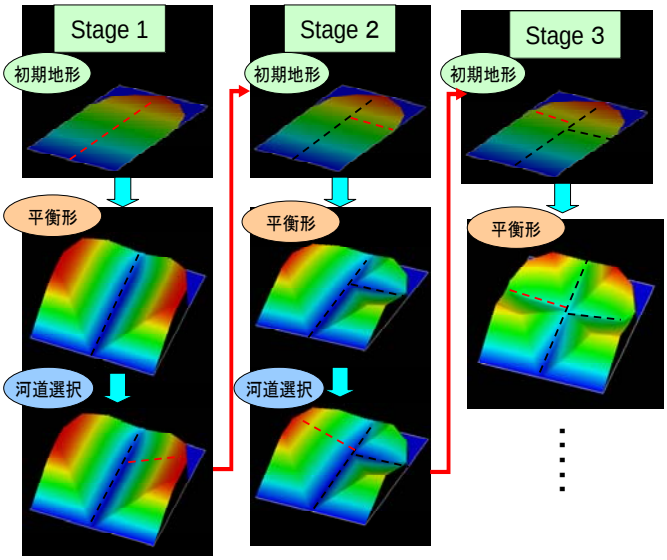

図-6　模擬流域発生手法の手順.

次いでこの地形から，中北・松田の既往研究での方法によって1本目の河道を選択する．具体的には，流域の最下端線から開始して最も長い落水線を見つける．その落水線長の90%以上の長さを持つ全ての落水線を新河道候補としてその中からランダムに選択したものを1本目の河道とする．つまり，その落水線上にあるグリッドは斜面点から河道点へと変換される．ただし，Horton[7]によると落水線上端よりある程度の距離までは浸食は生じない(Belt of no erosion)とされるため，本研究では落水線上端より250mは河道点へ変換しない．

続いて河道点グリッドを記憶した状態で，流域地形を初期地形(標高0の平面地形)に戻す．この地形から，河道数0の場合と同様な境界条件で，河道点は河道縦断形発達の方程式に従って計算し，斜面点は河道点と流域界を境界条件として斜面発達の方程式にしたがって繰り返し計算を行う．ここで，河道縦断形発達の方程式において，a_s=1.45x10^{-4} km^2/year , b_s=5.84 m/year とし，河道上流端の境界条件を $\partial z/\partial x$=0.2 とした．これは野上(1981)[13]が

表-1　設定するパラメータ，

設定するパラメータ	値
領域 [km×km]	7.5x7.5
斜面の従順化係数a [m^2/year]	0.012
斜面の後退係数b [mm/year]	1.0
河道の従順化係数a_s [km^2/year]	1.45x10^{-4}
河道の後退係数b_s [m/year]	5.84
隆起速度 k [mm/year]	0.4
河道上流端の勾配 g	0.2
耐浸食長さ [m]	250
河道候補落水線のランダム性 [%]	90
最大発生河道数	30

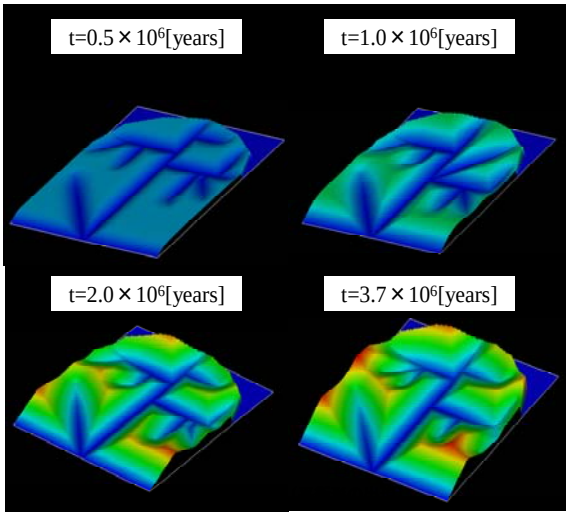

図-7　発生河道数10の模擬流域発生過程.

