

円筒座標CIP-Soroban法と境界適合座標法を 組み合わせた蛇行河川の準3次元計算法

QUASI-3D SOLVER OF MEANDERING RIVER FLOWS BY CIP-SOROBAN SCHEME IN
CYLINDRICAL COORDINATES WITH BOUNDARY FITTED COORDINATE METHOD

吉田圭介¹・石川忠晴²

Keisuke YOSHIDA and Tadaharu ISHIKAWA

¹正会員 博士(工) 東京工業大学大学院 産学官連携研究員(〒226-8502 横浜市緑区長津田4259番地)

²フェロー会員 工博 東京工業大学大学院 教授(〒226-8502 横浜市緑区長津田4259番地)

A new numerical solver is developed for the quasi-3D river flow model to simulate meandering river flows. This solver can investigate the flows in the arbitrary curved river channel, by means of the adaptive CIP-Soroban (CIP-S) scheme in a cylindrical coordinate system with support of a boundary fitted coordinate (BFC) system. Time development of water velocity in the convection phase is computed by the orthogonal curvilinear coordinate system without any transformation of the governing equations, whereas the continuity equation is solved by the BFC method, so that the mass conservation is fully satisfied and the water level is accurately calculated. From the verification of this solver of the meandering river flows with the pure BFC method, it is shown that the proposed numerical solver reasonably predicts the main flow profile in a periodically curved open-channel, and that the horizontal velocity profile both at the free-surface and at the bottom is reasonably predicted with the effect of the secondary currents in the curved section of the river.

Key Words: *adaptive CIP-Soroban scheme, cylindrical coordinate system, boundary fitted coordinate (BFC) system, meandering river flows, quasi-3D flow model*

1. はじめに

環境を考慮した多自然川づくりや、ダムを排した低コスト型の治水・利水方策が社会的に議論される状況下で、近年の異常気象に伴う集中豪雨による洪水被害から如何にして人命・財産を守るかは重要な工学的課題と言える。洪水流動をマクロな力学面から捉えると、洪水は1次元的には重力と河床抵抗がほぼ拮抗した準定常流とみなされる。その結果、河道計画では流量、水位、地被粗度の縦断的な予測が重要視されてきた。従来、実務では1次元不定流計算による洪水流解析に多くの実績があり、現在でも洪水流の高精度観測法などが検討されている¹⁾。

しかし、実河川の平面形状は蛇行、複断面化している場合が多く、河道内の流れの偏倚、水衝部・植生・水制周辺域での非平衡河床洗掘による河道変化など実用上重要な水理現象や、洪水後の流木やゴミの集積などの環境面での問題を1次元(準2次元)解析のみで正確に予測することは難しい。これは河道横断面内や鉛直面内においては、河川流に特有の2次元ないし3次元の渦運動が発生するためである。例えば、複断面河道においては大規模渦が地被状態や水深の相違に伴い発生し、蛇行・湾曲部では秩序的な2次流が生成され、河床底面からは組織的かつ間欠的な上昇渦運動が観察される。そして、こういった現象によって洪水流の力学的状態(流速分布な

ど)や流砂機構が支配されることが、既往の精力的な観測結果や実験結果などで明らかにされてきた。

一方、近年、CFDの高度な技法を利用した水理計算が実施されつつあり²⁾、高精度かつ低負荷の水深積分型計算法を用いることで、模型実験と水理計算を併用した河道計画の策定が可能となってきた。特に、近年の河川流の実務における解析では長区間の計算負荷を緩和する目的で、少ない計算格子で複雑な河道形状を表現する場合や、物理量の急激な空間勾配を捉えるために空間解像度を計算領域内で適切に設定・変更できる境界適合座標(Boundary Fitted Coordinate, BFC)法を用いた水理計算が行われている。しかし、このBFC法を用いた計算では非一様な大小の格子幅を用いることで、物理座標から計算座標への座標変換に伴って支配方程式中の、特に移流項の精度が低下することが指摘されている^{3),4)}。河川流に特有の現象の多くがせん断乱流に起因することを考慮すれば、低解像度格子を用いた実務における数値現象予測では、何かしらの方法でこの類の数値粘性による計算精度の低下を防ぐ必要がある。

著者らは前報⁵⁾において、境界適合型の高精度スキームであるCIP-Soroban法³⁾を、屈曲する河道境界に適合した円筒座標上で構成した浅水流計算法を開発した。その結果、純粋なBFC法と比較してその移流計算精度が良好であることを確認した。しかし、前報の方法では任意河道における流体の保存性に

