座標軸非依存の部分境界適合法による蛇行流路の数値計算

A NUMERICAL COMPUTING OF MEANDERING CHANNEL WITH A PARTIAL BOUNDARY-FITTED METHOD OF COORDINATE-AXIS-INDEPENDENT

安田 浩保[1]・清水 康行[2]
Hiroyasu YASUDA and Yasuyuki SHIMIZU

[1]正会員　博 (工学)　土木研究所 寒地土木研究所（〒 062-8602 札幌市豊平区平岸 1 条 3 丁目）
[2]正会員　工博　北海道大学大学院教授 北方圏環境政策工学専攻（〒 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目）

Boundary-fitted calculation methods have traditionally used the generalized coordinate system which is required the condition that the coordinate axes intersect. When meandering formation extremely develop, the channel eventually is short-circuited. Because of this, general coordinate system should not be applied to evaluate that problem. This study proposes a new boundary-fitted calculation method that combines a co-orthogonal coordinate system and a boundary-fitted cell system. To validate the accuracy of this method, it was applied to reproduce the flow regime of a meandering channel measured in a previous flume experiment. The calculation method was generally successful at reproducing the flow velocity distribution.

Key Words : *meandering river, numerical analysis, coordinate-axis-independent*

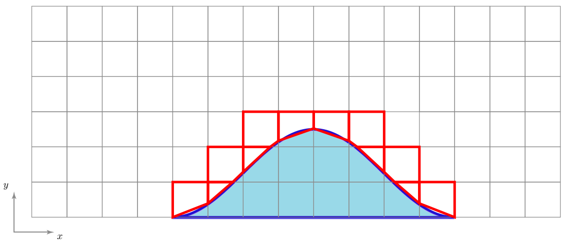
1. はじめに

流路の安定や合理的な河道計画の策定のために河床や流路の変動の予測に関する数多くの研究が行われてきた．近年では，電子計算機の能力の飛躍的な向上と相まって数値解析に基づく予測が重要な役割を果たすようになってきている．数値計算の基本である直交座標系の矩形格子に基づいて，複雑な形状を成す自然河道の流路形状を的確に数値計算に反映するためにはかなり細分化された計算格子が求めら，現在の CPU でもなお大きな計算負荷が発生する．それにもかかわらず，依然として湾曲部などの曲線状の境界部分は矩形格子では完全に表現することが不可能なうえ，このような領域に対して矩形格子を用いた数値計算では実際の物理現象とは無関係の渦を発生して計算精度の低下を招くことさえある．

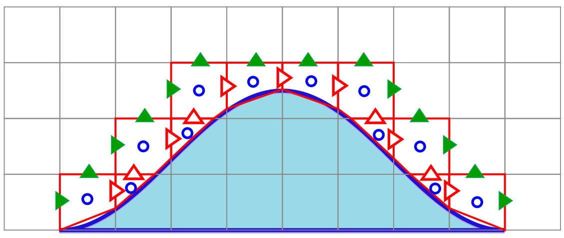
清水[1)]は，河川の形状を柔軟に取り込むことを可能とする計算法に対して先駆的に取り組みを行い，一般曲線座標系を用いた流れと河床変動の計算法の開発に成功している．この計算法では，湾曲部を含む流路でさえその形状に沿った計算格子の設定が可能である．ただし，この計算法では流下方向座標軸 ξ とその横断方向座標軸 η がいずれの計算点においても交差していることが要求されることに加え，同一の座標軸の交差が許容されないため，湾曲曲率が大きい場合や蛇行の短絡などの計算には適さない．

安田[2)]は，三角形や多角形を組み合わせて柔軟かつ効率的に地形を表す地形適合セルを細密な解像度が要求される領域にのみ適用する一方，それ以外の領域には直交座標系を適用し，両者を結合して一体的に計算を行う複合計算に成功している．

