陽的フィルタリングによる高レイノルズ数開水路乱流のLES

Large-Eddy Simulation of High Reynolds Number Cannel Flow applying Explicit Filtering

北野有哉[1]・中山昭彦[2]
Yuya KITANO and Akihiko NAKAYAMA

[1] 学生員　神戸大学大学院 自然科学研究科 建設学専攻（〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1）
[2] 正会員　PhD　神戸大学大学院教授 自然科学研究科（〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1）

Correct representation of the effects of the turbulence structure near solid boundaries is very important for successful large-eddy simulation(LES). In the present work, this so-called wall-layer modeling is done on commutation error terms near solid boundaries obtained by explicit filtering. These terms are ignored in conventional LES, but in the present work, these error terms are modeled using a dynamic procedure, making use of the scale-similarity of the modeled terms. It is found, by applying the procedure in LES of a high Reynolds number channel flow, that the dynamic modeling of these error terms makes it possible to gain the roughly same velocity profile as DNS results statistically, and moreover, to simulate the features of large-scale structures instantaneously.

Key Words: *LES, wall-layer modeling, explicit filtering, dynamic boundary model*

1. 序論

固体壁に接する乱流は壁乱流と呼ばれ, 高レイノルズ数でその構造は壁近傍の粘性スケールと壁遠方の大規模スケールに大別される. 現実的な高レイノルズ数の流れを対象に LES を行うには壁近傍の粘性スケールを解像せず, 壁遠方の大規模構造のみを再現することが望ましい. しかし大規模構造は壁近傍で生成された乱れにより維持される為, 壁近傍構造からの影響を何らかの形で考慮する必要がある.

壁近傍の影響をモデル化する方法は一般に Wall-Layer Modeling と呼ばれ, 様々な手法が提案されている. 代表的なものに, 時間平均もしくは瞬時で対数則が成立するよう調整する equilibrum laws が挙げられる. これは当初, 壁最近傍点の流速二階微分へ対数則を組み込む形で Deardorff(1970)[1] により導入された. その結果はエネルギー保有スケールの解像度の低さのため 満足できるものではなかったが, その後 Schumann(1975)[2] により考案された, 流速の平均値からの変動率が壁面せん断応力のものと等しいとする手法は channel 流での実験値とよく整合し, Wall-layer modeling における最初の成功例となった. Schumann の方法を踏襲するモデルはその後 Piomelli(1989)[3] , Mason & Callen(1986)[4] , Werner & Wengle(1993)[5] により提案されたが, いずれにも Schumann の結果に対する大幅な改善は示されていない.

これらの方法は運動方程式から現れるべき結果を再現するよう調整する帰納的方法であり, 運動方程式そのものに基づいたものではない. より理論的根拠を取り入れたものに Hoffmann & Benocci(1995)[6] による, 境界層近似方程式を壁法線方向へ積分し 壁面せん断応力を求める方法がある. この方法では channel 流, rotating channel 流に対し, resolved LES 及び実験値と良好な一致がみられた. しかし同様の方法で Wang(1999)[7] により trailing edge を対象に行われた LES では順圧力勾配域から逆圧力勾配域への遷移域周辺で摩擦抗力係数が, また剥離領域では壁面応力の時間変動スペクトルが resolved LES 結果と大きく異なり, 剥離を伴う流れには対応できないことが明らかとなった.

Equilibrium laws の他に TLM(Two-Layer Model) や DES(Detached Eddy Simulation) といった, 壁近傍と壁遠方を分離する zonal approaches もよく知られる方法だが, これらは概して境界近傍の解像を必要とし, 境界近傍の効果的モデルとは言い難い.

以上をまとめると Wall-layer modeling の歴史は外層スケールにおける瞬時壁面せん断応力算定方法の模索といえる. そして外層スケールから算定可能な equilibrium laws は壁面せん断応力の平均値が既知である必要があり, 対象境界形状が比較的平坦なものに限定される為, 汎用性に欠ける. 本著者らはより理論的根拠を導入する為, 微分量の粗視化により生じる粗視化誤差に着目した. この誤差を適切にモデル化することにより, 解像されない壁近傍渦層の 壁遠方大規模構造に対する影響が

考慮され, 大規模スケールのみのシミュレーションが可能になると考えられる.

本研究は壁近傍の渦構造を境界モデルで算定する壁面せん断応力に代表させ, 小さな計算負荷で壁遠方大規模構造のみをシミュレートすることを目的とする. 本報では第二章で陽的フィルタリングにより運動方程式各項から生じる粗視化誤差の導出及びその動的モデル化手法を示し, 第三章でこの動的モデルを用いた LES 結果を示す.

