

Tangent関数変換CIP法の2次元移流拡散問題 への適用性

APPLICABILITY TO TWO-DIMENSIONAL ADVECTION-DIFFUSION
PROBLEM OF CIP METHOD WITH TANGENT CONVERSION

家塚 史仁¹・和田 明²
Fumihito IETSUKA, Akira WADA

¹学生会員 日本大学大学院 総合科学研究環境科 (〒102-8251 東京都千代田区五番町12番5号)

²正会員 工博 日本大学大学院 総合科学研究環境科 (〒102-0073 東京都千代田区九段北4-2-1)

We assumed two-dimensional advection-diffusion equation to be a basic equation and aimed to inspect the applicability of CIP method with tangent conversion through two benchmark problems.

On the Skew Flow problem, we got superior results that CIP method with tangent conversion could catch a discontinuous border sharply without causing numerical oscillation. On the other hand, on the Rotating Cone problem, we got good results on the short time simulation but in the case of long time rotating cone velocity field CIP method with tangent conversion could not reproduce initial profile, so the room of improvement of the scheme is left.

Key Words : CIP method, advection-diffusion problem, advection-dominated flow, skew flow, rotating cone flow

1. はじめに

連続体モデルとしての流れの数値シミュレーションにおいて重要な課題の一つは、移流方程式を安定かつ高精度に解くことである。流れの数値シミュレーションで基礎となる方程式は、Navier-Stokes方程式(以下、N-S方程式)であるが、N-S方程式は、双曲型の性質を表す移流項と、楕円型の性質を表す粘性項とから成り立っており、特に現実的な問題である高レイノルズ数流れでは、楕円型の性質は物体付近に限られることが多いため、双曲型の性質が卓越してくる。従って、この双曲型の方程式をいかにうまく解くかが数値計算においては重要になってくる。その双曲型の方程式の中でも、最も基本的な方程式が移流方程式であり、この移流方程式を安定かつ高精度に解くことが、流れの数値シミュレーションにおいて、まず最初に成されなければならない重要な課題のひとつであるといえる。

移流方程式を数値計算で解く難しさの理由のひとつは、この方程式が空間1階の微分を含むため対称性が悪く、計算が不安定になりやすいことによる。そこで、このような状況を改善するために提案されたスキームが、風上

化(上流化)とよばれる手法である。CIP (Cubic Interpolated Propagation)法¹⁾もそのような風上化手法の一種として分類でき、移流方程式を、安定かつ高精度に解くことができる手法として、近年注目を集めている。このCIP法の特徴は、関数値だけではなく微分値をも移流させることにより、補間精度を向上させていることにある。

ほとんどの計算において、CIP法の精度に関して問題になることはないと思われるが、物質の表面などの界面を、シャープに高解像度で捉える必要がある際にはまだ充分であるとはいえない。CIP法の改良版ともいえるTangent関数変換CIP法²⁾(以下、Tan変換CIP法)は、こうした界面獲得に非常に有効であるとされている。この関数変換はTangent関数の性質を利用し、密度関数法で用いられるように、0から1までの範囲に値がおさまるような場合には非常に有効となる。

現在CIP法は、圧縮性・非圧縮性流体の統一解法として、或いは固体・液体・気体の統一解法として、流体力学のみならず様々な分野で適用され、成果を挙げている。またこういった発展に伴い、C-CUP法³⁾、CIP-CSL法⁴⁾、CIP-FEM法⁵⁾をはじめとした、種々の発展形CIP法といったものも数多く存在する。

しかし、これらCIP法、とりわけTan変換CIP法を用い

て計算を行い、その適用性に関して検証した考察はあまり多くはない。そこで本論文では、それら発展形のCIP法に取り組む前の準備段階として、2次元の移流拡散方程式を基礎式とし、Tan変換CIP法の精度の検証を行うものとする。なお、具体的な適用性を検証する問題に関しては、3章において説明する。

2. 2次元非定常移流拡散問題

(1) 基礎方程式

本論文では2次元非定常移流拡散方程式を基礎方程式とする。この方程式は流れ問題の中でも最も基本的な性質を示し、移流効果を現す移流項と拡散効果を現す拡散項とからなり、スキームの検証にはよく用いられる方程式である。2次元の移流拡散方程式は以下である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}f) = \kappa \nabla^2 f \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, v)$ 、 κ は拡散係数である。本論文では非保存形でのスキームを扱うので、上式を非保存の形に変形し、右辺を G とおく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{u} = -f \text{div} \mathbf{u} + \kappa \nabla^2 f \equiv G \quad (2)$$