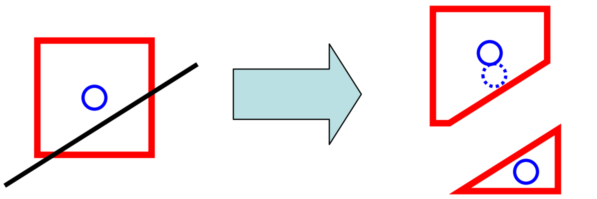
この複合計算法をさらに発展させたものとして，直交座標系の矩形格子では表現が困難な曲線形状などの境界部分にのみ地形適合セルを適用するものの，それ以外には直交座標系を適用する座標軸非依存型の部分境界適合法へ拡張することが考えられる．この計算法では，計算領域の大部分に対しては矩形格子を用い，境界適合が必要な箇所にのみ地形適合セルを用いるため，座標軸に依存することなく対象領域の地形形状を自由に表現できる．しかも，境界適合に伴う計算格子の歪曲は境界部分に限定されるため良好な保存性を確保できるうえ，計算領域全体で計算点を均一の密度で配置できる利点もある．この方法を適用することで，近年課題となっている北海道東部の標津川などで実施されている蛇行復元の将来予測をはじめとする蛇行河川の蛇行進展や短絡問題への適用，さらには，橋脚などの



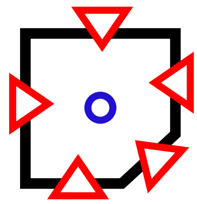
図–1 部分境界適合計算法の適用例（直線水路内に水色で示された湾曲部が存在する場合，座標軸非依存型の部分境界適合の計算法では赤線で描かれた格子に対してのみ境界適合が行われる.）



図–3 計算点の定義と領域の接続



図–2 境界部を内包する直交格子の分割と水位計算点の再定義



図–4 境界適合領域の連続の式の計算点配置と流向の定義

河川構造物を考慮した計算が可能になる.

本研究は，自然河道を対象とした座標軸非依存型の部分境界適合型の計算法を確立するための第一段階として，境界適合セルと直交座標系から構成される部分境界適合計算法の計算特性を評価することを目的としたものである．過去に実施された蛇行流路の室内実験の再現計算をこの計算法と一般曲線座標系の両者で行い，実験値と比較してその有用性を検証した.

2. 数理モデル

(1) 部分境界適合計算法の計算手続

本論文で提案する座標軸非依存型の部分境界適合の表現方法は，境界適合の必要性のない領域に対しては直交座標系を適用し，直交座標系では表現が困難な湾曲部や構造物が存在する領域のみ直交座標系の格子形状を一部変形させたセルに置換することでその形状を適切に表現しようとするものである．例えば，**図–1** に示したような直線水路内に水色で着色された湾曲部が存在する場合，その湾曲部を内包する格子に対してのみ赤色で描かれた境界適合セルを局所的に適用して，この形状を計算に取り込む．その結果、青線のような境界部を内包する直交座標系の格子は、**図–2** に示したようにこれに沿って分割され，それぞれのセルの重心点に水位計算点が新たに配置される.

この部分境界適合計算法の計算点の配置は**図–3** に示した通りである．直交座標系の領域の計算点の配置にはスタッガード格子を用いる．部分適合領域の計算点もスタッガード格子状に**図–3**、**4** に示すように水位と流速の計算点を時空間ともに交互に配置する.

直交座標系と部分適合領域の結合は，**図–3** 内の緑色の塗りつぶし三角印で示される流速の計算点を通して行われる．流速の計算は，緑色と白抜き赤色の三角印ともに次節の 2 次元平面の浅水流方程式で計算される．一方で，白抜き青色の丸印で示された適合座標系内の水位は、塗りつぶし三角印と白抜き赤色の三角印の両者を利用して計算される.

(2) 部分境界適合計算法の支配方程式

直交座標系の領域における x，y 方向の流量フラックス，水位は以下の式 (1)〜(3) の支配方程式により計算される.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}=0 \tag{1}$$

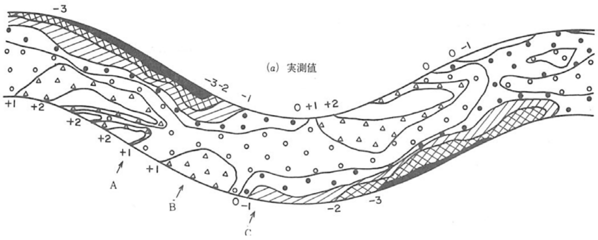
$$\frac{\partial q_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{{q_x}^2}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_x q_y}{h}\right)+gh\frac{\partial H}{\partial x}= -\frac{C_d q_x}{h^2}\sqrt{q_x^2+q_y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial q_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial q_x}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_x q_y}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_y^2}{h}\right)+gh\frac{\partial H}{\partial y}= -\frac{C_d q_y}{h^2}\sqrt{q_x^2+q_y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial q_y}{\partial y}\right) \tag{3}$$

