

FFTを応用した多孔式揚水試験による 透水係数分布と影響圏半径の逆解析

INVERSE ANALYSIS OF ESTIMATING DISTRIBUTION OF HYDRAULIC CONDUCTIVITY AND RADIUS OF INFLUENCE USING FFT AND MULTI-WELL PUMPING TEST

齋藤 雅彦¹
Masahiko SAITO

¹正会員 博士(工) 神戸大学助教 都市安全研究センター (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

This study aimed at determining the distribution of hydraulic conductivity and radius of influence from the results of multi-well pumping test and natural distribution of piezometric head in a non-uniform phreatic aquifer. The inverse analysis was performed by using the Fast Fourier Transform(FFT) and the constrained simplex method. These results showed that the method presented here could estimate mean value of hydraulic conductivity and the radius of influence more accurately than the conventional method using an analytical model of aquifer flow. And the distribution of hydraulic conductivity were well reproduced except the case of that the heterogeneity of hydraulic conductivity was not reflected in the distribution of drawdown and piezometric head.

Key Words : groundwater, inverse analysis, hydraulic conductivity, FFT, pumping test, heterogeneity,

1. 序論

地下水・浸透流に関するあらゆる問題において、場の透水係数を把握することがまず求められる。一般に、透水係数を推定する方法として、サンプリングによる室内試験および現場揚水試験が用いられているが、これらによって得られる値は、前者はサンプルの採取地点における局所的なもの、また後者は揚水井周辺の平均的なものとなる。一方、現実の地盤は不均一であり、透水係数も空間的にばらついている。地下水・浸透の流況をより正確に理解するためには、この空間的ばらつきも含めて推定する方法が望まれている。

このような透水係数の空間的な変動を推定する手段として、比較的観測の容易な水位・水頭の観測値から逆解析によって透水係数の空間分布を推定する方法が試みられている^{1), 2), 3), 4)}。しかし、従来の手法では推定対象領域はいくつかの小領域に分割され、それぞれの領域の代表値が求められることが多いが、この場合分割数や分割パターンが推定結果に影響を与えることは避けられない。

これに対して齋藤ら^{5), 6), 7)}は、確率的フラクタルモデルを用いて、透水係数分布のパワースペクトル密度関数が $f^{-\zeta}$ 型となる空間分布モデルを提案し、実地盤におけ

る透水係数の空間分布特性を容易に模擬し得ることを確認している。これは、透水係数の空間分布は波の重ねあわせによって表現可能であることを意味する。

本研究では、このモデルを応用した数値実験により、平面2次元被圧帯水層を対象に、多孔式揚水試験によって得られた水頭低下量の分布と、自然状態における水頭分布から、FFTによる2次元波の重ねあわせによって、連続的な透水係数の空間分布と影響圏半径を推定する方法を試み、その適用性について考察する。

2. 基礎方程式

井戸による揚水が存在する平面2次元被圧帯水層における定常状態の基礎式は、連続式とダルシー則より以下のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kB \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(kB \frac{\partial h}{\partial y} \right) = Q_w \delta(x - x_w, y - y_w) \quad (1)$$

ここに、 x, y は空間座標、 h は水頭、 k は透水係数、 B は層厚、 Q_w は井戸の揚水量、 (x_w, y_w) は井戸座標、 δ はデルタ関数である。

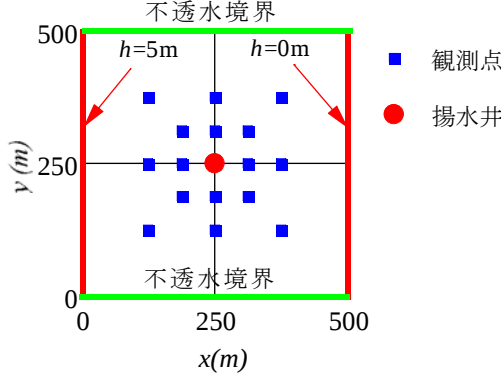


図-1 自然状態の解析条件と観測点

境界条件は、水頭が規定される境界では、

$$h = h_b \quad (2)$$

であり、流束が規定される境界では、

$$-\left(kB \frac{\partial h}{\partial x} n_x + kB \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) = V_b \quad (3)$$

