

微小振幅波理論に基づく波長の 近似計算式の相互比較

COMPARATIVE STUDY OF VARIOUS EXPLICIT SOLUTIONS
TO DISPERSION EQUATION IN THE AIRY WAVE THEORY

山口正隆¹・野中浩一²

Masataka YAMAGUCHI and Hirokazu NONAKA

¹正会員 工博 愛媛大学大学院理工学研究科教授 生産環境工学専攻 (〒790-8577 松山市文京町3)

²正会員 博(工学) 愛媛大学契約職員 工学部環境建設工学科 (〒790-8577 松山市文京町3)

The dispersion equation in the Airy wave theory is a transcendental equation, which usually requires an iterative technique to obtain a numerically exact solution of wave length for a given wave period and water depth. As an alternative, various kinds of approximate and explicit solutions have been proposed. This paper presents the results of a comparative study of the error relative to the exact solution for each of 25 explicit solutions with different degree of accuracy including 10 new ones. The conclusions are as follows; 1) In the case of explicit solutions valid for a whole range of water depth conditions, one of the solutions proposed in this study with an error of less than $\pm 0.0001\%$ is more proper than the others in its accuracy and compactness of the solution. 2) Neither of the explicit solutions applicable to a restricted water depth condition may be preferable for the sake of inconvenience associated with the restrictive condition in spite of its relatively higher accuracy within an applicability range.

Key Words : *wave dispersion equation, exact solution, approximate solutions, comparative study*

1. 緒言

一定水深上の微小振幅波理論に基づく波長 L , 周期 T , 水深 h の関係は周知の分散関係式により与えられる。分散関係式は波長 L に関する超越方程式であるので, その解を得るために反復計算法を用いる必要がある。パソコンの高性能化が実現された今日, 反復計算法の適用は浅海波浪推算のように膨大なケースの計算を行う場合を除き, 計算時間の面で実用上ほとんど問題にならない。しかし, 波理論の基本を構成する分散関係式の解が閉形式で表されない点は初学者にとって波理論を取り組みにくいものにしており, したがって学習上あるいは教育上の障壁となっていると考える。そのため, 代替方法としてこれまでに波長に対する多種多様の近似計算式が提案されている。また, Fenton and McKee¹⁾は1990年以前の9種類の近似式の精度を, You²⁾は2002年のGuo³⁾の式を含む5種類の近似式の精度を相互比較している。

本研究では, Newton法による数値解を准厳密解とすることによって, 従前の各近似式の誤差の範囲を明確にするとともに, 精度の異なる各種の近似式を新たに提案し, それぞれの精度を包括的に明らかにする。

2. 波長計算式と数値計算法

波長 L と周期 T , 水深 h の関係は次式で表される。

$$L = \left(\frac{gT^2}{2p} \right) \tanh \frac{2ph}{L} = L_0 \tanh \frac{2ph}{L}, \quad L_0 = \frac{gT^2}{2p} \quad (1)$$

ここに, 添字 '0' は深海波, g は重力加速度を意味する。これを波数 $k = 2p/L$, $k_0 = 2p/L_0$ で表示すると,

$$k_0 h = kh \cdot \tanh kh \quad (2)$$

である。ここで,

$$a = k_0 h = 2p(h/L_0) = (2p/T \sqrt{g/h})^2 \quad (3)$$

とすれば, 式(2)は次式のように置ける。

$$a = kh \cdot \tanh kh = \mathbf{b} \cdot \tanh \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = kh \quad (4)$$

式(4)の数値解を得るために Newton 法を適用すれば, 計算に用いるべき式は次式になる。

$$f(\mathbf{b}_n) = a - \mathbf{b}_n \tanh \mathbf{b}_n, \\ f'(\mathbf{b}_n) = -\tanh \mathbf{b}_n - \mathbf{b}_n \operatorname{sech}^2 \mathbf{b}_n,$$

$$b_{n+1} = b_n - f(b_n)/f'(b_n),$$

$$|(b_{n+1} - b_n)/b_n| < e, \quad e = 10^{-10} \quad (5)$$

ここに、添字 ' ' は微分を、添字 ' n ' は繰り返し回数を表す。初期値として

$$b_0 = a = 2p(h/L_0); \quad a \geq 1 \quad \text{or} \quad h/L_0 \geq 1/2p,$$

$$b_0 = a^{1/2} = \{2p(h/L_0)\}^{1/2}; \quad a < 1 \quad \text{or} \quad h/L_0 < 1/2p \quad (6)$$