ここで，q_x, q_y は x，y 方向の流量フラックス，t は時間座標，x, y は平面座標，h は水深，g は重力加速度,

表–1 水理実験の諸条件

$\widetilde{L}$	$\widetilde{B}$	θ_0	bed gradient	Q
220cm	30cm	30°	0.00333	1.87l/s



図–5 定常状態に達した時点の河床形状

H は水位、C_d は河床の抵抗係数，ν_t は渦動粘性係数である．

これらの式の数値計算には，運動の式の移流項以外にはスタッガード格子に基づく 2 次精度の Leap–Frog 法を用い，運動の式の移流項は 1 次精度の風上差分を適用した．

部分境界適合領域における連続の式は，2 次元平面場における浅水流方程式に基づき矩形格子以外の多角形（セル）でも計算が可能なように以下のように拡張される．まず，任意多角形での水位計算が可能なように直交座標系では x 方向，y 方向の流速値はそれぞれ右および上を正として定義されていたものを**図–4** に示したようにセルへの流入が正となるように流向の定義を改め，結果的に境界適合領域の連続の式は，

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{k} Q_i = 0 \tag{4}$$

と書き換えられる．ここで，$Q_i(= q_i B_i)$ はセルの各辺上の流量，q_i はこの辺上の流量フラックス，B_i は辺長，A は水位を求めるセルの面積，k はセルの辺数である．

(3) 一般座標系の支配方程式

一般座標系に座標変換された浅水流方程式は以下のように表される．

連続の式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{hu^\xi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{hu^\eta}{J}\right) = 0 \tag{5}$$

ξ 方向の運動方程式は，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^\xi}{\partial t} + u^\xi\frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + u^\eta\frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + \alpha_1 u^\xi u^\xi + \alpha_2 u^\xi u^\eta + \alpha_3 u^\eta u^\eta \\ &\quad = -g\left[\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)\frac{\partial H}{\partial \xi} + \left(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\right)\frac{\partial H}{\partial \eta}\right] \\ &\qquad -\frac{C_d u^\xi}{hJ}\sqrt{K1^2+K2^2} + D^\xi\end{aligned} \tag{6}$$

η 方向の運動方程式は，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^\eta}{\partial t} + u^\xi\frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + u^\eta\frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + \alpha_4 u^\xi u^\xi + \alpha_5 u^\xi u^\eta + \alpha_6 u^\eta u^\eta \\ &\quad = -g\left[\left(\eta_x\xi_x + \eta_x\xi_y\right)\frac{\partial H}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)\frac{\partial H}{\partial \eta}\right] \\ &\qquad -\frac{C_d u^\eta}{hJ}\sqrt{K1^2+K2^2} + D^\eta\end{aligned} \tag{7}$$

と表される．ここで，u^ξ は流速の ξ 方向成分，u^η は流速の η 方向成分，J は座標変換のヤコビアンで $1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$，$K1 = \eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta$，$K2 = -\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta$，$\alpha_1 = \xi_x\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \xi_y\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$，$\alpha_2 = 2\left(\xi_x\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} + \xi_y\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\right)$，$\alpha_3 = \xi_x\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \xi_y\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$，$\alpha_4 = \eta_x\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \eta_y\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$，$\alpha_5 = 2\left(\eta_x\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} + \eta_y\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\right)$，$\alpha_6 = \eta_x\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \eta_y\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$ である．また，D^ξ，D^η は拡散項とし，

$$D^\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\nu_t\xi_r^2\frac{\partial u^\xi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\nu_t\eta_r^2\frac{\partial u^\xi}{\partial \eta}\right) \tag{8}$$

$$D^\eta = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\nu_t\xi_r^2\frac{\partial u^\eta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\nu_t\eta_r^2\frac{\partial u^\eta}{\partial \eta}\right) \tag{9}$$