2. 基礎方程式

(1) LES 基礎方程式

陽的にフィルタを扱うことで, 有限領域ではフィルタリングと微分操作が互換でないことが明確となる. 以下その定式化 [a)] から LES 基礎式各項への適用 [b)] , そのモデル化 [c)] を順に示す.

a) 陽的フィルタリング

ベクトル関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ のフィルタ平均 $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$ は，格子幅 $\overline{\Delta}$ のフィルタ関数 $G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ との畳み込み積分により，式 (1) で定義される.

$$\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} = \iiint_D \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \tag{1}$$

ここに D は流れ場全域を示す.

フィルタ関数 $G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ は重み関数 $w(\boldsymbol{x})$ (≥ 0) を用いて式 (2) で定義される.

$$G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta})}{W_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x})} \tag{2}$$

ここに $W_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x})=\iiint_\infty w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta})dV_\xi$ は $G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ の正規化のため 導入されている. 式 (1) に従えば粗視化変数は, 流れ領域外でも定義される点に注意されたい.

式 (1) の定義より，ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の勾配 $\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})$ にフィルタリングを施すと以下のように展開される.

$$\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})} \\
&= \iiint_D G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \\
&= \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\right) dV_\xi - \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \\
&= \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\right) dV_\xi - \iiint_D \frac{-\boldsymbol{\nabla}_x w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta})}{W(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \\
&= \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\right) dV_\xi \\
&\quad - \iiint_D \left[-\boldsymbol{\nabla}_x \left(\frac{w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta})}{W(\boldsymbol{x})} \right) - w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta}) \frac{\boldsymbol{\nabla}_x W(\boldsymbol{x})}{(W(\boldsymbol{x}))^2} \right] \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \\
&= \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\right) dV_\xi \\
&\quad + \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_x G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) dV_\xi + \frac{\boldsymbol{\nabla}_x W(\boldsymbol{x})}{W(\boldsymbol{x})} \iiint_D G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \\
&= \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\right) dV_\xi \\
&\quad + \boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{W(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{\nabla}_x \iiint_D w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta}) dV_\xi \, \overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} \\
&= \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi \left(G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\right) dV_\xi + \boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} - \iiint_D \boldsymbol{\nabla}_\xi G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) dV_\xi \, \overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} \\
&= \iint_S G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) \, \boldsymbol{n} dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{n} dS_\xi \, \overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} + \boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}
\end{aligned} \tag{3}$$

ここに S は粗視化前の境界面，$\boldsymbol{n}$ は粗視化前の境界面外方向単位法線ベクトルである.

本研究では式 (3) 第 1 項, 第 2 項を合せて ” 粗視化誤差 ” と呼ぶ. 式 (3) で示すように 粗視化誤差は境界面での面積分の形をとる. よってフィルタ関数 $G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ の制約から 粗視化誤差の生じる範囲は境界近傍でのフィルタリングに限定され, その場合にのみ考慮すれば良いことが分かる. 次項で運動方程式各項についての粗視化誤差を導出する.

b) 運動方程式各項の粗視化誤差

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4}$$

(ここに u_i ; x_i 方向の流速成分，ν ; 動粘性係数，ρ ; 密度，p ; 圧力) の各項に先の陽的フィルタリング (式 (3)) を施すと，それぞれ次のようになる.

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)} = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \iint_S G_{\overline{\Delta}} u_i u_j n_j dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}} n_j dS_\xi \, \overline{u_i u_j} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\nu\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}} \\
&= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \\
&\quad + \nu \iint_S G_{\overline{\Delta}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_j dS_\xi - \nu \iint_S G_{\overline{\Delta}} n_j dS_\xi \, \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \\
&= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \iint_S G_{\overline{\Delta}} u_i n_j dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}} n_j dS_\xi \, \overline{u_i} \right) \\
&\quad + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \iint_S G_{\overline{\Delta}} u_j n_i dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}} n_i dS_\xi \, \overline{u_j} \right) \\
&\quad + \nu \iint_S G_{\overline{\Delta}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_j dS_\xi - \nu \iint_S G_{\overline{\Delta}} n_j dS_\xi \, \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \iint_S G_{\overline{\Delta}} p \, n_i dS_\xi - \frac{1}{\rho} \iint_S G_{\overline{\Delta}} n_i dS_\xi \, \overline{p} \tag{7}$$