CIP法では次の空間微分に関する方程式も必要である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_x}{\partial t} + \nabla f_x \cdot \mathbf{u} &= G_x - \nabla f \cdot \mathbf{u}_x \\ \frac{\partial f_y}{\partial t} + \nabla f_y \cdot \mathbf{u} &= G_y - \nabla f \cdot \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 x, y の下付き添え字は各量での偏微分を表す。

(2) 計算アルゴリズム

本節では上記の基礎方程式に対するCIP法の具体的なスキームのひとつの形を示す。CIP法は移流項と非移流項を分離して解く、分離解法である。すなわち、

$$(f, f_x, f_y)^n \rightarrow (f, f_x, f_y)^* \rightarrow (f, f_x, f_y)^{n+1}.$$

まず移流項を計算し、中間の値を求める。上付き添え字*は、現在の時刻 n と次の時刻 $n+1$ の中間を意味する。その後非移流項を計算し、次の時刻の値を求める。

まず、移流相では以下の式をCIP補間により求める。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

及び

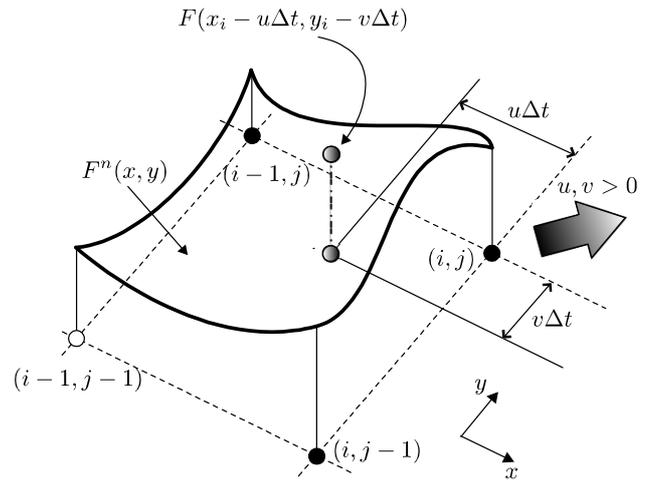


図-1 $u > 0, v > 0$ の場合の補間の考え方

● : 値と微分値を使用, ○ : 値のみ使用

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

2次元空間での空間プロファイルは、以下の3次関数で補間する。

$$\begin{aligned} F_{i,j}(x, y) &= C_{3,0}X^3 + C_{2,0}X^2 + C_{1,0}X + C_{0,0} \\ &\quad + C_{0,3}Y + C_{0,2}Y + C_{0,1}Y \\ &\quad + C_{2,1}X^2Y + C_{1,1}XY + C_{1,2}XY^2 \end{aligned} \quad (5)$$

この補間関数の選び方には幾つかあるが、本論文では使用する係数の少なさから、A型CIP法⁶⁾と呼ばれている式(5)のような関数を採用する。ここには10個の未知係数が現れるが、これを決定するために上流の節点上での値と微分値を用いる。例えば速度 $u > 0, v > 0$ の場合、図-1を参照し、格子点 $(i, j), (i-1, j), (i, j-1)$ でそれぞれ与えられた f_{ij}, f_x, f_y の値を持ち、点 $(i-1, j-1)$ で f_{i-1}, f_{j-1} の値を持つという10個の関係を用いると、式(5)の10個の未知係数が決定できる。 u, v の正負の組み合わせを考慮し、係数を決定してまとめると以下ようになる。