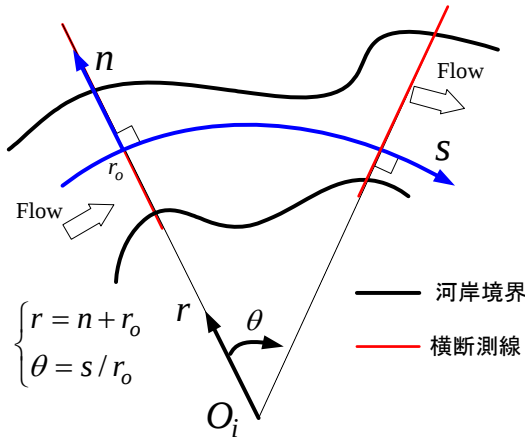


図-1 2つの座標系 $(r, \theta, z), (s, n, z)$ と河岸境界
(O_i は局所的な曲率中心, z は紙面垂直に手前向)

難点があり、これは実用面で重要な水位の予測に影響が出るため、解法の改善を必要とした。そこで、本報では移流計算の精度を保持しつつ、流体の保存性を高める目的で、前報で提案した手法に加えてBFC法を融合した形で新たな計算法の開発を試みた。この際、直交・非直交の2種類の格子系と対応する座標系を計算の物理過程に応じて使い分け、精度と保存性の向上を図った。また、計算の煩雑さ、計算時間の冗長性及び水面波を含む開水路流計算の不安定性を総合的に勘案して、変数の変換方法と計算の進行法にはCFDで有力な技法を適宜取り入れた。

本報では浅水流計算を対象として、移流計算スキームと計算格子幅を変化させた場合に、BFC法と本報で提案する方法との間で計算精度の比較を行い、本報で提案する手法の適用性や有効性について検討した。その上で、計算法の実用性を考慮して、準3次元計算法⁶⁾を本計算法に組み込み、応用例として支流を含む河川流への適用を試みた。

2. 支配方程式

(1) 基礎方程式

湾曲・蛇行する実河川での流体計算を考慮して、円筒座標系 (r, θ, z) における3次元非圧縮性流体に関する支配方程式を円筒座標系 (s, n, z) に変換する(図-1参照)。ただし、 s 軸は流路に沿って流下方向にとり、 n 軸は横断測線にほぼ合致するようにとる。このとき、この s 軸を n 軸と常に直交するように定義するが、必ずしも s 軸は河道中央上には無い。そのため、本計算法では河道に沿った非直交格子と、直交座標で記述した支配方程式との間の不一致による斜交性の問題¹⁾を考慮する必要がない。

本報では上述の支配方程式に対して、簡単のため圧力に静水圧分布を仮定し、分子粘性は水深方向勾配 $\partial/\partial z$ のみを考慮する。この結果得られる式系にReynolds平均操作を行った後に、水深方向にGalerkin積分を施す。その後、Leibnitz ruleおよび水面($z = H$)と底面($z = z_0$)における運動学的条件式を適用する

と、以下に示す3つの方程式が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} [u] + \frac{1}{1+\sigma n} \{ (1+\sigma n)[v] \} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [pu] + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} [pu^2] + \frac{\partial}{\partial n} [puv] + \frac{2\sigma}{1+\sigma n} [puv] \quad (2)$$

$$= -\frac{g}{1+\sigma n} \frac{\partial H}{\partial s} [p] + \left[u \frac{Dp}{Dt} \right] + \left[p \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + [p \text{Reys}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [pv] + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} [puv] + \frac{\partial}{\partial n} [pv^2] - \frac{\sigma}{1+\sigma n} [p(u^2 - v^2)] \quad (3)$$

$$= -\frac{g}{1+\sigma n} \frac{\partial H}{\partial n} [p] + \left[v \frac{Dp}{Dt} \right] + \left[p \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + [p \text{Reyn}]$$

ここで、 t は時刻、 h は水深、 g は重力加速度、 (u, v) は (s, n) 方向のReynolds平均流速、 σ は s 軸上の曲率であり、 ν_t は水深方向の渦粘性係数である。また、 p は重み付け関数であり、記号 $[\alpha]$ (α は物理量) は底面から水面までの水深積分値である。さらに、Reys 及び Reyn は (s, n) 方向のReynolds応力である⁵⁾。