また連続式

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{8}$$

へ同様に陽的フィルタリングを施すと，次式のようになる.

$$
\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} + \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, u_i\, n_i dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_i dS_\xi\, \overline{u_i} \\
&= \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} - \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_i dS_\xi\, \overline{u_i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって粗視化流速の連続式は式 (9) となる.

$$
\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_i dS_\xi\, \overline{u_i} \qquad (9)
$$

式 (5), 式 (6), 式 (7) 中の粗視化誤差は非解像成分を含んでいる為, 解像成分によるモデル化が必要となる. 次項に本研究の提案する粗視化誤差のモデルを示す.

c) 粗視化誤差のモデル化

移流項, 粘性項, 圧力項による粗視化誤差は von Kármán の運動量方程式を参考に，それぞれ式 (10), 式 (11), 式 (12) でモデル化する.

$$
\begin{aligned}
&\overline{\left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)} \\
&= \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, u_i u_j\, n_j dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_j dS_\xi\, \overline{u_i u_j} \\
&= \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} - C_{r(i)} \frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3} \overline{u_{(i)}}\, \overline{u_{(i)}} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}} \\
&= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \\
&\quad + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\iint_S G_{\overline{\Delta}}\, u_i\, n_j dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_j dS_\xi\, \overline{u_i} \right. \\
&\qquad \left. + \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, u_j\, n_i dS_\xi - \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_i dS_\xi\, \overline{u_j} \right) \\
&\quad + \nu \iint_S G_{\overline{\Delta}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j dS_\xi - \nu \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_j dS_\xi \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \\
&= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + C_{f(i)} \frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3} \overline{u_{(i)}}\, \overline{u_{(i)}} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, p\, n_i dS_\xi - \frac{1}{\rho} \iint_S G_{\overline{\Delta}}\, n_i dS_\xi\, \overline{p} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + C_{d(i)} \frac{A_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3} \overline{u_{(i)}}\, \overline{u_{(i)}} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ここに $C_{r(i)}, C_{f(i)}, C_{d(i)}$ はモデル係数, $\Sigma_{\overline{\Delta}}$ は grid フィルタ体積の底面積, $A_{\overline{\Delta}}$ は grid フィルタ体積底面の i 方向への投影面積, $\overline{\Delta}$ は式 (13) で定義するグリッドフィルタ幅である.

$$
\overline{\Delta} = (\overline{\Delta} x_1 \cdot \overline{\Delta} x_2 \cdot \overline{\Delta} x_3)^{1/3} \qquad (13)
$$

また $_{(i)}$ は i で縮約を取らないことを意味する. $C_{r(i)}$,$C_{f(i)}$, $C_{d(i)}$ に方向を与えるのは, 壁近傍の異方性を考慮するためである. 尚, 式 (10) 右辺第一項のモデル化は通常の SGS モデルにより行う.

モデル係数 $C_{r(i)}$, $C_{f(i)}$, $C_{d(i)}$ の決定は, 動的手法により空間各点 · 各時間ステップ毎に行う. この操作は本研究における重要な特長の一つである為，小節を改めその操作について述べる.

(2) モデル係数の動的算定法

動的手法では grid-scale の LES と, grid-scale と test-scale とを合成したスケールの LES で 同じモデル係数が適応されることを利用する. これにより変数の数を増やさずに方程式が加わり, 解が得られる. 以下 式 (10)–式 (12) に対し動的手法を適用し, モデル係数を各方向にそれぞれ独立して算出する.

a) $C_{r(i)}$ の算定法

式 (10) へ より広幅の test-scale フィルタ $\widetilde{\Delta}$ を掛けると，式 (14) のように展開される.

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\overline{\left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)}} \\
&= \frac{\partial \widetilde{\overline{u_i u_j}}}{\partial x_j} + \iint_{\overline{S}} G_{\widetilde{\Delta}}\, \overline{u_i u_j}\, \overline{n_j} d\overline{S_\xi} - \iint_{\overline{S}} G_{\widetilde{\Delta}}\, \overline{n_j} d\overline{S_\xi}\, \widetilde{\overline{u_i u_j}} \\
&\qquad - C_{r(i)} \widetilde{\left(\frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3} \overline{u_{(i)}}\, \overline{u_{(i)}} \right)} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

式 (14) 中の $\widetilde{\overline{u_i u_j}}$ は通常の SGS モデルを用いることで閉じることができる.