である．

これらの式の数値計算法は，運動の式の移流項と拡散項，それ以外の項に対して分離解法を用い，移流項の計算は CIP 法で，拡散項の計算には中央差分法を用いた．

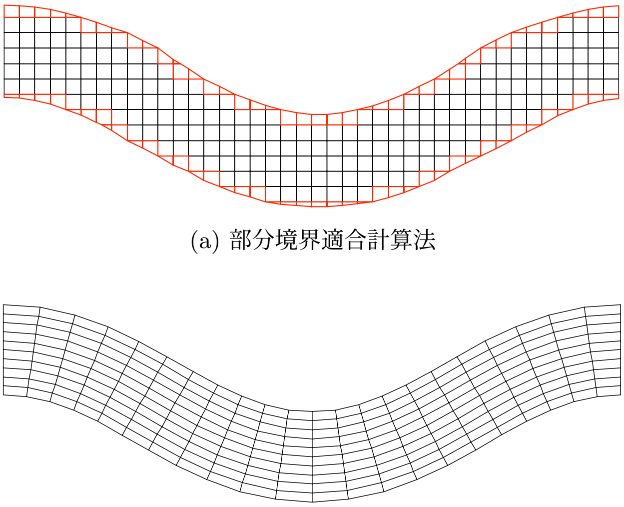
3. 蛇行流路の水理実験の再現計算

(1) 再現計算の対象とする水理実験の概要

長谷川ら[3),4),5)]は，蛇行流路における流れの性質を調べることを目的に蛇行流路の移動床実験を行っている．彼らは，式 (10) で表現される sine-generated curve の形状から成る水路を用いて種々の条件で実験を行った．

$$\theta = -\theta_0 \sin\frac{2\pi}{\tilde{L}}\tilde{s} \tag{10}$$

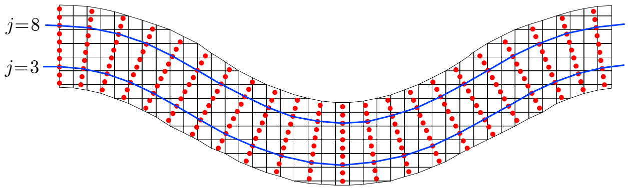
本研究では，このうち，**表–1** に示した ME–2 と呼ばれる実験の再現計算を行うことにした．ここに，$\tilde{L}$ は蛇行長，$\tilde{B}$ は流路幅，θ_0 は蛇行角，また，同表中の Q は上流端から供給する定常流量である．彼らによると，**表–1** の条件のもとで実験を実施した結果，実験開始か



(a) 部分境界適合計算法

(b) 一般座標系

図–6 計算格子



図–7 計算値の評価点

ら 240 分後に定常状態に達し，その時刻における河床形状が**図–5** である．

本研究では，境界適合セルと直交座標系を組み合わせた部分境界適合計算法の計算特性を評価するために，この水理実験の再現計算を行った．部分境界適合計算法，一般座標系のいずれの再現計算に対してもこの定常状態における河床形状を固定床として与えて再現計算を行った．

(2) 計算格子

図–5 に示した水路を部分境界適合計算法，一般座標系のそれぞれで数値計算するにあたり，計算格子を**図–6** a)，b) に示す通り設定した．

図–6 a) に示した部分境界適合計算法の計算格子は，基本となる直交座標系の格子を水平方向，鉛直方向ともに 5cm の正方格子に設定した．赤線で描かれている箇所が側壁を内包するために境界適合されるセルである．このようなセルは計算領域内に 83 個存在し，正方格子の個数は流下方向に 40 個，横断方向に 5 個である．

一方で，比較対象のために行った一般座標系の計算では**図–6** b) に示した計算格子を設定し，これは実験水路を流下方向に 22 分割，横断方向に 10 分割したものである．

計算格子の数は，このように部分境界適合計算法，一般座標系のどちらもほぼ同程度である．

(3) 初期条件・境界条件

本研究では，河床のせん断力の評価は長谷川[3]と同様に黒木ら[6]により提案された式を用い，実験結果として示されている平均流速と平均水深を与えて河床の抵抗係数 C_d を 0.007 と求めた．このとき，摩擦速度を介して Manning の粗度係数は 0.010 と逆算される．そして，部分境界適合した計算法の初期条件として，この粗度係数に基づき算定される等流水深となるように計算領域内の各水位計算点に水位分布を与えた．