である。\$V_b\$ は外部境界における単位長さ当たりの流量、\$n_x\$ と \$n_y\$ は境界にたてた外向法線方向の方向余弦である。

3. FFTを応用した逆解析

逆解析に用いる観測値は、揚水井周辺に配置された \$m\$ ヶ所の観測点の水頭低下量と、同じ観測点における自然状態の水頭分布とする。すなわち \$2m\$ 個の観測値を用いる。

また、序論にて述べたとおり、不均一場における透水係数分布の性質は、そのパワースペクトルが次式に従うものと仮定する^{5), 6), 7)}。

$$S(|f|) \propto |f|^{-\zeta} \quad (4)$$

ここに、\$f\$ は空間周波数ベクトル、\$S(|f|)\$ はパワースペクトル密度、\$\zeta\$ は空間的な相関性を表すパラメータであり、2次元モデルの場合 \$\zeta \approx 2\$ である。

逆解析では、透水係数分布を \$n\$ 個の波の重ねあわせによって表現する。すなわち、\$k\$ の空間分布は、空間周波数ベクトル (\$f^{(i)} = (f_x^{(i)}, f_y^{(i)})\$) を用いて次式のように表す。

$$\log k(x, y) = \sum_{i=1}^n W^{(i)}(x, y) \quad (5)$$

$$W^{(i)}(x, y) = a^{(i)} \sin \left\{ \frac{2\pi}{L} (f_x^{(i)} x + f_y^{(i)} y) + \varphi^{(i)} \right\} \quad (6)$$

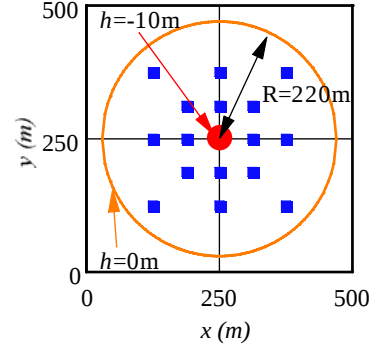


図-2 揚水時の解析条件と観測点

ここに、\$a^{(i)}\$ は \$f^{(i)}\$ の振幅であり、式(4)より \$|f^{(i)}|\$ に応じて相対的に決定される。また、\$L\$ は対象領域の大きさの代表値、\$\varphi^{(i)}\$ は \$f^{(i)}\$ の位相である。これらの計算には、FFTの逆変換を用いる。

推定対象のパラメータは、\$n\$ 個の \$\varphi^{(i)}\$ と \$\log k\$ の平均値 \$\mu_k\$、および標準偏差 \$\sigma_k\$ である。また、観測値として揚水試験による水頭低下量の分布を用いるが、このときの影響圏半径 \$R\$ は一般に未知なので、これも推定対象に加える。すなわち、\$2m > n+3\$ が必要条件となる。

パラメータの探索手法としては、制約付きシンプレックス法を用いる。また、最小化する目的関数 \$g\$ は、

$$g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \mu_k, \sigma_k, R) = \sum_{j=1}^{2m} \frac{\{h_c^{(j)} - h_o^{(j)}\}^2}{h_o^{(j)}} \quad (7)$$

とする。ここで、\$h_c^{(j)}\$ および \$h_o^{(j)}\$ は、それぞれ \$j\$ 番目の水頭の計算値と観測値である。

4. 解析条件

(1) 観測値の生成 (順解析)