次に式 (10) のフィルタを合成フィルタ $\widetilde{\overline{\Delta}}$ とすると式 (15) となる.

$$
\widetilde{\overline{\left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)}} = \frac{\partial \widetilde{\overline{u_i u_j}}}{\partial x_j} - C_{r(i)} \frac{\Sigma_{\widetilde{\overline{\Delta}}}}{\widetilde{\overline{\Delta}}^3} \widetilde{\overline{u_{(i)}}}\, \widetilde{\overline{u_{(i)}}} \qquad (15)
$$

式 (14), 式 (15) を比較することにより $C_{r(i)}$ は式 (16) で決定される.

$$
C_{r(i)} = \frac{Lr_i}{Mr_i} \qquad (16)
$$

ここに

$$
Mr_i = \frac{\Sigma_{\widetilde{\overline{\Delta}}}}{\widetilde{\overline{\Delta}}^3} \widetilde{\overline{u_{(i)}}}\, \widetilde{\overline{u_{(i)}}} - \widetilde{\left(\frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3} \overline{u_{(i)}}\, \overline{u_{(i)}} \right)}
$$

$$
Lr_i = - \iint_{\overline{S}} G_{\widetilde{\Delta}}\, \overline{u_i u_j}\, \overline{n_j} d\overline{S_\xi} + \iint_{\overline{S}} G_{\widetilde{\Delta}}\, \overline{n_j} d\overline{S_\xi}\, \widetilde{\overline{u_i u_j}}
$$

b) $C_{f(i)}$ の算定法

粘性項から生じる粗視化誤差のモデル係数 $C_{f(i)}$ の算定も, $C_{r(i)}$ の決定と同様の手順で行われる. まず, 式 (11) へ test-scale フィルタ $\widetilde{\Delta}$ を掛けると 式 (17) となる.

$$
\nu\overline{\widetilde{\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}}}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\widetilde{\overline{u_i}}}{\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{\overline{u_j}}}{\partial x_i}\right) \\
& +\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{u_i}\,\overline{n_j}d\overline{S_\xi}-\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{n_j}d\overline{S_\xi}\,\widetilde{\overline{u_i}}\right. \\
& \qquad\left.+\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{u_j}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}-\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}\,\widetilde{\overline{u_j}}\right) \\
& +\nu\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)\overline{n_j}d\overline{S_\xi}-\nu\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\overline{n_j}d\overline{S_\xi}\widetilde{\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)} \\
& +C_{f(i)}\widetilde{\left(\frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3}\overline{u_{(i)}}\,\overline{u_{(i)}}\right)} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

また式(11)のフィルタを合成フィルタ $\widetilde{\overline{\Delta}}$ とすると式(18)となる.

$$
\begin{aligned}
& \nu\overline{\widetilde{\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}}} \\
& \quad = \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\widetilde{\overline{u_i}}}{\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{\overline{u_j}}}{\partial x_i}\right)+C_{f(i)}\frac{\Sigma_{\widetilde{\overline{\Delta}}}}{\widetilde{\overline{\Delta}}^3}\widetilde{\overline{u_{(i)}}}\,\widetilde{\overline{u_{(i)}}} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

式(17), 式(18)を比較することにより $C_{f(i)}$ は式(19)で決定される.

$$
C_{f(i)} = \frac{Lf_i}{Mf_i} \qquad (19)
$$

ここに

$$
Mf_i = \frac{\Sigma_{\widetilde{\overline{\Delta}}}}{\widetilde{\overline{\Delta}}^3}\widetilde{\overline{u_{(i)}}}\,\widetilde{\overline{u_{(i)}}}-\widetilde{\left(\frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3}\overline{u_{(i)}}\,\overline{u_{(i)}}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
& Lf_i \\
= \quad & \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{u_i}\,\overline{n_j}d\overline{S_\xi}-\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{n_j}d\overline{S_\xi}\,\widetilde{\overline{u_i}}\right. \\
& \qquad\left.+\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\widetilde{u_j}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}-\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}\,\widetilde{\overline{u_j}}\right) \\
& +\nu\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)\overline{n_j}d\overline{S_\xi}-\nu\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\overline{n_j}d\overline{S_\xi}\widetilde{\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)}
\end{aligned}
$$

c) $C_{d(i)}$ **の算定法**

圧力項から生じる粗視化誤差も同様, 以下の手順でモデル係数 $C_{d(i)}$ が算定される.