(2) 準3次元化方程式

水深方向の流速分布は次式で表現する。

$$\begin{cases} u(s, n, z) = u_0(s, n) + f(z)u_1(s, n) \\ v(s, n, z) = v_0(s, n) + f(z)v_1(s, n) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、下付き添え字0は水深平均成分、1は水深平均流からの偏差成分を表し、 f は水深方向の形状関数である。本報では石川ら⁷⁾に倣って f は線形分布とした。平均流成分を求める際には重み付けを $p=1$ 、偏差流成分では $p=f$ とすると、式(1)~(3)より次の5つの式が得られる。以下ではこれらの式群を所定の方法で離散化し、数値解を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial M_0}{\partial s} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial n} \{ (1+\sigma n)N_0 \} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_0}{\partial t} + \frac{u_0}{1+\sigma n} \frac{\partial M_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial M_0}{\partial n} \\ &= -\frac{gh}{1+\sigma n} \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\tau_s}{\rho} \left(\frac{M_0}{1+\sigma n} \frac{\partial u_0}{\partial s} + M_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \\ & - \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{12} M_1 u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{12} M_1 v_1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2\sigma}{1+\sigma n} \left(M_0 v_0 + \frac{1}{12} M_1 v_1 \right) \\ & + \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} \left(-\overline{u' u' h} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(-\overline{u' v' h} \right) + \frac{2\sigma}{1+\sigma n} \left(-\overline{v' v' h} \right) \right\} \\ & \frac{\partial N_0}{\partial t} + \frac{u_0}{1+\sigma n} \frac{\partial N_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial N_0}{\partial n} \\ &= -gh \frac{\partial H}{\partial n} - \frac{\tau_n}{\rho} \left(\frac{N_0}{1+\sigma n} \frac{\partial u_0}{\partial s} + N_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \\ & - \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{12} N_1 u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{12} N_1 v_1 \right) \right\} \\ & + \frac{\sigma}{1+\sigma n} \left(M_0 u_0 - N_0 v_0 + \frac{1}{12} M_1 u_1 - \frac{1}{12} N_1 v_1 \right) \\ & + \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} \left(-\overline{u' v' h} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(-\overline{v' v' h} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma}{1+\sigma n} \left(-\overline{u' u' h} \right) + \frac{\sigma}{1+\sigma n} \left(-\overline{v' v' h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{u_0}{1+\sigma n} \frac{\partial M_1}{\partial s} + v_0 \frac{\partial M_1}{\partial n} = Taus - \left(\frac{M_1}{1+\sigma n} \frac{\partial u_0}{\partial s} + M_1 \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} (M_0 u_1) + \frac{\partial}{\partial n} (M_0 v_1) \right) \\ & - \frac{2\sigma}{1+\sigma n} (M_1 v_0 + M_0 v_1) + Dps \\ & + \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} (-\overline{f u' u' h}) + \frac{\partial}{\partial n} (-\overline{f u' v' h}) + \frac{2\sigma}{1+\sigma n} (-\overline{f u' v' h}) \right\} \\ & \frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{u_0}{1+\sigma n} \frac{\partial N_1}{\partial s} + v_0 \frac{\partial N_1}{\partial n} \\ & = Taun - \left(\frac{N_1}{1+\sigma n} \frac{\partial u_0}{\partial s} + N_1 \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \\ & - \left(\frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} (N_0 u_1) + \frac{\partial}{\partial n} (N_0 v_1) \right) \\ & + \frac{\sigma}{1+\sigma n} (2M_0 u_1 - 2N_0 v_1) + Dpn \\ & + \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial s} (-\overline{f u' v' h}) + \frac{\partial}{\partial n} (-\overline{f v' v' h}) \right. \\ & \left. - \frac{\sigma}{1+\sigma n} (-\overline{f u' u' h}) + \frac{\sigma}{1+\sigma n} (-\overline{f v' v' h}) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 H は水位、 (τ_s, τ_n) は (s, n) 方向の河床せん断応力、 ρ は水の密度、 $(M_0, N_0) = (u_0 h, v_0 h)$ は平均線流量、 $(M_1, N_1) = (u_1 h, v_1 h)$ は偏差線流量である。また、 u', v' は乱れ成分、上付き一重バーはReynolds平均演算子であり、上付き二重バーはそれに加えて水深積分を施す演算子を示す。さらに、 $(Taus, Taun)$ および (Dps, Dpn) は次式で算定される。

$$Taus = 12 \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_s}{\rho} \right) \left(\frac{1}{h} \right) u_1, \quad Taun = 12 \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_n}{\rho} \right) \left(\frac{1}{h} \right) v_1 \quad (10)$$

$$Dps = u_0 \left(\frac{u_1}{1+\sigma n} \frac{\partial h}{\partial s} + v_1 \frac{\partial h}{\partial n} \right) + u_0 \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial h u_1}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \{ (1+\sigma n) h v_1 \} \right\} \\ - \frac{1}{2} u_1 \left(\frac{u_1}{1+\sigma n} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{u_1}{1+\sigma n} \frac{\partial z_o}{\partial s} \right) - \frac{1}{2} u_1 \left(v_1 \frac{\partial H}{\partial n} + v_1 \frac{\partial z_o}{\partial n} \right) \quad (11)$$

$$Dpn = v_0 \left(\frac{u_1}{1+\sigma n} \frac{\partial h}{\partial s} + v_1 \frac{\partial h}{\partial n} \right) + v_0 \left\{ \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial h u_1}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \{ (1+\sigma n) h v_1 \} \right\} \\ - \frac{1}{2} v_1 \left(\frac{u_1}{1+\sigma n} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{u_1}{1+\sigma n} \frac{\partial z_o}{\partial s} \right) - \frac{1}{2} v_1 \left(v_1 \frac{\partial H}{\partial n} + v_1 \frac{\partial z_o}{\partial n} \right) \quad (12)$$