観測値は有限要素法の順解析によって生成する。図-1に自然状態、図-2に揚水試験時の水頭分布を生成する解析条件と観測点配置を示す。自然状態としては、500m × 500mの解析領域（すなわち \$L=500m\$）を設定し、上流側の水頭と下流側の水頭をそれぞれ5mと0mとする。また要素数は \$256 \times 256\$ 個とし、帯水層厚 \$B\$ は1mで一定とする。揚水試験では、揚水井の位置は、\$x=250m\$、\$y=250m\$、井戸における水頭低下量は10mとする。影響圏半径 \$R\$ は、最も井戸から離れた観測点にも明確な水頭低下が生じる状態を仮定して220mとし、ここでの水頭低下量は0mとする。このときに得られる揚水量 \$Q_w\$ が逆解析の際の入力条件となる。

観測点は、揚水井を囲むように16点（すなわち \$m=16\$）とする。

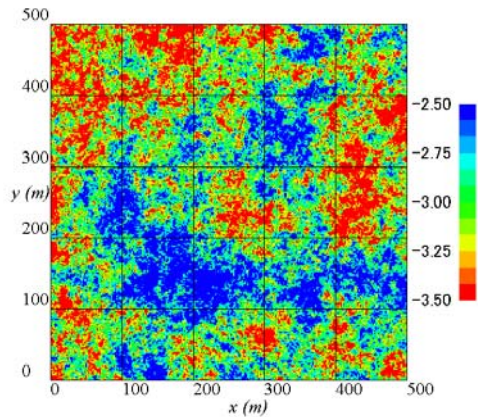


図-3 自然状態の透水係数 ($\log_{10} k$) 分布の生成例

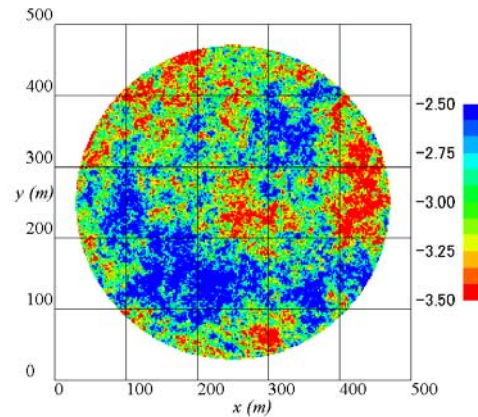


図-4 揚水時の透水係数 ($\log_{10} k$) 分布 (乱数A)

表-1 井戸公式と逆解析の比較

乱数	平均透水係数 ($\times 10^{-3}$ cm/s)		逆解析	影響圏半径 (m)	
	井戸公式	(最小値, 最大値)		井戸公式	(最小値, 最大値)
A	1.58	(1.04, 2.43)	1.14	259	(187, 305)
B	0.86	(0.60, 1.45)	1.01	223	(194, 325)
C	1.03	(0.84, 1.46)	1.04	218	(185, 248)
D	0.99	(0.58, 1.35)	0.89	205	(166, 247)
E	0.83	(0.62, 1.10)	1.00	212	(182, 246)
F	1.06	(0.85, 1.48)	1.06	209	(183, 253)
G	1.20	(0.93, 1.71)	1.26	228	(172, 297)
H	1.45	(0.99, 1.87)	1.09	258	(218, 304)
I	1.28	(1.07, 1.52)	1.04	242	(199, 283)
J	1.62	(1.28, 2.50)	0.95	299	(239, 481)
平均	1.16		1.04	235	

図-3は、式(4)に従う透水係数分布の生成例 (乱数A) である。この分布は、 512×512 個の解像度 (すなわち $1000\text{m} \times 1000\text{m}$ の領域に相当) で一旦生成し、ここから 256×256 個の領域を切り取ることによって生成する。これにより、二分の一の周波数成分を含む分布が生成される。このとき、 μ_k ($= \log_{10} k$ の平均値、 k の単位は cm/s) $= -3.0$ 、 $\sigma_k = 0.4$ とする。図-4は、図-3から揚水井を中心に半径 R の部分を取り切った透水係数分布である。このような透水係数分布を、乱数系列を変えて10例生成し、逆解析による推定を試みる。