式(12)へ test-scale フィルタ $\widetilde{\Delta}$ を掛けると 式(20)となる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\widetilde{\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)}} = \quad & \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{\overline{p}}}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{p}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}-\frac{1}{\rho}\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}\,\widetilde{\overline{p}} \\
& +C_{d(i)}\widetilde{\left(\frac{A_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3}\overline{u_{(i)}}\,\overline{u_{(i)}}\right)} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

式(12)のフィルタを合成フィルタ $\widetilde{\overline{\Delta}}$ とすると式(21)となる.

$$
\frac{1}{\rho}\widetilde{\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{\overline{p}}}{\partial x_i}+C_{d(i)}\frac{A_{\widetilde{\overline{\Delta}}}}{\widetilde{\overline{\Delta}}^3}\widetilde{\overline{u_{(i)}}}\,\widetilde{\overline{u_{(i)}}} \qquad (21)
$$

式(20), 式(21)を比較することにより $C_{d(i)}$ は式(22)で決定される.

$$
C_{d(i)} = \frac{Ld_i}{Md_i} \qquad (22)
$$

ここに

$$
Md_i = \frac{A_{\widetilde{\overline{\Delta}}}}{\widetilde{\overline{\Delta}}^3}\widetilde{\overline{u_{(i)}}}\,\widetilde{\overline{u_{(i)}}}-\widetilde{\left(\frac{A_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3}\overline{u_{(i)}}\,\overline{u_{(i)}}\right)}
$$

$$
Ld_i = \frac{1}{\rho}\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{p}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}-\frac{1}{\rho}\iint_{\overline{S}}G_{\widetilde{\Delta}}\,\overline{n_i}d\overline{S_\xi}\,\widetilde{\overline{p}}
$$

以上の動的手法により粗視化誤差を粗視化変数のみで閉じることが可能となる．本研究はモデル式(10)–(12)及び そのモデルパラメータ決定式(16),(19),(22)を総称して DBM(Dynamic Boundary Model)と呼ぶ．次章では DBM を用いて行った平行平板間乱流の LES 結果を考察する．

3. 数値計算

(1) 計算手法

空間離散化は 移流項を勾配型として梶島の補間法[8]を用い, その他の差分は二次精度中心差分とした. 時間進行は 移流項, 粘性項, モデル化を必要とする項の全てを二次精度 Adams-Bashforth 法を用いて行った．

SGS モデルはモデル係数 C_s=0.18 の標準 Smagorinsky モデルとした. 動的操作に関し test-scale フィルタ幅 $\widetilde{\Delta}$ は通常，Dynamic Smagorinsky Model において $\overline{\Delta}$ の倍の広さに取られる為[9]，本研究も同様に扱った．

(2) 計算例

計算対象は平行平板間乱流の, 中心から壁面までの領域とする．数値計算は，x_1, x_2, x_3 方向 (x_1; 主流方向, x_2; 壁法線方向, x_3; スパン方向) に各々12δ, δ, 6.4δ (δ; チャネル半幅) とし, x_1-x_3 方向へ周期条件, x_2 方向上面へすべり条件, x_2 方向下面へは a) で述べた陽的フィルタリングの定義に従い, $\overline{\Delta}_{x_2}/2$ 領域外部へ no-slip 条件を適用し行った. 計算ケースは摩擦レイノルズ数 $Re_\tau (= u_\tau\delta/\nu)$($u_\tau$; 壁面摩擦速度)$= 1{,}020$ で, 格子数 $60\times20\times32$ の等間隔, 時間刻み幅 $\Delta t^+ (= (u_\tau^2\Delta t)/\nu) = 1.02*10^{-1}$ とした．

(3) 計算結果

図-1–**図-3** に乱流の基本統計量である 平均流速分布, レイノルズ応力分布, 乱流強度分布を示す. 図中の < > は時間平均, 実線は阿部ら[10]により行われた Re_τ=1,020 の DNS 結果を示す. LES は粗視化成分を予測する為, 比較される対象は DNS 結果にフィルタを掛けた成分となる. 平均流速については sub-grid 成分 u_1' の時間平均がほぼ零と考えられる為, DNS 結果そのものとよく一致している. レイノルズ応力分布, rms 分布に関しては sub-grid 成分を含む分散値の差を評価するモデリング