以上をまとめると、解くべき基礎方程式は連続式(5)、平均流の運動量式(6)及び式(7)、偏差流の運動量式(8)及び(9)である。平均流成分のみを対象とする浅水流方程式と比較すると、式(6)と式(7)の右辺第4項と右辺第5項に差異が観察される。これらは各々移流項（慣性項）と遠心・接線加速度項の偏差成分からの寄与に相当し、元の支配方程式の移流項から派生している。また、式(8)と式(9)では、底面摩擦を生成項、渦粘性を消散項、及び主流と偏差流の干渉を輸送項として、偏差流成分が算定されることがわかる。さらに、式(6)～式(9)は式形が類似しており、浅水流に関する既往の計算法を容易に適用できる。なお、これらの式形は保存形で記述することも可能だが、後述のCIP法を適用するために、ここでは非保存形式で表現した。

3. 数値解法

CIP法の時間分割と有限差分法の考えに従い、式(5)～式(9)を以下の3段階の計算相に分解し、順次計算を行うことで流速と水深の時間積分を行う。ただし、本報では中山ら⁸⁾と同様に、流速成分に対してのみ時間分割を行った。

(1st step 移流相)

$$\frac{\partial M_0}{\partial t} + \frac{u}{1+\sigma n} \frac{\partial M_0}{\partial s} + v \frac{\partial M_0}{\partial n} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} + \frac{u}{1+\sigma n} \frac{\partial N_0}{\partial s} + v \frac{\partial N_0}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{u}{1+\sigma n} \frac{\partial M_1}{\partial s} + v \frac{\partial M_1}{\partial n} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{u}{1+\sigma n} \frac{\partial N_1}{\partial s} + v \frac{\partial N_1}{\partial n} = 0 \quad (16)$$

(2nd step 非移流相～連続式とのカップリング)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial M_0}{\partial s} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial n} \{ (1+\sigma n) N_0 \} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial M_0}{\partial t} = -\frac{gh}{1+\sigma n} \frac{\partial H}{\partial s} + F_{s0} \quad (18)$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -gh \frac{\partial H}{\partial n} + F_{n0} \quad (19)$$

(3rd step 非移流相～偏差流成分の修正)

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = F_{s1} \quad (20)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = F_{n1} \quad (21)$$

ここで、 F_{s0}, F_{n0} は各々、式(6)及び式(7)の右辺における水位勾配項以外の全ての項を示し、 F_{s1}, F_{n1} は各々、式(8)及び式(9)の右辺全ての項を示す。以下には、各stepを計算するための手法、計算格子の作成方法及び境界条件について示す。

(1) 移流相

移流相の計算では、 (s, n) 座標上のSoroban格子に適合したM型CIP法³⁾を適用する。この方法では、ある計算点における移流後の物理量 f^* （移流計算後の物理量には上付き*を付し、以下では上付き添字は時間相を示す。）はその計算点の上流点を囲む4つの計算点における物理量 f_k^n ($k=1 \sim 4$) とその空間微分値を用いて算定される。なお、河岸近傍において上流点B周囲に4点の計算点が存在しない場合にはM型CIP法を適用せず、周囲3点の f 値を結んだ線形結合から上流点の f 値を推定して計算した。

(2) 非移流相～連続式とのカップリング

第2ステップでは水深平均の線流量 M_0^*, N_0^* と連続式とのカップリングを行い、次時刻の M_0^{n+1}, N_0^{n+1} と水深 h^{n+1} を陰的に求める。ここで、Soroban格子を用いた流動計算では境界条件の与え方は一意ではない。例えば、水工学の分野では中村ら⁹⁾が鉛直2次

元の流動解析を行う際に、固定物理境界外に計算点を配置し、境界条件を満足する流体計算を行った。一方、本報で対象とする河川流では堤内地に格子点を置いて境界条件を設定することは、水深の非負条件から考えて不利である。そこで、本報ではこのステップの計算のみBFC法を援用して、カップリング操作を行うこととした。また、本計算法では線流量と水深を同一点に定義しているため、コロケート格子における数値解法²⁾が利用できる。そこで、以下の手順で計算を進める。

式(17)～式(19)で次式が成立すると考える。

$$\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta t} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial M_0^{n+1}}{\partial s} + \frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial}{\partial n} \{ (1+\sigma n) N_0^{n+1} \} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{M_0^{n+1}-M_0^*}{\Delta t} = -\frac{gh^{n+1}}{1+\sigma n} \frac{\partial H^{n+1}}{\partial s} + F_{s0}^* \quad (23)$$

$$\frac{N_0^{n+1}-N_0^*}{\Delta t} = -gh^{n+1} \frac{\partial H^{n+1}}{\partial n} + F_{n0}^* \quad (24)$$