(2) 逆解析

透水係数分布の全体的な傾向は低い周波数成分によって、また細かい変動は高い周波数成分によって表現される。観測点を密に配置すれば細かい変動を再現できる可能性もあるが、あまり現実的ではなく、また高い周波数まで用いる必要があり、 N 個の周波数成分を用いると、推定対象は $n=2N^2+2N$ となる。ここでは全体的な分布の傾向を再現することを目的に、低い周波数成分のみ ($N=2$) を用いる。逆解析に用いる空間周波数ベクトルは、 $f^{(1)} = (0, 1)$ 、 $f^{(2)} = (0, 2)$ 、 $f^{(3)} = (1, 1)$ 、 $f^{(4)} = (1,$

$2)$ 、 $f^{(5)} = (2, 1)$ 、 $f^{(6)} = (2, 2)$ の6波と、これらに直交して $|f^{(i)}|$ が等しい $f^{(7)} = (1, 0)$ 、 $f^{(8)} = (2, 0)$ 、 $f^{(9)} = (1, -1)$ 、 $f^{(10)} = (2, -1)$ 、 $f^{(11)} = (1, -2)$ 、 $f^{(12)} = (2, -2)$ の合計12波とする。推定対象のパラメータは、上記12波の位相 $\phi^{(i)}$ と、 μ_k 、 σ_k および影響圏半径 R の合計15個である。

また、逆解析では低い周波数のみを用いているので細かい変動は現れない。このため有限要素法のメッシュサイズは図-1の解析領域を 32×32 に分割したものをを用いる。

5. 解析結果と考察

(1) 井戸公式と逆解析の比較

まず、揚水井からの距離が異なる2点の水頭低下量を用いて、井戸公式により透水係数および影響圏半径を推定し、逆解析から得られた平均値 μ_k および R と比較する。ここでは、揚水井を中心に8方向の2点の観測値を用いて透水係数および影響圏半径を8個求め、透水係数はそれらの相乗平均、影響圏半径は算術平均値を用いてそれぞれ推定値とした。表-1は10種類の異なる透水係数分布について井戸公式と逆解析結果を比較したものである。