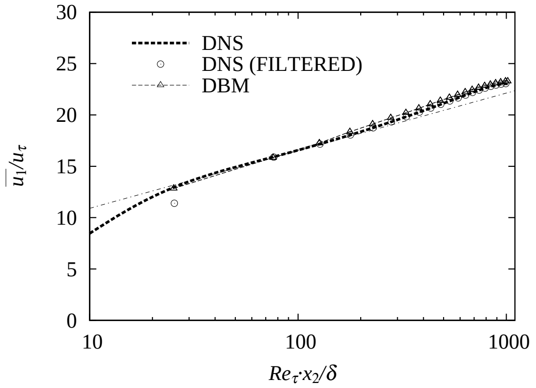

図-1: 平均流速分布 $\left(Re_\tau = 1{,}020,\ \text{破線: } (1/0.41)ln(x_2^+) + 5.29\right)$

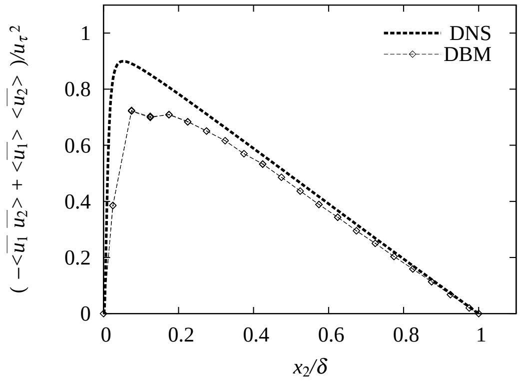

図-2: レイノルズ応力分布 ($Re_\tau = 1{,}020$)

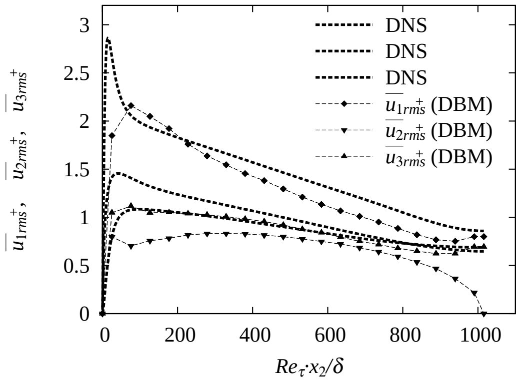

図-3: 乱れ強度分布 ($Re_\tau = 1{,}020$)

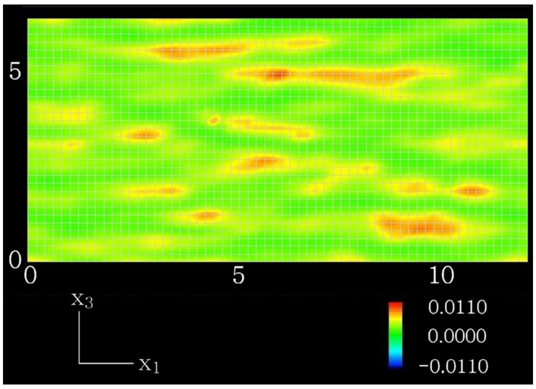

図-4: 瞬時主流方向摩擦応力 (τ_w) 分布
$\left(\text{単位:}\quad \tau_w\,;\,100u_\tau^2,\quad x_1, x_3\,;\ \delta\right)$

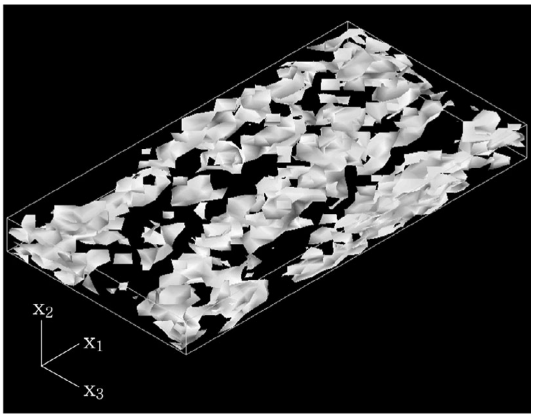

図-5: 瞬時第二不変量分布 ($u'_{i,j}u'_{j,i} < -0.001u_\tau^2/\delta^2$)

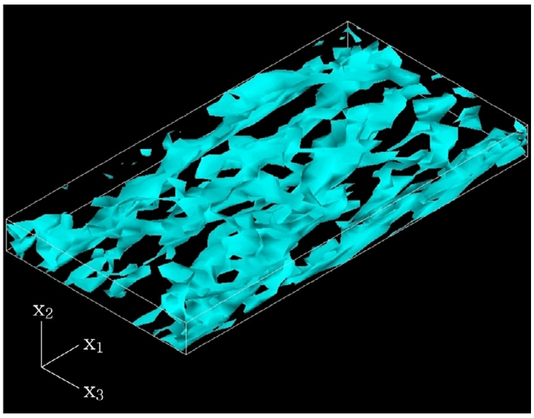

図-6: 瞬時主流変動分布 ($u' < -0.7u'_{1,rms}$)