式(18)及び式(19)において、図-2に示すように格子中心における線流量を次式から算定する。

$$\tilde{M}_0 = M_0^* + F_{s0}^* \Delta t \quad (25)$$

$$\tilde{N}_0 = N_0^* + F_{n0}^* \Delta t \quad (26)$$

ただし、上式は各々、式(18)及び式(19)から水位勾配項を除いたものとなっている。つまり、

$$\frac{M_0^{n+1}-\tilde{M}_0}{\Delta t} = -\frac{gh^{n+1}}{1+\sigma n} \frac{\partial H^{n+1}}{\partial s} \quad (27)$$

$$\frac{N_0^{n+1}-\tilde{N}_0}{\Delta t} = -gh^{n+1} \frac{\partial H^{n+1}}{\partial n} \quad (28)$$

一方、計算空間上でセル境界に線流量 $\hat{M}_0, \hat{N}_0$ を定義する。これらは $\tilde{M}_0, \tilde{N}_0$ を反変成分に変換して、線形内挿から求める。

次に、式(22)、式(27)及び式(28)から次時刻の M_0^{n+1}, N_0^{n+1} と水深 h^{n+1} を陰的に求める。この際、これらは計算空間へ写像してから次式で計算を行う。

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \left(\frac{h^{n+1}}{J_*} \right) - \left(\frac{h^n}{J_*} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\hat{M}_0}{J_*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\hat{N}_0}{J_*} \right) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \left(\frac{\hat{M}_0^{n+1}}{J_*} \right) - \left(\frac{\hat{M}_0^*}{J_*} \right) \right\} = -gh^{n+1} \left\{ \frac{1}{J_*} \left(\frac{\xi_s^2}{(1+\sigma n)^2} + \xi_n^2 \right) \frac{\partial H^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{1}{J_*} \left(\frac{\xi_s \eta_s}{(1+\sigma n)^2} + \xi_n \eta_n \right) \frac{\partial H^{n+1}}{\partial \eta} \right\} \quad (30)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \left(\frac{\hat{N}_0^{n+1}}{J_*} \right) - \left(\frac{\hat{N}_0^*}{J_*} \right) \right\} = -gh^{n+1} \left\{ \frac{1}{J_*} \left(\frac{\xi_s \eta_s}{(1+\sigma n)^2} + \xi_n \eta_n \right) \frac{\partial H^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{1}{J_*} \left(\frac{\xi_s^2}{(1+\sigma n)^2} + \eta_n^2 \right) \frac{\partial H^{n+1}}{\partial \eta} \right\} \quad (31)$$

ここで、 $J_* = \sqrt{g/\hat{g}}/(1+\sigma n)$ はヤコビアンであり、 $g, \hat{g}$ は各々物理空間 (s, n) と計算空間 (ξ, η) における共変計量テンソル $g_{ij}, \hat{g}_{ij}$ の行列式である。具体的には、 $i=1=s, j=2=n$ とすると

$$g_{11} = (1+\sigma n)^2, \quad g_{22} = 1, \quad g_{ij} = 0 (i \neq j) \quad (32)$$

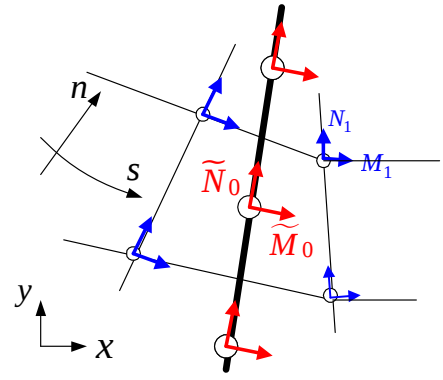


図-2 Soroban格子と境界適合座標の融合
(物理空間中の変数配置、太線はSoroban軸)

また、座標の反変成分 $s^i = (s, n), \xi^i = (\xi, \eta)$ に対して、

$$\hat{g}_{kl} = \frac{\partial s^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial s^j}{\partial \xi^l} g_{ij} \quad (33)$$

から計算に必要な係数が算定できる。一方、式(29)～式(31)は非線形方程式である。本報では反復計算から収束解を得て、次時刻の M_0^{n+1}, N_0^{n+1} と水深 h^{n+1} を求め、その後に空間微係数を算定した。

(3) 非移流相～偏差流成分の修正

第3ステップでは、式(20)と式(21)から既に求められた水深と流速を利用して、Euler陽解法により次時刻の M_1^{n+1}, N_1^{n+1} 及びそれらの空間勾配値を求めた。