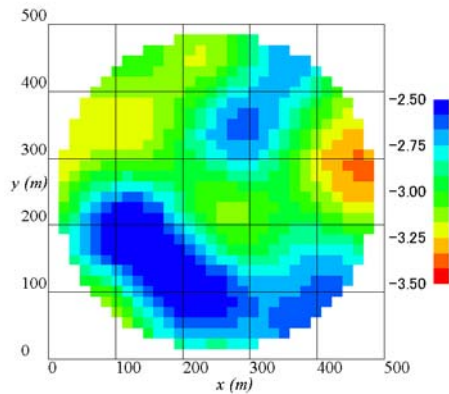


図-5 透水係数分布の推定結果

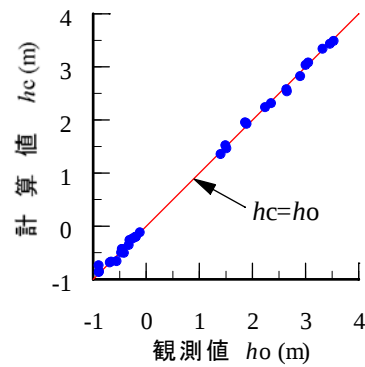


図-6 水頭観測値の再現結果

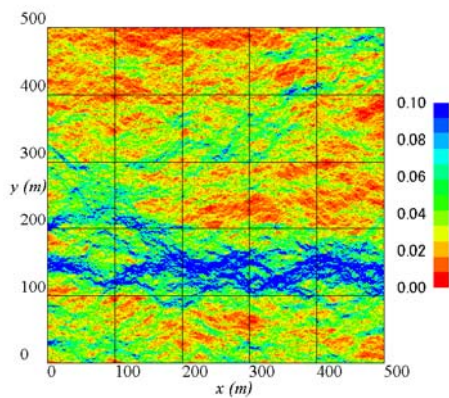


図-7 自然状態における $|V|$ (cm/hr)の分布（順解析）

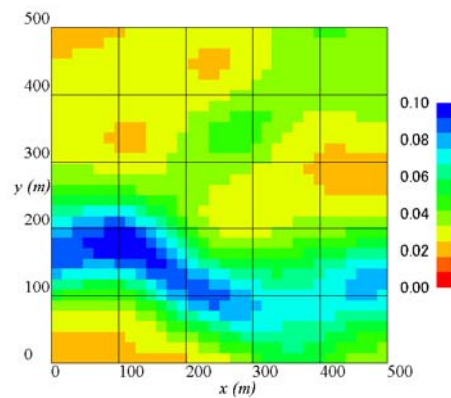


図-8 自然状態における $|V|$ (cm/hr)の分布（逆解析）

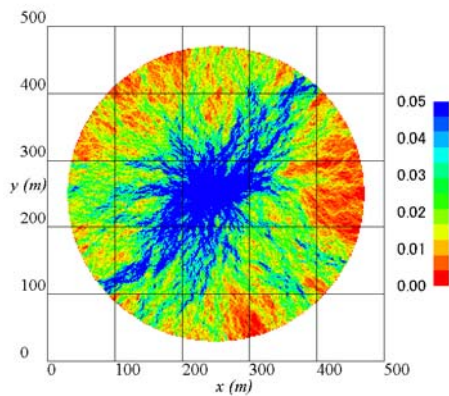


図-9 揚水時における $|V|$ (cm/hr)の分布（順解析）

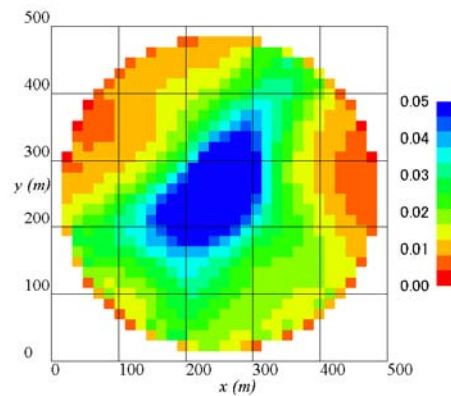


図-10 揚水時における $|V|$ (cm/hr)の分布（逆解析）

ここで、入力値は $\mu_k = 1.0 \times 10^{-3}$ cm/s, $R=220$ mであるから、表-1より一部に井戸公式の方が近い値が得られているケースがあるものの、全体的には逆解析の方が入力値に近く、推定精度は良好である。

(2) 透水係数分布の推定結果（その1；成功例）

図-5は、図-4に示した透水係数分布（乱数A）を逆解析により推定した結果である。中央部の井戸周辺領域については、再現性は十分とは言えないものの、透水性の

良い部分については概ね再現されている。また、図-6は、水頭観測値と計算値を比較したものであるが、ほぼ1:1の直線上にあり、水頭分布も良好に再現されている。

図-7から図-10は、自然状態および揚水時の流速ベクトルの大きさ（ $=|V| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ）の分布を比較したものである。これより、細かい水みちを除けば流速分布の特徴も概ね再現されており、実用上は十分な情報が得られていると思われる。

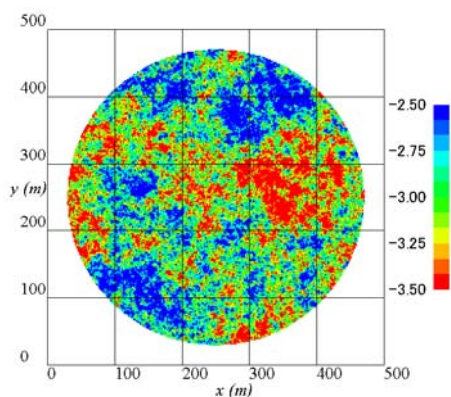


図-11 揚水時の透水係数 ($\log_{10} k$) 分布 (乱数D)