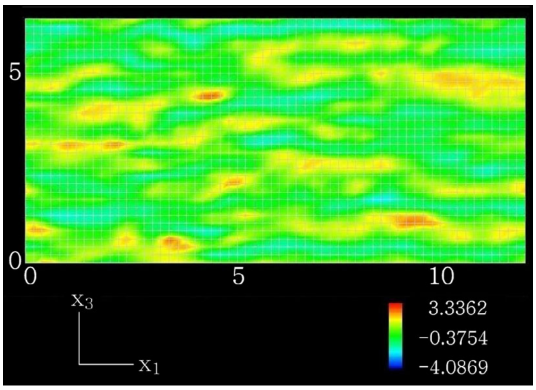

図-7: 瞬時主流変動 (u'_1) 分布 $\left(x_2 = 0.2\delta\right)$
$\left(\text{単位:}\quad u'_1\,;\ u'_{1,rms},\quad x_1, x_3\,;\ \delta\right)$

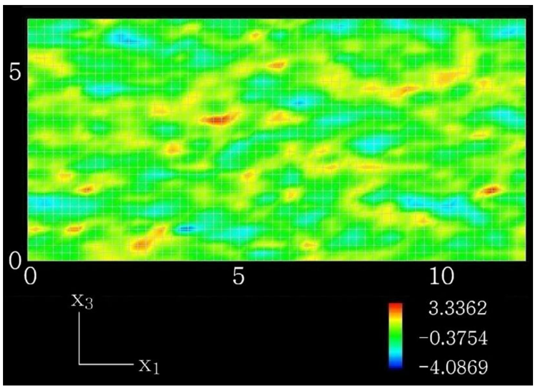

図-8: 瞬時主流変動 (u'_1) 分布 $\left(x_2 = 0.5\delta\right)$
$\left(\text{単位:}\quad u'_1\,;\ u'_{1,rms},\quad x_1, x_3\,;\ \delta\right)$

が LES 計算に不要であり一般に行われない為, 直接比較ができない. しかしレイノルズ応力に関して, 岩本ら[11] は δ スケールの大規模構造がレイノルズ応力を有意に担う位置は $x_2 > 0.2\delta$ と報告している. 本計算は壁近傍構造を解像しない最小解像度 $\Delta^+_{x_3} = 204$ であることに鑑みると, $x_2 < 0.2\delta$ では sub-grid 成分がレイノルズ応力を担う割合が比較的高まる為 DNS 結果との間に大きく差が生じていると考えられる. また主流方向 rms 値が壁付近 ($x_2 < 0.2\delta$) で過大評価される点については, 変動が激しい領域であり 粗視化前流速 U_1 と u'_1 の相関が弱まる為と説明される (証明略). 以上の考察が容易に可能であることから, 少なくとも定性的には粗視化された乱れも比較的良好に再現されたといえる.

図-5 に瞬時の第二不変量分布を示す. 壁面量により無次元化した第二不変量は 内層での渦の位置を同定する指標としてしばしば用いられる. この図にはヘアピン渦ヘッド部の集まり, いわゆる" 渦のパケット"[12] が確認され, その分布は **図-6** のストリーク状の低速領域と同じ, もしくはその上部に位置していることが分かる. この様子は Adrian *et al*. [13] の示唆した, ヘアピン渦の群が その下に低速領域を誘起する描画に対応する. ヘアピン渦の群構造は対数則域構造の特徴とされており [14], この再現が DNS 結果との良好な一致に繋がったと考えられる.

また低速領域を壁からそれぞれ $x_2 = 0.2\delta, x_2 = 0.5\delta$ の位置で示したコンター図 (**図-7**-**図-8**) からは, 壁から離れるにつれストリークの間隔が広がる一方, その長さは短くなり より等方性へ近づく様子が確認される. ストリークの間隔も阿部ら [10] の報告する $x_2 = 0.2\delta$ での 0.9δ, $x_2 = 0.5\delta$ での 1.3δ 間隔と概ね一致しており, 大規模構造の特徴的渦構造が瞬時でも定性的によく再現されていることが分かる.