(4) 計算格子の作成法

河川では一般に縦断方向にほぼ等間隔に横断測線に沿って地形情報があり、計算ではこのSoroban軸をこの横断測線に一致させることは妥当といえる。また、BFC座標を作成する際には、このSoroban軸上の計算点を同一軸上で移動させるように気をつける必要がある。そこで、本報では上下流横断測線と河岸線から構成される流体の全領域に対して、その形状を境界条件として線形関数を利用した双一次超限補間法⁴⁾により格子を生成させた。

(5) 境界条件と乱流モデル

流入境界条件としては、流量 Q_{in} を上流端断面で与える。この際、開水路等流を仮定して、Manning式から水深のべき乗に比例する流量を与えた。一方、流出境界条件としては水位 H_{out} を与えた。河岸では平均流速の2乗に比例する摩擦力を与えた。また、乱流モデルには経験的0次モデル式を用いた。

4. 計算法の適用例

(1) 1次元移流問題における格子幅比と計算精度

図-3には1次元移流問題に関する数値実験の結果を示した。図中、初期値は林ら¹⁰⁾と同様に余弦波と直線を接続したもので、周期境界条件下では1周期後の厳密解(Theory)は初期値と一致する。この実験ではCourant数を0.1とし、 $x=10$ と30の2ヶ所で格子

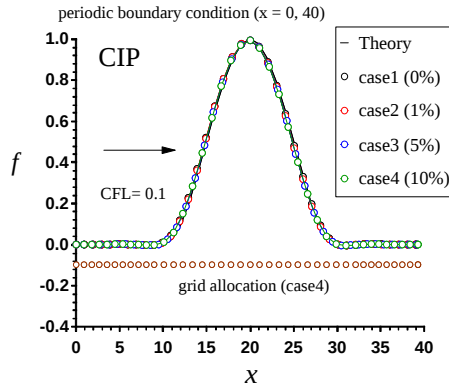


図-3 1次元移流問題における隣接格子の格子幅変化率（%表示）と1周期後の位相誤差の関係（CIP法と5次精度風上差分(5upwind)の比較， $x=10$ と 30 において格子幅を階段状に急に変化させた．）

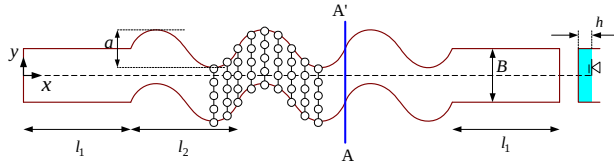


図-4 直線部と蛇行部を連結した模擬河川の領域（○はSoroban格子点，矩形断面，A-A'は検査面）

幅を階段状に急に変化させ，それらの計算点を挟んで格子幅の変化率を4種類変更した（図中，等間隔格子幅に対して，変化率を%で表示した．Case1～Case4）．つまり， $0 \leq x \leq 10$ と $30 \leq x \leq 40$ では格子解像度は同一である．空間差分の方法としてはCIP法と5次風上差分を用い，有限差分法を用いて両者の結果を比較する．5次風上差分を用いる場合にはBFC法を適用した．BFC法ではmetricの評価には6次精度の中央差分を用い，時間差分には3次精度のAdams-Bashforth法を用いた．一方，CIP法では物理座標上で直接，時空間で3次精度の差分を行った．

図-3において，格子幅を階段状に変化させた場合には，座標変換を行うとわずか5%の変化でも計算結果には有意な位相差が現れる事がわかる．一方，物理空間で直接離散化を行ったCIP法では，どのCaseでも位相・振幅ともに遜色無い結果となった．なお，林ら¹⁰⁾も格子幅を急に変化させた場合には，5次風上差分を用いると位相誤差が発生することを指摘している．

(2) 蛇行開水路流れにおける精度比較

図-4には模擬蛇行河川の寸法と計算点の空間配置の概略図を示した．河岸の蛇行形状はsin関数で表現し， $l_1 = l_2 = 4.0 \text{ m}$ ， $a = 1.5 \text{ m}$ ， $B = 5 \text{ m}$ である．横断面は矩形，河床は平坦とした．境界条件は $Q_{in} = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$ ， $H_{out} = 0.2 \text{ m}$ を与え，定常計算を行った．なお，本計算では偏差流無しの浅水流計算の結果を示し，以下では移流スキームのみを変更した場合の結果の相違を主に考察する．また，格子数を多く利用した場合の計算結果は必ずしも真の解を提示しないが，これが真の解に近い（漸近解）と考え，以下では高解像度の格子を利用したCIP法の結果を漸近解とした．比較のために用いたBFC法では，1) 有限差