を利用する。

合田^{4),5)}は式(5)の第1式における変曲点 ($f''(b)=0$, $b \cdot \tanh b = 1$, $b \approx 1.200$) の出現を避けるため、

$$f(b_n) = b_n - a \cdot \coth b_n \quad (7)$$

を使用することを推奨している。また、式(5)の第1式は次式のようにも書ける。

$$f(b_n) = a/b_n - \tanh b_n \quad (8)$$

この式も変曲点をもたない。 $h/L_0 = 10^{-6} \sim 1$ (10^{-6} きざみ) では、式(5)、式(7)、式(8)いずれの式もすべての h/L_0 で同じ解を与え、数値計算上の問題を生じなかった。

3. 波長の近似計算式とその精度

(1) 波長の近似計算式の分類と誤差基準

これまでに提案された波長に対する各種の近似計算式は、 h/L_0 の全範囲に有効な式、 h/L_0 の限られた範囲に有効な式、の2グループに大別され、さらにそれぞれは、精度は相対的に低いが式の形が簡潔である式、精度は高いが形が複雑な式あるいは長い項をもつ式、の2グループに分類される。また、グループに属する式はその適用範囲により、浅海域用、准深海域用、に分けられる。

各種の近似計算式の准厳密解に対する相対誤差は、 $h/L_0 = 10^{-4} \sim 1$ (10^{-4} のきざみ) の条件のもとに、添字 ' a ' を近似解、' exa ' を Newton 法による准厳密解として

$$\tilde{e} = (L_a/L_{\text{exa}} - 1) \times 100 \% \quad (9)$$

で表示する。

(2) 相対水深の全領域に適用可能な近似式

グループに属する各式とその相対誤差の範囲は精度の低い順に、つぎのように書ける。

1) Eckart⁶⁾の式

$$k_a h = b_a = a(\coth a)^{1/2}, \quad k_a = 2p/L_a \quad (10)$$

$$\tilde{e} = 0 \sim 5.24 (h/L_0 = 0.111) \% \quad (11)$$

式(11)の () 内の数値は相当する誤差をもたらすときの h/L_0 の値を表す。

2) 岩垣⁷⁾の式

$$b_a = a \cdot \coth \{a^{1/2}(1 + a^{1/2}/2p)\} \quad (12)$$

$$\tilde{e} = -3.05 (h/L_0 = 0.287) \sim 3.14 (h/L_0 = 0.023) \% \quad (13)$$

3) Carvlho⁸⁾の第14式 (Carv14 と略記)

$$b_a = a(1 + a^{-2})^{1/4} \quad (14)$$

$$\tilde{e} = -2.45 (h/L_0 = 0.366) \sim 3.28 (h/L_0 = 0.068) \% \quad (15)$$

Carvlho⁸⁾が与えた式番号に従って、上式を第14式と呼ぶ。以下も同様である。Carvlho⁸⁾は分散関係式に対する17種類の近似解をまとめている。最大相対誤差の絶対値は0.012~5.24%の範囲にある。このうち、上式に加えて第4式、第5式、第9式は簡潔な式形や各式に相当した相対的精度の高さの点で注目に値すると考えられる。

4) Fenton and McKee⁹⁾の式 (FM と略記)

$$b_a = a(\coth a^{m/2})^{1/m}; \quad m = 1.5 \quad (16)$$

$$\tilde{e} = -1.39 (h/L_0 = 0.321) \sim 1.66 (h/L_0 = 0.054) \% \quad (17)$$

5) Fenton and McKee⁹⁾の式(16)の修正式、あるいは山口・野中の第1式 (YNI と略記)

$$b_a = a(\coth a^{m/2})^{1/m}; \quad m = 1.485 \quad (18)$$

$$\tilde{e} = -1.52 (h/L_0 = 0.315) \sim 1.55 (h/L_0 = 0.052) \% \quad (19)$$

これは式(16)と基本的に同じであるが、正負の最大誤差が同程度になるようにべき数 m を調整した結果である。

6) Carvlho⁸⁾の第9式 (Carv9 と略記)

$$b_a = a \cdot \coth(\sinh a^{1/2}) \quad (20)$$

$$\tilde{e} = -1.12 (h/L_0 = 0.237) \sim 0 \% \quad (21)$$

7) Guo³⁾の式

$$b_a = a / \{1 - \exp(-a^{m/2})\}^{1/m}; \quad m = 2.4901 \quad (22)$$

$$\tilde{e} = -0.75 (h/L_0 = 0.284) \sim 0.75 (h/L_0 = 0.043) \% \quad (23)$$

Guo³⁾は $m = 2.4908$ または 2.4901 としているが、ここでは正負で同程度の誤差を生じる $m = 2.4901$ を用いる。

8) Fenton and McKee⁹⁾の式(18)と分散関係式の結合、あるいは山口・野中の第2式 (YN2 と略記)