$$\begin{aligned} C_{3,0} &= \frac{f_{xiup,j} + f_{xi,j}}{\Delta x^2} - \frac{2(f_{i,j} + f_{iup,j})\text{sign}(u)}{\Delta x^3}, \\ C_{2,0} &= \frac{3(f_{iup,j} - f_{i,j})}{\Delta x^2} + \frac{(f_{xiup,j} + 2f_{xi,j})\text{sign}(u)}{\Delta x}, \\ C_{1,0} &= f_{xi,j}, \quad C_{0,0} = f_{i,j}, \quad C_{0,1} = f_{yi,j}, \\ C_{0,3} &= \frac{f_{yi,jup} + f_{yi,j}}{\Delta y^2} - \frac{2(f_{i,j} + f_{i,jup})\text{sign}(v)}{\Delta y^3}, \\ C_{0,2} &= \frac{3(f_{i,jup} - f_{yi,j})}{\Delta y^2} + \frac{(f_{yi,jup} + 2f_{yi,j})\text{sign}(v)}{\Delta y}, \end{aligned}$$

$$C_{1,1} = \frac{-L \times \text{sign}(u) \times \text{sign}(v)}{\Delta x \Delta y} - \frac{M \times \text{sign}(v)}{\Delta y} - \frac{N \times \text{sign}(u)}{\Delta x},$$

$$C_{2,1} = \frac{-L \times \text{sign}(u)}{\Delta x \Delta y^2} - \frac{N \times \text{sign}(u) \times \text{sign}(v)}{\Delta x \Delta y} \quad (6)$$

$$L = f_{i,j} - f_{i,jup} - f_{iup,j} + f_{iup,jup},$$

$$M = f_{xi,jup} - f_{xi,j},$$

$$N = f_{yiup,j} - f_{yi,j}.$$

ただし,

$$iup = \begin{cases} i-1 & (u \geq 0) \\ i+1 & (u < 0) \end{cases}, \quad jup = \begin{cases} j-1 & (v \geq 0) \\ j+1 & (v < 0) \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad (8)$$

という記号を導入した. この結果, 補関数の係数を求めた後, 移流方程式の解析解すなわち

$$\begin{aligned} f^* &= F^n(x - u\Delta t, y - v\Delta t) \\ f_x^* &= F_x^n(x - u\Delta t, y - v\Delta t) \\ f_y^* &= F_y^n(x - u\Delta t, y - v\Delta t) \end{aligned} \quad (9)$$

から中間の時刻*での値を求めることができる.

続いて, 非移流相である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= G, \\ \frac{\partial f_x}{\partial t} &= G_x - f_x \frac{\partial u}{\partial x} - f_y \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial t} = G_y - f_x \frac{\partial u}{\partial y} - f_y \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

非移流相は様々な解き方があるが, ここでは簡単に以下のような中心差分近似を用いて計算する.

$$\begin{aligned} f_{i,j}^{n+1} &= f_{i,j}^* \\ &+ \left\{ \kappa \left(\frac{f_{i+1,j}^* - 2f_{i,j}^* + f_{i-1,j}^*}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^* - 2f_{i,j}^* + f_{i,j-1}^*}{\Delta y^2} \right) \right. \\ &\left. - \left(f_{i,j}^* \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - f_{i,j}^* \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} \Delta t \\ f_{xi,j}^{n+1} &= f_{xi,j}^* + \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1} - f_{i+1,j}^* + f_{i-1,j}^*}{2\Delta x}, \\ &- f_{xi,j}^* \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \Delta t - f_{yi,j}^* \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \Delta t \end{aligned}$$

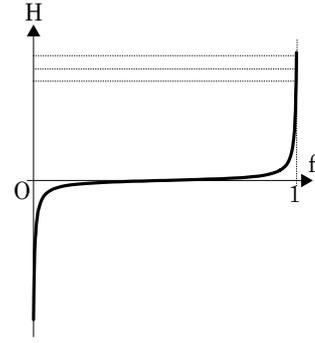


図-2 Tangent関数変換の効果

$$\begin{aligned} f_{yi,j}^{n+1} &= f_{yi,j}^* + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1} - f_{i,j+1}^* + f_{i,j-1}^*}{2\Delta y} \\ &- f_{xi,j}^* \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \Delta t - f_{yi,j}^* \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)より, 中間の時刻*での値から, 求めたい次の時刻 $n+1$ での値を計算することが出来る. これを各時間ステップで繰り返していけばよい.