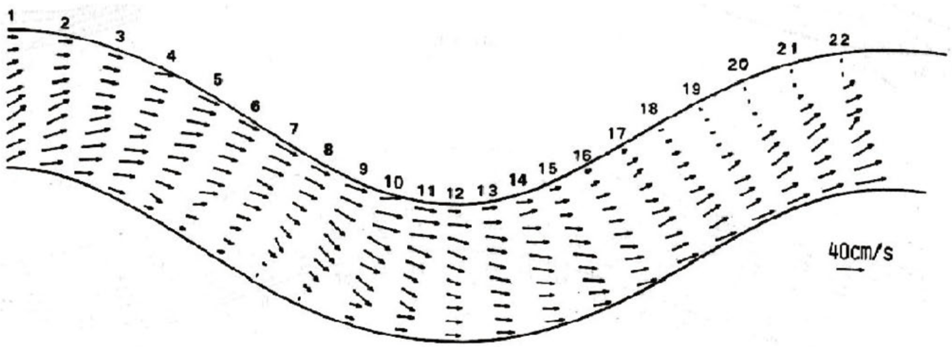
部分境界適合計算法の上流端の境界条件には流速値を与えた．この流速値は，実験結果に示されている横断方向の流速分布をそれぞれの計算格子に与えた．ただし，部分境界適合した計算法では，計算点の位置が実験の流速測定点と異なるため，計算点に与える流速は内挿補完して求め，これらを上流端の境界条件とした．下流端の境界条件には水位を与えるものとし，前述の等流水深と河床高さから規定される水位を与えた．また，水路側壁の境界条件は、ここでの流速を 0 とする non–slip 条件とした．

渦動粘性係数 ν_t については，$\kappa u_* h/6$ として求めた．ここで，κ はカルマン定数で，0.4 を与え，u_* は摩擦速度である．

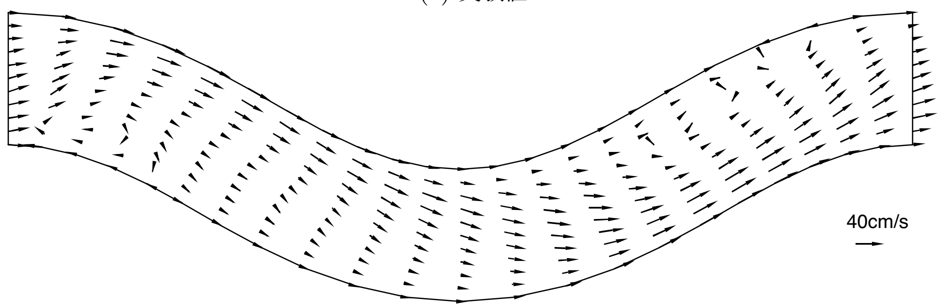
(4) 計算結果

長谷川らによる実験値と 2 つの計算法による計算結果の比較図を**図–8**，**9** に示した．**図–8** は平面的な流速分布，**図–9** は**図–7** に示した $j = 3, 8$ 上における流速値，x 方向および y 方向の 3 者の流速値の比較図である．ただし，部分境界適合計算法と一般座標系の計算では計算点の位置が異なるため，**図–9** における比較では部分境界適合計算法の計算値は**図–7** 中の赤丸印においてそれぞれ求めた補完値を利用している．また，実験値は，前述の実験開始から 240 分後に得られた河床形状を固定化した固定床水路に通水して得られた定常流況である．