$$b_a = a \cdot \coth b_F, \quad b_F = a(\coth a^{m/2})^{1/m}; \quad m = 1.378 \quad (24)$$

$$\tilde{e} = -0.73 (h/L_0 = 0.029) \sim 0.73 (h/L_0 = 0.187) \% \quad (25)$$

これは山口・野中の第1式(18)で得られた値をもとの波長計算式(4)に代入して、改めて波長を求めることにより精度の向上をはかるものであり、上述の Carvlho⁸⁾もこの手法を採用している。最大誤差は Fenton and MacKee の

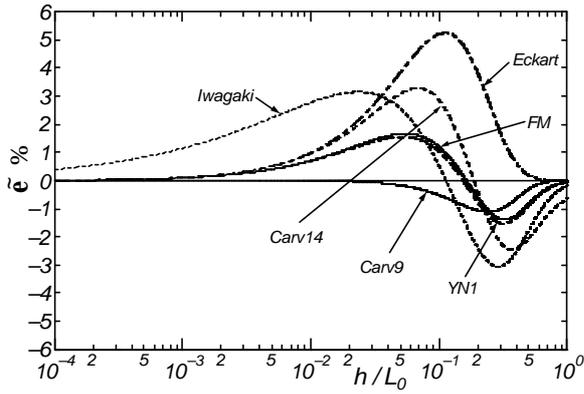


図-1 波長の近似計算式の相対誤差 \tilde{e} と h/L_0 の関係(1)

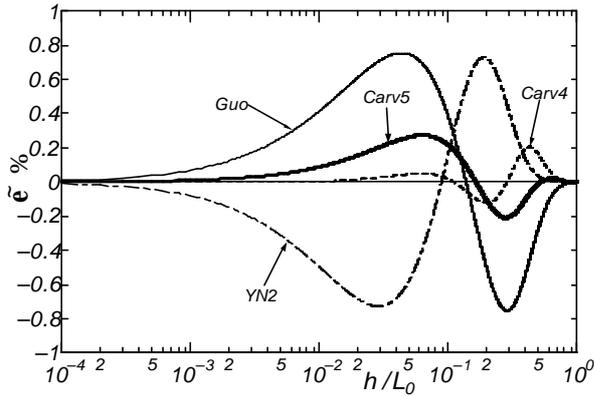


図-2 波長の近似計算式の相対誤差 \tilde{e} と h/L_0 の関係(2)

式(16)や山口・野中の第1式(18)のほぼ1/2になる。べき数 m は正負の最大誤差が同程度になるように調整して得ている。Carvalho⁸⁾のように同様の操作を繰り返すことは、表示式の複雑化や誤差縮小の非効率性からみてあまり意味がないと考えられる。

9) Carvalho⁸⁾の第5式 (Carv5 と略記)

$$b_a = a \cdot \coth(1.2^a \cdot a^{1/2}) \quad (26)$$

$$\tilde{e} = -0.21 (h/L_0 = 0.278) \sim 0.27 (h/L_0 = 0.063) \% \quad (27)$$

10) Carvalho⁸⁾の第4式 (Carv4 と略記)

$$b_a = a / \left\{ (\tanh a)^{1/4} \cdot \left[\tanh \left\{ (\sinh a)^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \right\} \quad (28)$$

$$\tilde{e} = -0.12 (h/L_0 = 0.198) \sim 0.20 (h/L_0 = 0.423) \% \quad (29)$$

Carvalho⁸⁾の第5式と第4式のうち、第5式は簡単な式形と高い精度からみて、有力な近似式である。第4式はやや高い精度を与えるものの、かなり複雑な形をもつ。

以上に述べた 1) ~ 10)の各式はいずれも深海波条件 ($a \rightarrow \infty$) および長波条件 ($a \rightarrow 0$) で厳密解に漸近する。図-1は1)~6)の各式、図-2は7)~10)の各式による相対誤差 \tilde{e} の値と h/L_0 ($=10^{-4} \sim 1$) の関係を示す。いずれの式による \tilde{e} も極大値や極小値あるいはその両者

をとったのち、 h/L_0 の両極限に向けて0に漸近する。以上の諸式のうち誤差の大きさや式の簡潔さを考えると、Carvalho⁸⁾の第5式(26) (最大誤差約0.3%)が h/L_0 の全範囲について適切である。