観測によって得た値を参考にしている．この結果，図-6左に示すような平衡地形へと収束する．収束判定条件は河道発生数0の場合と同様である．

平衡地形に達した地形から，再び落水線探索によって2本目の河道を選択する．ここでは1本目の河道を選択したときのように流域最下端線からの落水線探索ではなく，河道点からの落水線探索を行う．流域内の最長落水線長の90%以上の長さを持つ落水線の中からランダムに2本目の河道が選択される．

2本目の河道が選択されたら，河道点グリッドの平面位置を記憶した状態で標高を再び初期地形に戻す．以下，斜面・河道の発達，平衡地形からの落水線探索による新河道の選択を繰り返し行う．図-6では1本目の河道選択から3本目の河道発生後の平衡地形の出現までの手法を示している．

本研究の模擬流域発生手法では，河道選択時にHortonの河道網形成理論を用い，それぞれの発生河道数においての初期地形から平衡地形へ発達する過程が，平野の斜面発達過程と野上の河道縦断形発達過程を用いている．

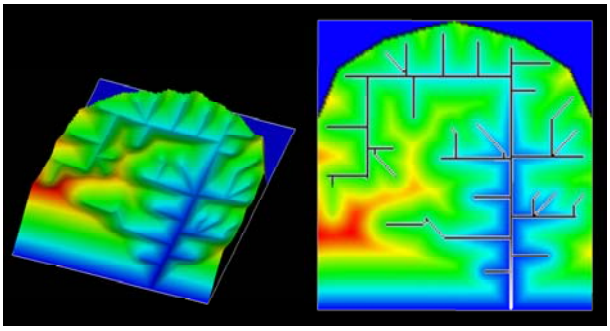

図-8　模擬流域発生例.

したがって，手法の手順全体の過程が流域地形発達の時間経過を表現しているわけではなく，それぞれの発生河道数での初期地形から平衡地形に至るまでの過程が，実際の地形発達の時間概念を表現している．ストップ条件として最終発生河道総数を与えると，その最終発生河道数での，初期地形から平衡形に至るまでの過程が実際の地形発達過程としての意味を成す．図-7に河道発生数10の流域の，初期地形から平衡地形までの過程を示す．

(4) 模擬流域発生例

図-8に本研究の模擬流域発生手法によって発生させた流域を示す．なお，設定したパラメータをまとめると表-1のようになる．

4．考察

(1) 中北・松田の模擬流域発生モデルとの比較

本研究では斜面勾配や河道縦断形をパラメータとして与えることなく模擬流域を発生させている点で中北・松田の手法とは異なる．しかし，平野[11]によると式(1)において河道横斜面には勾配がk/bにほぼ等しい斜面が平衡形として形成される．また河道縦断形についても式(3)から，係数a_sとb_sの比によって縦断形状は支配される．これらの係数を適切に選択すると，中北・松田の既往研究で発生させた模擬流域と同様の斜面・河道形状を再現できる．一方，中北・松田の既往研究では模擬流域の流域地形特性の検証のためにHorton[5]の流域地形則とStrahler[8]のhypsometric曲線を用いた分析を行い，適切な斜面・河道形状を選択すれば実際の流域の河道網構造や高度分布を再現できるとしている．したがって本研究の手法によっても適切な斜面・河道形状が出現するようにパラメータを設定すれば，中北・松田の既往研究で発生した流域と同様の特性を持つ流域を発生させることが可能であり，実際の流域の特性を再現できる．

(2) 時間概念に関する考察

本研究では時間発展を考慮した偏微分方程式による数理モデルを導入することにより，模擬流域の形成過程に具体的な時間概念を導入した．本研究では式(1)と式(2)のプログラム上の差分方程式の1タイムステップΔtを10000[year]として計算する．また本研究では50mメッシュによる各グリッドの標高データを扱っているためΔx=50[m]とした．このように10000[year]を1タイムステップとする計算を，表-1のようにパラメータを設定して実行した．この結果，河道発生数30での初期平面地形から平衡形の出現までにかかった時間は300万年となった．日本列島における地質学的観察から日本列島の山地地形は約170万年でかなり平衡形に近づくと推定されている[14]ため，比較すると本研究の模擬流域地形の平衡形の出現までの時間はオーダーとしておおよそ妥当な値となった．