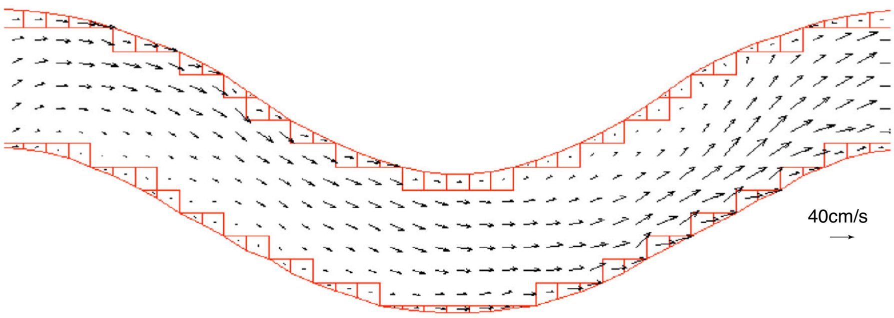
まず，**図–8** から分かるように，部分境界適合計算法，一般座標系計算のいずれとも実験値を概ね再現し，上流区間の左岸側壁に沿う流況とその対岸での剥離，また下流区間の右岸側壁に沿う流況やその対岸の剥離などをともに同様に表している．このうち，剥離・再付着の様子は，むしろ一般座標系より本手法の方が実験値を良く再現しているといえる．また，両計算法ともに主流が実験値と同様の緩やかに蛇行を描くように計算されていることが分かる．ただし，部分境界適合した計算法の計算結果では曲頂部内岸の流束の集中が実験値と比べて明瞭ではないことが見て取れる．