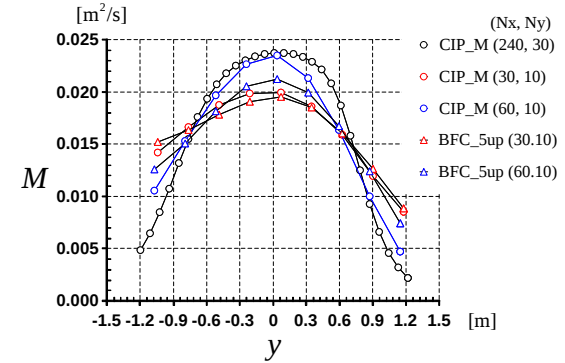
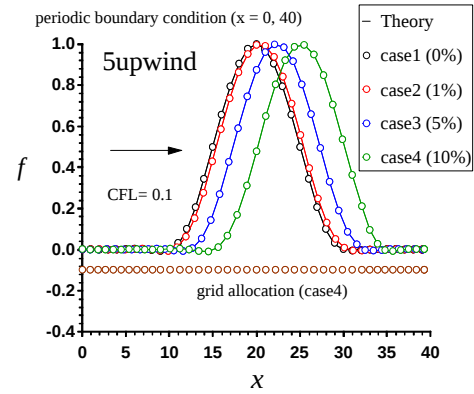


図-5 横断面A-A' ($x=12 \text{ m}$)での線流量 M の分布（CIP_Mは本報の手法， N_x, N_y は2次元の計算格子）

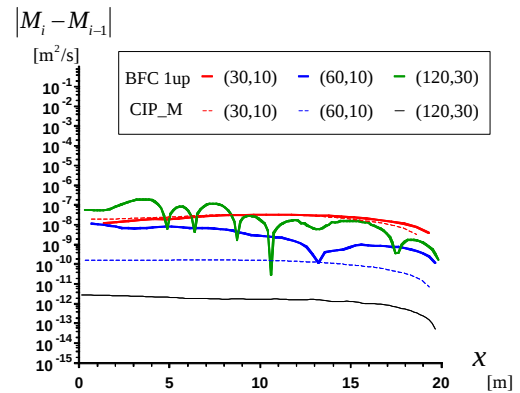


図-6 断面積分流量 M_i の差の縦断分布

分法を解法とし，移流計算に5次精度の風上差分を用いる場合(以下，添え字で5up)と，2) 有限体積法を解法とし，移流計算に1次精度の風上差分を用いる場合(添え字で1up)の両方を考察した．本計算で用いた格子は図-4に示すように，河道に沿って x, y 軸方向に等間隔とした．

図-5には横断面A-A' ($x=12 \text{ m}$)における線流量 M の横断分布を示した．図中，本研究で提案する手法にはCIP_Mの記号を付し，括弧内の数字は用いた2次元の計算点の数(N_x, N_y)を示す．手法に関わらず，計算点を増すと計算結果は漸近解に近づくようである．同一の格子数を利用した場合では，本報の結果(CIP_M)が5次風上差分の結果(BFC_5up)よりも漸近解に近い．これはBFC法を利用することで位相の