(3) Tangent関数変換

本論文ではTangent関数変換の効果に焦点を当てる. ここでこの関数変換について概観しておく. Tangent関数変換では前節までの f の代わりに, 次の式で変換される H を数値計算に用いる.

$$H(f) = \tan\left(\pi\left(f - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (12)$$

この変換による直感的な効果は次のようである. 図-2において $f=1$ のとき, 変換後の H はおおよそ点線のあたりの値を取るが, H を等間隔にズラしてもTangent関数の性質から, 逆変換後, f はまた1に戻ってくる. $f=0$ のときも同様に考えることが出来る. つまり, f は結局0または1に集中することになる. 変換後の H についても, 式(1)と同じかたちの式が得られることはすぐに分かる. そこで, f の代わりに H を未知数として計算を行ってもよい. f の値が必要ならばその都度 H を逆変換し求めるが, 3章以降で扱う計算例では, 逆変換に伴う誤差の蓄積を防ぐため, 各時間ステップ毎には逆変換せず H のまま計算を行い, 最後に H を逆変換し f を求めている. なお, f が1のとき変換後の H は正の無限大に, f が0のとき変換後の H は負の無限大になってしまうが, これを避けるため, プログラム上では π の前に0.9等をかけておく. またこの関数変換はCIP法以外のスキームにも適用可能である. 基本的にはCIP法での計算と同じように, f の代わりに H を解くだけで済む. 本論文では比較のための例として, 実用上最もよく使われている3次の風上差分法にTangent関数変換を組み合わせる移流相を解いた結果も, 合わせて考察する.

3. 適用性の検証(数値計算例)

CIP法の精度の検証を、基礎方程式を2次元の移流拡散方程式とし、以下の2つのベンチマーク問題を通して行う。何れの問題においても、基礎方程式の拡散項に比べ移流項が支配的となる、移流卓越流れとする。これは、高Reynolds数流れ問題を対象とする計算手法の基本的なベンチマーク問題としてよく用いられているものである。なお、これらのベンチマーク問題はスキーム検討用のものであり、実際の現象に当てはまるものではない。

(1) Skew Flow 問題⁷⁾

本問題では、不連続な移流速度場に関する精度の検証を行う。少ない格子数で移流計算を行い、不連続となる境界を如何にシャープに捉えることが出来るのかを検証する。問題設定は表-1及び以下の通りである。

計算領域を図-3に示す。流入境界(図-3では左辺と下辺)からメッシュに対して斜め一定 θ 方向に $f = 0$ または $f = 1$ の値を流す。速度ベクトルのノルムは常に一定値1になるようにする。また流出境界(右辺と上辺)は同次自然境界とする。用いた格子は 20×20 の正方格子である。移流項に対する補間精度を検証することを目的とするため拡散係数 κ は 10^{-6} とし移流卓越流れとする。 $\Delta t = 0.175$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.5$ とし、本問題におけるクーラン数は0.5となる。なおクーラン数は以下の式(13)で定義する。移流方程式を解いた際の本問題の正解は、 f の値、すなわち0または1という値が、 θ 方向に流れていくだけである。 θ が45度及び、72.5度の場合についての計算結果を図-4、図-5にそれぞれ示す。また比較のために、移流相に3次の風上差分とTangent関数変換を組み合わせる結果($\theta = 72.5$ 度の場合)も図-6に合わせて示す。

$$\text{クーラン数} = \|\mathbf{u}\| \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (13)$$

表-1 Skew Flow 計算条件

流入境界	不連続($f = 0$ または1)
流出境界	同次自然境界条件($f_n = 0$)
速度ベクトル	$\ \mathbf{u}\ = 1$
格子	20×20 の固定正方格子
拡散係数	10^{-6}
移流方向 θ	$45^\circ, 67.5^\circ$
$\Delta t, \Delta x, \Delta y$	$\Delta t = 0.175, \Delta x = 0.5, \Delta y = 0.5$

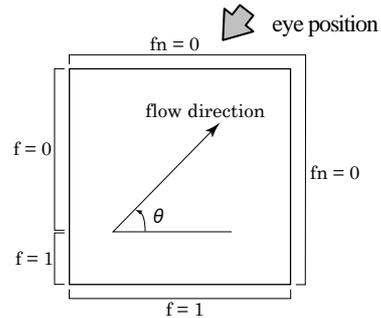


図-3 Skew Flow 問題設定

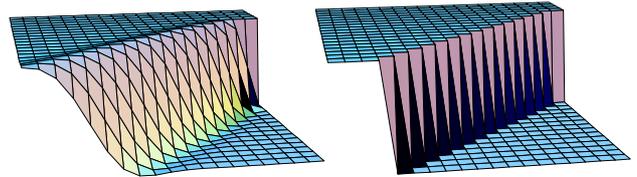


図-4 Skew Flow 結果 ($\theta = 45^\circ$)