(a) 実験値



(b) 一般座標系



(c) 部分境界適合計算法

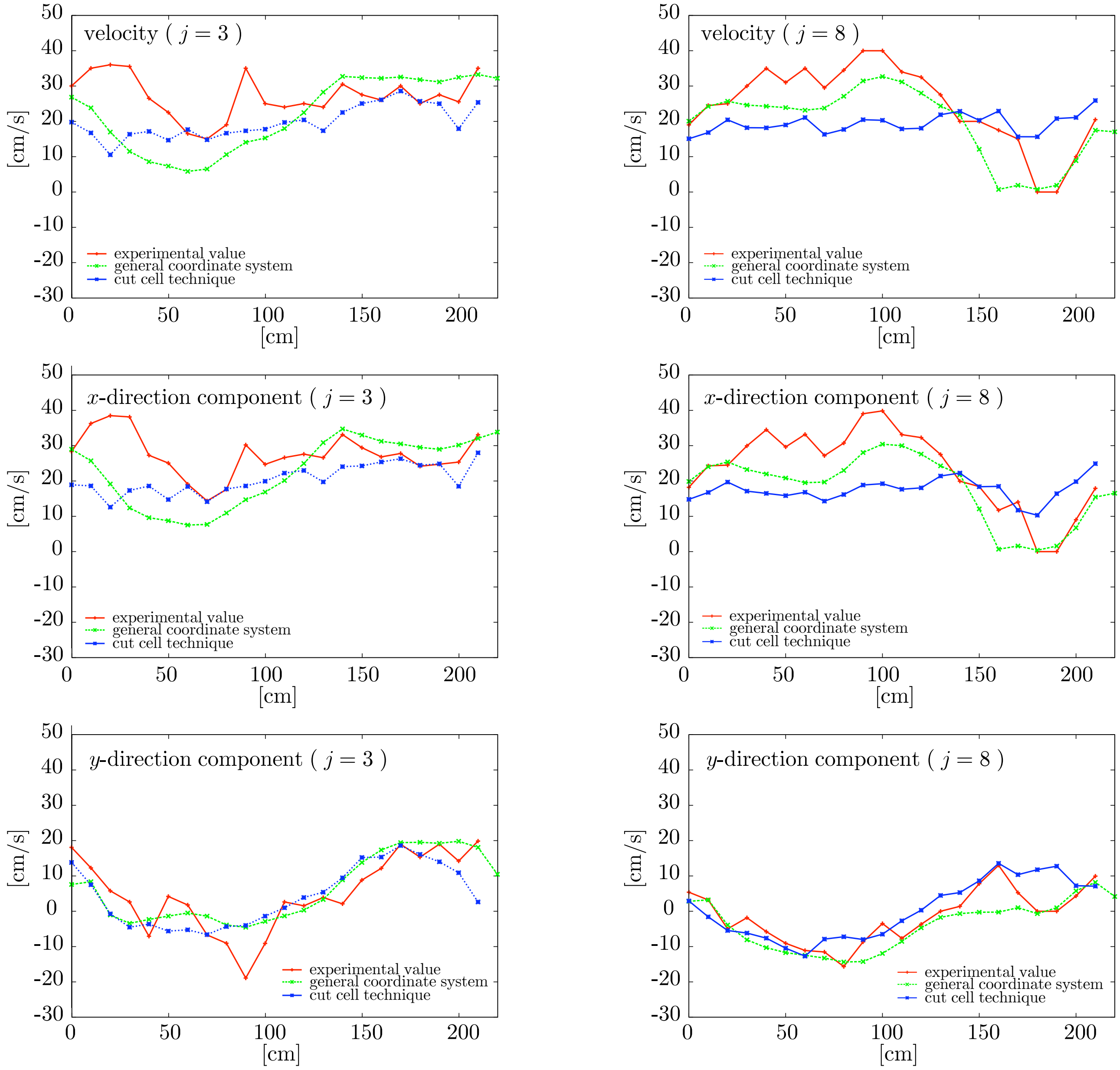
図–8 定常状態に達した時点での流速ベクトルの比較

つぎに，**図–9** に示した $j = 3, 8$ における流速値の比較である．$j = 3$ に関しては両計算法が示した各地点の流速，x, y 方向流速のそれぞれともに実験値を良好に再現していると言える．一方で，$j = 8$ に関しては y 方向流速は 3 者ともに一致していることが認められるものの，部分境界適合した計算法の流速，x 方向流速は実験値と比べて特に上流区間で過小評価の傾向が強いことが見て取れる．

現時点では，部分境界適合した計算法の解析結果を比較，検討するための資料がここに示されているものだけにとどまるため，前述した問題点の原因を追及することは難しい．今後は，部分境界適合計算法と一般座標系の計算では移流項の計算スキームが異なっているため，この統一を行う必要がある．また，今回対象とした実験水路よりもさらに蛇行角が大きな問題への適用や蛇行復元が行われて直線河道と蛇行河道の両者からなる 2 重流路を有する河川に対して部分境界適合計算法を適用してその適用性の検証を続ける必要がある．

4. おわりに

本研究では，部分境界適合した計算法の計算特性について，室内水理実験結果と一般座標系の解析結果とを比較することにより示した．その結果，新たな境界適合型の計算法としての有用性を示され，座標軸に依存することなく湾曲部などを表現しうる本計算法は，一般座標系では解析が困難とされる流路の蛇行進展や短絡問題への適用が期待される．ただし，さらに計算特性の検証を加える余地が残されている．現時点では，部分境界適合した計算法の解析結果を比較，検討するための資料が本研究において示したものだけにとどまる．



a) $j = 3$　　　　b) $j = 8$

図–9　定常状態に達した時点での流速成分の比較

このため，今後は今回再現計算を実施した水路形状とは異なる水理実験，および本研究で示した部分境界適合計算法の地形表現の優位性が現れる実河川スケールの両者にこの計算法を適用して適用性の検証を続けるとともに，移動床問題への拡張を行う必要がある．

謝辞：本研究は，一部，国土交通省北海道開発局受託研究，文部科学省科学研究費補助金 基盤研究 (A)（研究代表　清水康行），河川環境管理財団河川整備基金助成（研究代表　渡邊康玄）からの支援を受けて実施されている．また，研究当時，北海道大学に在籍していた新田友子君（東京大学大学院）は数値計算などに尽力してくれた．ここに記して謝意を表します．

参考文献

1) 清水康行：一般座標系を用いた 2 次元流れと河床変動の計算，土木学会年次学術講演会講演概要集第 II 部，No.46, pp.634–635, 1991.
2) 安田 浩保：複雑な 3 次元地形における津波氾濫流に関する数値計算，土木学会北海道支部平成 16 年度論文報告集，第 61 号, 2004.
3) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究，北海道大学博士論文，184.p., 1984.
4) 長谷川和義, 山岡勲, 田中直人：蛇行蛇行の影響を受けた河床波の形状特性，土木学会北海道支部論文報告集第 II 部，第 38 号, 1982.
5) 長谷川和義, 山岡勲, 鈴木康正：蛇行流路における河床波上の流れ，土木学会北海道支部論文報告集第 II 部，第 38 号, 1982.
6) 黒木幹男, 岸力, 板倉忠興：交互砂州の水理特性，　沖積河川における河床形態と流体抵抗の研究，　1975.

(2007．9．30 受付)