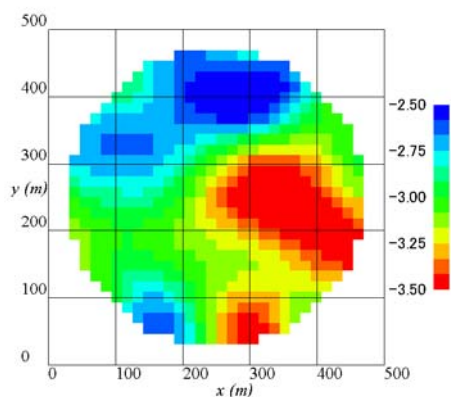


図-12 透水係数分布の推定結果 (乱数D)

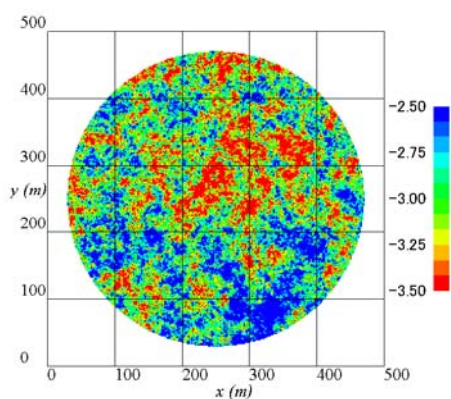


図-13 揚水時の透水係数 ($\log_{10} k$) 分布 (乱数F)

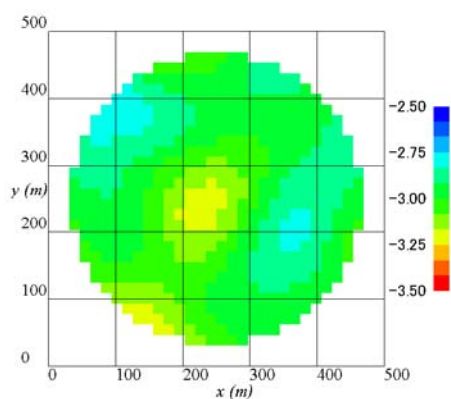


図-14 透水係数分布の推定結果 (乱数F)

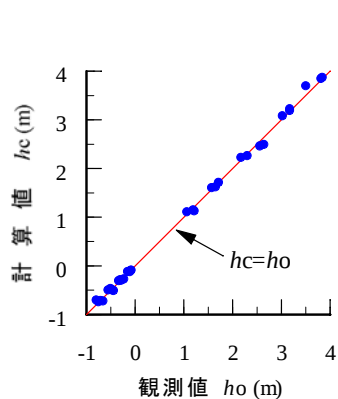


図-15 水頭観測値の再現結果

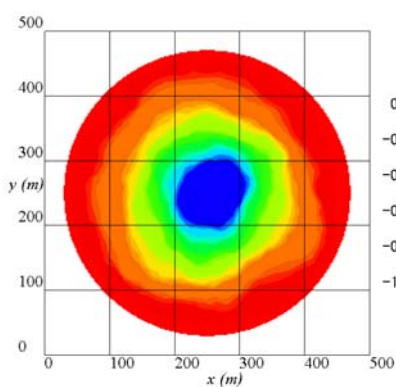


図-16 水頭分布 (順解析 ; 乱数F)