左: CIP法 右: Tan変換CIP法

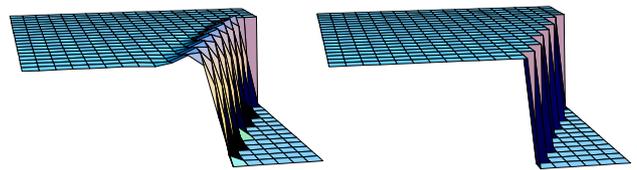


図-5 Skew Flow 結果 ($\theta = 67.5^\circ$)

左: CIP法 右: Tan変換CIP法

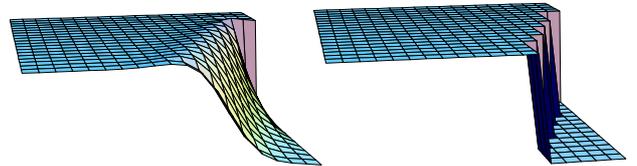


図-6 Skew Flow 結果 ($\theta = 67.5^\circ$)

左: 3次風上差分 右: 3次風上差分+Tan変換

(2) Rotating Cone 問題

本問題では、連続的な多回転の移流速度場に関する検証を行うこととする。通常、この問題では1回転程度の計算で検証が行われる。しかし、現実問題に適用される数値計算では、長時間にわたるシミュレーションがほとんどであり、そのようなシミュレーションへの適用を考慮し、ここでは長時間計算によるスキームの適用性の検証を行うことを目的とする。問題設定は表-2及び以下の通りである。

初期条件として計算領域内に文字“C”となるように $f = 1$ の値を設定しその他は $f = 0$ とする(図-7)。境界条件は境界上で $f = 0$ とする。与える速度ベクトルを $(u, v) = (-5\pi y / 10^3, 5\pi x / 10^3)$ とし、初期プロファイルが反時計回りに回転するよう与える。すなわち、移流方程式を解いた場合、初期値の分布が1周した際の正解となる。使用した計算格子は 100×100 の正方格子、拡散係数 κ を 10^9 とし、

表-2 Rotating Cone 計算条件

初期条件	文字“C”(0または1で与える)
境界条件	境界上で $f = 0$
速度ベクトル	$(u, v) = (-5\pi y/10^{-3}, 5\pi x/10^{-3})$
格子	100×100の固定正方格子
拡散係数	10^{-9}
$\Delta t, \Delta x, \Delta y$	$\Delta t = 0.001, \Delta x = 0.005, \Delta y = 0.005$