一方 **図-4** に示す瞬時主流方向摩擦応力分布は Jimenéz, Moin[15] の示した代表的壁近傍構造である 100 壁単位スパン間隔ではなく, 大規模構造の δ スケールで分布しており, 壁近傍構造は再現されていないことも分かる.

これらの結果は壁近傍の影響が本研究の DBM により応力の形で代表されていることを支持するものである. 以上を踏まえると高レイノルズ数の LES において, 粘性スケールの低速ストリークや縦渦構造に代表される壁近傍の SSP(Self-Sustaining Process ; 自己維持過程)[16] は 応力としての考慮のみで, 少なくとも乱流の基本統計量を満たす 巨視的構造のみの再現が可能と考えられる.

4. 結論

高レイノルズ数流れを対象として LES を行うには 粘性スケールの壁近傍構造をモデル化する必要があり, 本研究はフィルタリングを陽的に扱い, 応力の形で壁近傍構造を考慮した.

その結果, 乱流の基本統計量である平均流速, レイノルズ応力分布で DNS 結果との良好な一致が見られ, 瞬時構造でもヘアピン渦ヘッド部の集合やチャネル半幅 δ スケールのストリークが確認された. 以上の結果から以下の知見が得られる.

1. 壁近傍の縦渦構造はレイノルズ数にあまり依存しない為, 動的モデル化される可能性がある.
2. 高レイノルズ数で壁近傍構造はエネルギー生成及びエネルギー保有に殆ど寄与しないため, 壁近傍の渦構造は壁面せん断応力で代表されうる.

DBM によれば境界近傍を解像する必要が無い為, 市街地を流れる河川といった非常に広範囲を対象とする LES も低コストで可能となり, 今後の応用が期待される.

参考文献

1) Deardorff, J.: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J.Fluid Mech*, Vol. 41, pp. 453–480 (1970).
2) Schumann, U.: Subgrid-scale model for finite difference simulation of turbulent flows in plane channel and annuli, *J. Comput. Phys.*, Vol. 18, pp. 376–404 (1975).
3) Piomelli, U., Moin, P. and Kim, J.: New approximate boundary conditions for large-eddy simulations of wall-bounded flows, *Phys.Fluids A*, Vol. 1, p. 1061 (1989).
4) Mason, P. and Callen, N.: On the magnitude of the subgrid-scale eddy coefficient in large-eddy simulation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 162, pp. 439–462 (1986).
5) Werner, H. and Wengle, H.: Large-eddy simulation of turbulent flow around a cube in a plane channel, *In Selected Papers from the 8th Symposium on Turbulent Shear Flows*, pp. 155–168 (1993), New York: Springer.
6) Hoffmann, G. and Benocci, C.: Approximate wall boundary conditions for large-eddy simulations, *In Advances in Turbulence V*, pp. 222–228 (1995), Dordrecht: Kluwer.
7) Wang, M.: LES with wall models for trailing-edge aeroacoustics, *In Annu. Res. Briefs–1999*, pp. 355–364 (1999), Center Turbul. Res.,Stanford Univ.,Calif.
8) 梶島岳夫：対流項の差分形式とその保存性, 日本機械学会論文集, Vol. 60(B), No. 574, pp. 2058–2063 (1994).
9) Yan Zang,Street,R.L., and Koseff,J.R., : A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows, *Physics of Fluids A Fluid Dynamics*, Vol. 5, No. 12, pp. 3186–3196 (1993).
10) 阿部, 松尾, 河村：航技研新数値シミュレータシステムによる平行平板間乱流の大規模 DNS, 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2003, p. 22 (2003).
11) 岩本薫, 笠木伸英, 鈴木雄二：チャネル乱流における階層構造, 日本流体力学会年会 2005 講演論文集 (2005).
12) Zhou,J. Adrian,R.J. Balachandar,S. Kendall,T.M., : Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 387, pp. 353–396 (1999).
13) Adiran,R.J., , Meinhart,C.D., and Tomkins,C.D., : Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, Vol. 422, pp. 1–54 (2000).
14) 三宅裕：壁乱流の渦, ながれ, Vol. 22, pp. 29–34 (2003).
15) Jimenéz, J. and moin, P.: The minimal flow unit in near-wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 225, pp. 213–240 (1991).
16) Kawahara, G. and Kida, S.: Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst, *J. Fluid Mech.*, No. 449, pp. 291–300 (2001).

（**2007.9.30** 受付）