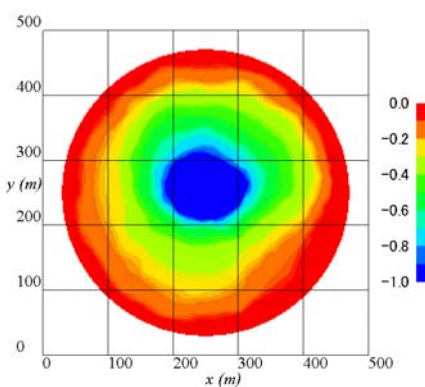


図-17 水頭分布 (順解析 ; 乱数A)

また、図-11と図-12は、他の乱数系列 (乱数D) によって生成された透水係数分布と推定結果である。このケースも元の分布の特徴が逆解析によって概ね再現されており、成功例の一つとして挙げておく。

(3) 透水係数分布の推定結果 (その2 ; 失敗例)

図-13および図-14は、別の乱数系列 (乱数F) を用いて生成された透水係数分布の生成例とその推定結果である。図-14より明らかなように、推定値としては全体的

に均一な場が得られており、再現性は良くない。一方、図-15は、水頭観測値と計算値を比較したものであるが、これは図-6と同様に、概ね1:1の直線上にあり、水頭分布の再現性は良好である。

図-16は、揚水時の水頭分布であるが、概ね同心円状の分布となっている。つまり、透水係数分布の不均一性が、ほとんど水頭分布に反映されていないことがわかる。これに対して、図-17は成功例 (乱数A) の揚水時の水頭分布であるが、等高線が歪んでおり、不均一性の影響

が水頭分布に明瞭に表れていることがわかる。したがって、「乱数F」のように場が不均一にもかかわらず、水頭分布が均一場に近いようなケースでは、水頭観測値の再現に基づく逆解析によって透水性分布を再現することは不可能となる。

6. 結論

本研究では、透水係数分布のパワースペクトル密度関数が f^{-5} 型となる空間分布モデルを用いて、数値実験により多孔式揚水試験によって得られた水頭低下量の分布と、自然状態における水頭分布から、連続的な透水係数の空間分布を推定する方法を試み、その適用性について考察した。これらによって得られた結論を以下にまとめる。

- 1) 井戸公式と本研究で試みた逆解析を比較すると、透水係数の平均値および影響圏半径の推定に関しては、逆解析の方が高い推定精度が得られた。
- 2) 透水性の不均一性が水頭分布に十分に反映されていれば、本手法により透水係数分布の特徴を連続的に再現することは可能である。
- 3) 透水性の不均一性が水頭分布に反映されていない場合は、推定結果は均一に近いものとなる。この場合水頭分布の観測結果のみに基づいて透水係数分布を推定することは不可能となる。

参考文献

- 1) Carrera, J. and Neuman, S. P.: Estimation of aquifer parameters under transient and steady state condition,
1: Maximum likelihood method incorporating prior information, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.199-210, 1986.
2: Uniqueness, stability, and solution algorithms, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.211-227, 1986.
3: Application to synthetic and field data, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.228-242, 1986.
- 2) 奥野哲夫, 鈴木誠: 不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法, 土木学会論文集, No.469/III-23, pp.93-102, 1993.
- 3) 本城勇介, 福井宏行, 小川正二: 拡張ベイズ法による広域地下水解析モデルの逆解析: 定常データに基付く場合, 土木学会論文集, No.535/III-34, pp.93-102, 1996.
- 4) Takeshita, Y., Kohno, I. and Yasui, K.: Determination of the hydraulic properties of a multilayered aquifer from pumping test data using genetic algorithms, *Proceedings of International conference on CALIBRATION AND RELIABILITY IN GROUNDWATER MODELING*, pp.229-235, 1999.
- 5) 齋藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布に関する理論的考察, 土木学会論文集, No.645/III-50, pp.103-114, 2000.
- 6) 齋藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察, 土木学会論文集, No.694/III-57, pp.245-258, 2001.
- 7) 齋藤雅彦, 川谷健: 1次元および2次元フラクタル浸透場の数値モデルとその性質について, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第6号, pp.193-200, 2002.

(2007. 9. 30受付)