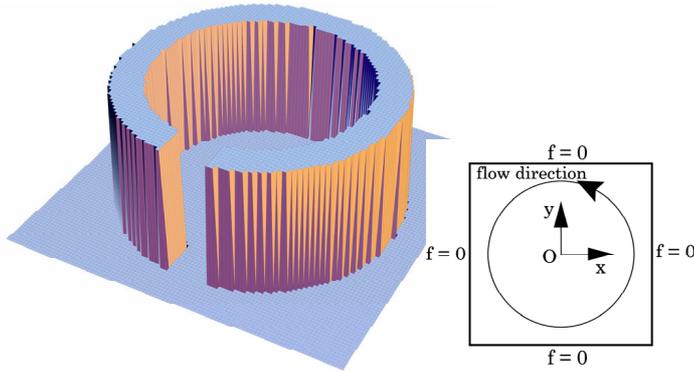


図-7 Rotating Cone 初期条件

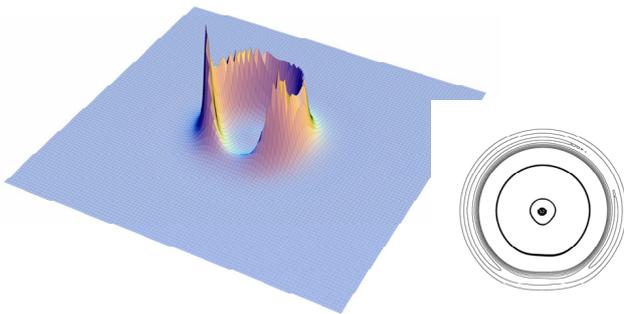


図-8 100回転後 (クーラン数 : 0.3)
 最大値 : 1.14×10^{-5} , 最小値 : -4.685×10^{-8}

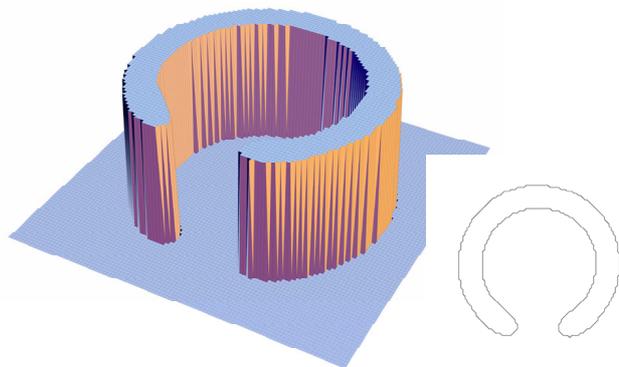


図-9 100回転後 (クーラン数 : 0.03)
 最大値 : 1.000, 最小値 : -5.446×10^{-8}

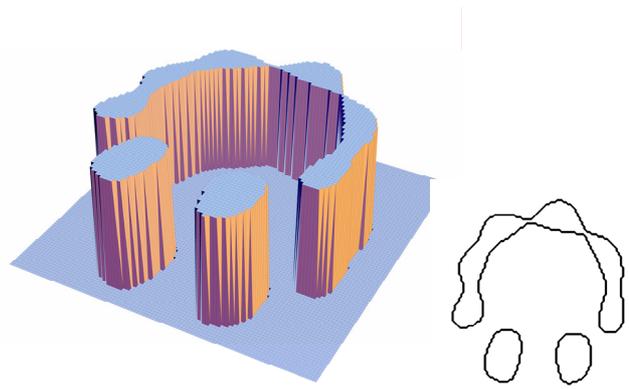


図-10 3次風上差分+Tan変換
 100回転後 (クーラン数 : 0.03)
 最大値 : 1.0, 最小値 : 0.0

こちらもSkew Flow問題と同様の理由により移流の卓越した流れ場になるようにする. 本計算では多回転後のプロファイルの結果を考察の対象とするため, Tangent関数変換CIP法による100回転後の結果を考察したい. これにより長時間計算においても, 初期プロファイルが保たれるのかどうかを検証する. この計算結果を, クーラン数が0.3, 及び0.03の場合について, それぞれ図-8, 図-9に示す. またSkew Flow問題と同様に比較のために, 移流相に3次の風上差分とTangent関数変換を組み合わせ解いた結果(クーラン数が0.03の場合)も図-10に合わせて示す.

4. 考察

本論文では, N-S方程式の2次元版とも呼べる移流拡散方程式を通して, Tan変換CIP法の適用性に関して検証してきた.

Skew Flow問題の結果から, Tan変換CIP法が優れた補間法であることが分かる. 図-4, 及び図-5からCIP法単独では不連続面となる境界付近で解が若干オーバーシュートまたはアンダーシュートし, またシャープに1メッシュで境界を捉えきれていないことが分かる. 一方, Tangent関数変換を施せば, この状況が解消され, 境界を1メッシュでシャープに捉えることができる. Tangent関数変換の導入の有効性が示されている. 斜め移流の問題では, 解が振動してしまうスキームも少なくないが, CIP法ではそういったことは起きていない. これは長時間計算を続けても変わることはなかった. また, 3次の風上差分法による結果(図-6)はこれらCIP法による結果とほぼ同様のものであった. 3次の風上差分法単独ではCIP法に解像度の点でやや劣るものの, Tangent関数変換を施すことでその弱点は解消された. CIP法のように微分量に関する式を扱う必要がなくなるので計算時間が飛躍的に短くなること, またプログラムの修正も比較的簡単

に済むことから、それらの点において有利な手法と思われる。Tangent 関数変換に含まれるパラメタの値は、本論分では0.999999を採用して計算を行っているが、このパラメタの値を変えることにより、再現されるプロファイルが異なる。実際、0.9と0.999999では境界でのシャープさに大きな差が出る。不連続となる境界をシャープに再現するのならば、より1に近い値を採用した方が、数値拡散せず適しているようである。