５．結論と今後の課題

以上に説明したとおり，本研究では中北・松田の模擬流域発生手法に新たに斜面・河道発達過程の数理モデルを導入した．その結果，模擬流域発生モデルに時間発展の概念を導入した．また，降雨，流出，地質構造などの流域に空間的に分布する情報と地形発達を関連付けることが可能なモデルへと発展した．

本研究での課題点は，河道網の発達過程に時間概念が無いことである．現在のモデルでは，流域全体の河道網構造があらかじめ決定した状態で流域の時間発展を表現している．しかし，実際には河道網は斜面・河道発達とともに成長するものである．泉[15]によると，流域河道網の形成過程については現在未解明な点が多く残されており，なお様々な研究がなされている途中である．第1章で述べたとおり，Clevis, et. al.[5] の研究では初期条件として地形に与えられたランダムな微小撹乱に依存した山地河道網の発達が表現されている．この中では，河道網は河道同士の争奪によって周辺の河道を支流として組み入れた河道が，流域河道網を広範囲に発達させる．このモデルは斜面・河道縦断形・河道網を同時に発達させることが可能である．また，流域内の降雨，流出，地質構造，標高の分布を，河道網形成過程に反映させることが可能な点で有効なモデルである．河道網発達の物理的メカニズムを説明できるわけではないが，この河道網発達モデルを本研究の模擬流域発生モデルに導入することによって，流域発達の時間経過をより自然な形で再現できる．また，河道争奪の結果としての流域形状が発生するため，中北・松田の既往研究以来の課題とされている流域界形状の自然発生も，この河道網発達過程を導入によって実現可能である．本研究では上記のような河道網発達過程を導入することを今後の課題とする．

参考文献

1) 塚本良則：侵食谷の発達様式に関する研究(V) －水系網が作る流域地形とその変形過程についてー，新砂防，93号．1974.
2) 前田妙子：流域地形量をパラメータとした模擬流域発生と分布型降雨情報の有効性に関する研究，京都大学大学院修士論文，2006.
3) Tucker, G.E. and Slingerland, R.: Drainage basin responses to climate change, *Water Resources Research*, Vol.33, No.8, pp.2031-2047, 1997.
4) Tucker, G.E. and Slingerland, R.: Hillslope processes, drainage density, and landscape morphology, *Water Resources Research*, Vol.34, No.10, pp.2751-2764, 1998.
5) Clevis, Q., Boer, P. and Wachter, M.: Numerical modeling of drainage basin evolution and three-dimensional alluvial fan stratigraphy, *Sedimentary Geology*, Vol.163, pp.85-110, 2003.
6) 中北英一，松田周吾：浸食過程を考慮した模擬流域発生手法と流域地形量－降雨・流出特性に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第50号，CD-ROM, 20pp, 2007.
7) Horton, R.E.: Erosional Development of Streams and their Drainage Basins; Hydrophysical Approach to Quantitative Morphology, *Bulletin of the Geological Society of America*, Vol.56, pp.275-370, 1945.
8) Strahler, Arthur, N.: Hypsometric (Area-Altitude) Analysis of Erosional Topography, *Bulletin of the Geological Society of America*, Vol.63, pp.1117-1142, 1952a.
9) Strahler, Arthur, N.: Dynamic Basis of Geomorphology, Bulletin of the Geological Society of America, vol.63, pp.923-938, 1952b.
10) 石原藤次郎・高棹琢馬・瀬能邦雄：河道配列の統計則に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第12号B，pp.345-365，1969.
11) 平野昌繁：平衡形の理論，地理学評論，45-10, pp.703-714, 1972.
12) 平野昌繁：数学モデルを用いた斜面発達問題へのアプローチ，「人文研究」，大阪市立大学文学会，22巻， pp.43-63, 1971.
13) 野上道男：河川縦断面形の発達過程に関する数学モデルと多摩川の段丘形成シミュレーション，地理学評論，54-2, pp86－101, 1981.
14) 米倉伸之，貝塚爽平，野上道男，鎮西清高：日本の地形I総説，東京大学出版会，2001.
15) 泉　典洋：河道網の形成，ながれ，24, pp5-14, 2005.

（2008. 9. 30受付）