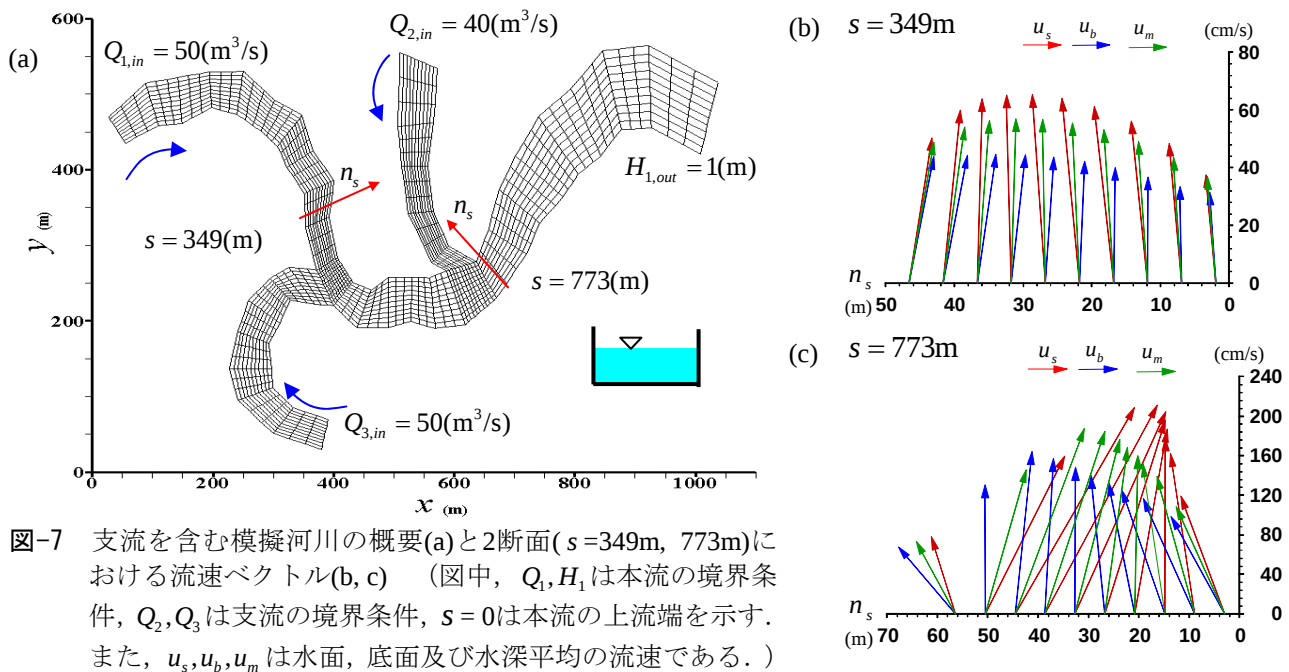


図-7 支流を含む模擬河川の概要(a)と2断面($s = 349\text{m}$, 773m)における流速ベクトル(b, c) (図中, Q_i, H_1 は本流の境界条件, Q_2, Q_3 は支流の境界条件, $s = 0$ は本流の上流端を示す。また, u_s, u_b, u_m は水面, 底面及び水深平均の流速である。)

ずれが発生し, 結果として移流精度が低下したものと考えられる。なお, 格子解像度を上げた場合でも同様の傾向が見られ, 本法の計算時間は陽解法のBFC法と比較して, 最大1.4倍程度であった。

一方, 図-6には s 方向の断面積分線流量 M_i の断面毎の差の絶対値 $|M_i - M_{i-1}|$ (i は流下方向の横断面番号)を, 2つの手法(BFC_1upとCIP_M)で比較して, それらを x 軸に対して示した。本法の結果は計算点を増す毎に低い値を示し, 本計算が定常流を対象としていることから, 有限体積法を解法とするBFC法の結果(BFC_1up)に劣らず, 本手法の連続式誤差が小さいことを示すものと考えられる。

(2) 支流・分合流のある流れ

本節では応用例として, 支流を含んだ河川の準3次元定常計算の結果を示す。図-7には支流を含む平坦河床の矩形断面模擬河川流の概要図と, 本流の2つの横断面内での流速分布 u を示した。図中, u_s, u_b は準3次元計算による水面, 底面の流速であり, u_m は浅水流計算による水深平均流速である。また, n_s 軸は各横断面内で右岸から左岸向きにとり, $n_s = 0$ は右岸とする。 $s = 0$ は本流の上流端とする。さらに, 図-7(b)と(c)では, 縦軸の値は流速の u 成分を表す。

図-7(b)より, 湾曲部下流では水面流速は外岸寄りに, 底面流速は内岸寄りに流速分布が偏倚することがわかる。また, 図-7(c)より, 支流の影響により, この断面では水面は n_s 軸の負の向きに流れが偏るが, 底面付近では河道に沿って流れ, 断面内での2次流が合理的に計算されることがわかる。

5. おわりに

本報では円筒座標でCIP-Soroban法を拡張した既報の方法に加えて, 境界適合座標法を融合すること

で, 新たな河川流の準3次元計算法の構築を試みた。基礎的な検証計算の結果から, 流量の保存性と移流の精度がともに良好であることが示された。

参考文献

- 1) 福岡捷二: 洪水の水理と河道の設計法, 森北出版, 436p, 2005.
- 2) 牛島省・山下英夫・藤岡奨・瀬津家久: コロケート格子上の非圧縮性流体計算法に基づく浅水流方程式の数値解法, 水工学論文集, Vol.50, pp.775-780, 2006.
- 3) Yabe, T., Mizoe, H., Takizawa, K., Moriki, H., IM, H. and Ogata, Y.: Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme, *J. Comput. Phys.*, Vol.194, pp57-77, 2004.
- 4) 藤井孝蔵: 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 234p, 1994.
- 5) 吉田圭介・石川忠晴: 円筒座標上でCIP-Soroban法を拡張した蛇行河川の浅水流計算法, 水工学論文集, Vol.51, pp.805-810, 2007.
- 6) 吉田圭介・石川忠晴: 2次流の時間発展を考慮した水深積分モデルに関する基礎的検討, 水工学論文, 第50巻, pp.781-786, 2005.
- 7) 石川忠晴・鈴木研司・田中昌弘: 開水路流の準3次元計算法に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第375号/II-6, pp.181-189, 1986.
- 8) 中山恵介・佐藤圭洋・堀川康志: CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算法の開発, 水工学論文集, 第42巻, pp.1159-1164, 1998.
- 9) 中村恭志・石川忠晴・矢部孝・滝沢研二: Soroban格子法に基づく浅水2次元自由水面流れの計算手法の開発, 水工学論文集, 第49巻, pp.685-690, 2005.
- 10) 林俊一郎・大本照憲・矢北孝一・平川隆一: 一般座標Regular格子による開水路乱流のDNS, 水工学論文集, 第44巻, pp.593-598, 2000.

(2007.9.30受付)