Rotating Cone問題では通常とは視点を変え、多回転後の計算結果を検討することに主眼を置いた。1回転程度の場合では、初期プロファイルがよく再現されるクーラン数でも、多回転では初期プロファイルを保つことが出来ない。図-8では形状が残っているが、このままさらに計算を続行すれば、初期プロファイルは完全になくなる。そこでクーラン数を小さくして計算を行うと、図-9のように初期形状を保つようにはなるが、1回転程度の時のように完全ではない。また膨大な計算時間が掛かるため、現実的とも言えない。このため、形状を保つための何らかの工夫が必要と思われる。CIP法ではあまりクーラン数に注意を払う必要はないといわれているが、Rotating Cone問題のように、場合によっては注意する必要があると考えられる。CIP法は非常に保存性がよいことは知られているが、Tangent 関数変換を施すことは半ば強制的に境界をシャープにするので、保存が保証されるわけではない。本問題では、速度ベクトルとの相性からか、保存はされない結果となった。3次の風上差分法による結果であるが、1回転程度の短時間の計算では、初期プロファイルをよく再現することを確かめた。しかし、長時間計算では再現することができなかった(図-10)。

5. 今後の課題

以上を踏まえ、今後の課題を述べておく。Rotating Cone問題での結果は、誤差の蓄積が原因となり、初期プロファイルを保つことが出来なくなったと考えられる。1回転程度では現れない微小な誤差が、長時間の計算では表面に現れてきたかたちである。その誤差の蓄積を防ぐための手段として考えられることは、まず非移流項の高精度化である。本スキームでは非移流項の補間に2次精度の中心差分を用いている。CIP法は時間空間3次精度を有しているが、非移流項に2次精度の差分を用いれば、スキーム全体としての精度は2次精度以下に落ちていると考えられる。従って、少なくとも非移流項には4次精度以上の差分近似を適用する必要がある。また空間積分

に関してだけではなく、時間積分に関しても高精度化の工夫は必要であろう。これらの工夫により、方程式全体への精度の向上⁸⁾を図ることが必要である。初期形状を保つため、或いは多少形状が変化したとしても、少なくとも情報が存在しているということを保持するための工夫として、保存を考えることもひとつの有効な手段となるかもしれない。また、本計算での浮動小数点演算には通常通りの倍精度計算を用いているが、長時間計算の誤差の蓄積が現在の倍精度の有効桁数内で現れてくるのならば、多倍長計算を行うことによって、誤差が現れる桁を、長時間計算でも影響のない範囲に追いやるという手法も考えられる。

参考文献

- 1) H.Takewaki, A.Nishiguchi and T.Yabe: The Cubic-Interpolated Pseudo-Particle (CIP) Method for Solving Hyperbolic-Type Equations, *J.Comput.Phys.*, **61**, pp.261-268, 1985.
- 2) T.Yabe and F.Xiao: Description of Complex and Sharp Interfaceduring Shock Wave Interaction with Liquid Drop, *J.Phys.Soc.Japan*, **62**, pp.2537-2540, 1993.
- 3) T.Yabe and P.Y.Wang: Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, *J.Phys.Soc.Japan*, **60**, pp.2105-2108, 1991.
- 4) R.Tanaka, T.Nakayama and T.Yabe: Constructing Exactly Conservative Scheme in a Non-Conservative Form, *Comput.Phys.Commun.*, **126**, pp.232-243, 1991.
- 5) 井出康之, 登坂宣好: CIP有限要素法による2次元移流拡散方程式の近似解放, 日本機械学会論文集(B編), 63巻, 610号, pp.1967-1973, 1997.
- 6) T. Yabe, et al. A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation. *J.Comput.Phys.Commun*, Vol. 66, pp. 233-242, 1991.
- 7) Alexander N. BROOKS and Thomas J.R. HUGHES. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput.Meths.Appl.Mech.Engrg.*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- 8) 秋元智博, 登坂宣好: 高次補間を用いた非圧縮性粘性流れ解析, 日本計算工学会論文集, Vol.3, pp.111-117, 2001.

(2007. 9. 30受付)