(3) 相対水深の全領域に適用可能な高精度近似式

グループに分類され、より高い精度をもつ近似計算式は2つの系統に分かれる。1つはFenton¹⁾によって与えられたように、分散関係式(4)にNewton法を適用して得られる第1回目の反復解を用いる方法であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} f(b_0) &= a - b_0 \tanh b_0, \\ f'(b_0) &= -\tanh b_0 - b_0 \operatorname{sech}^2 b_0, \\ b_1 &= b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = b_0 + \frac{a - b_0 \tanh b_0}{\tanh b_0 + b_0 \operatorname{sech}^2 b_0} \\ &= \frac{a + b_0^2 \operatorname{sech}^2 b_0}{\tanh b_0 + b_0 \operatorname{sech}^2 b_0} = \frac{a + b_0^2 (1 - \tanh^2 b_0)}{\tanh b_0 + b_0 (1 - \tanh^2 b_0)} \quad (30) \end{aligned}$$

他の1つはPadé近似による方法である。Newton法による反復解を利用する場合、1)~10)の各式を式(30)の b_0 に代入すればよい。すなわち、Eckart⁶⁾の式に対して、近似計算式とその相対精度の範囲はつぎのように書ける。

11-1) Fenton¹⁾の式、あるいはEckart⁶⁾の式(10)に対する反復解

$$\begin{aligned} k_a h &= (a + b_a^2 \operatorname{sech}^2 b_a) / (\tanh b_a + b_a \operatorname{sech}^2 b_a) \\ &= \{a + b_a^2 (1 - \tanh^2 b_a)\} / \{\tanh b_a + b_a (1 - \tanh^2 b_a)\}, \\ b_a &= a (\coth a)^{1/2} \quad (31) \end{aligned}$$

$$\tilde{e} = -5.1 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.070) \sim 8.4 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.218) \% \quad (32)$$

以下、Newton法による反復解は同一であるので、 b_a に対する式と相対誤差の範囲を記す。前者もそれぞれ前掲と同一の式であるが、異なる係数 m をもつものもある。

11-2) 岩垣⁶⁾の式(12)に対する反復解、あるいは山口・野中の第3式 (YN3 と略記)

$$b_a = a \cdot \coth \{ a^{1/2} (1 + a^{1/2} / 2p) \} \quad (33)$$

$$\tilde{e} = -4.0 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.019) \sim 1.2 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.289) \% \quad (34)$$

11-3) Carvalho⁸⁾の第14式(14)に対する反復解、あるいは山口・野中の第4式 (YN4 と略記)

$$b_a = a (1 + a^{-2})^{1/4} \quad (35)$$

$$\tilde{e} = -2.9 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.053) \sim 6.7 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.335) \% \quad (36)$$

11-4) Fenton and MacKee⁹⁾の式の修正式(18)に対する反復解、あるいは山口・野中の第5式 (YN5 と略記)

$$b_a = a (\coth a)^{m/2} \quad ; m = 1.434 \quad (37)$$

$$\tilde{\epsilon} = -4.9 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.036) \sim 4.9 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.296) \% \quad (38)$$

Fenton and MacKee⁹⁾の式に対する反復解は正負で絶対値が異なる最大誤差の範囲 ($\tilde{\epsilon} = -8.5 \times 10^{-3} \sim 2.3 \times 10^{-2}$) を与え、式(37)による反復解より低い精度しかもたないの
で、掲載を省略している。

11-5) Carvlho⁸⁾の第9式(20)に対する反復解、あるいは山口・野中の第6式(YN6と略記)

$$b_a = a \cdot \coth(\sinh a^{1/2}) \quad (39)$$

$$\tilde{\epsilon} = -4 \times 10^{-4} (h/L_0 = 0.101) \sim 1.4 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.264) \% \quad (40)$$

11-6) Guo³⁾の式(22)の修正式に対する反復解、あるいは山口・野中の第7式(YN7と略記)

$$b_a = a / \{1 - \exp(-a^{m/2})\}^{1/m}; m = 2.445 \quad (41)$$

$$\tilde{\epsilon} = -1.2 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.030) \sim 1.2 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.278) \% \quad (42)$$

11-7) 山口・野中の第2式(24)に対する反復解、あるいは山口・野中の第8式(YN8と略記)

$$b_a = a \cdot \coth b_F, \quad b_F = a(\coth a^{m/2})^{1/m}; m = 1.310 \quad (43)$$

$$\tilde{\epsilon} = -9 \times 10^{-4} (h/L_0 = 0.112) \sim 8 \times 10^{-4} (h/L_0 = 0.223) \% \quad (44)$$

11-8) Carvlho⁸⁾の第5式(26)の修正式に対する反復解、あるいは山口・野中の第9式(YN9と略記)

$$b_a = a \cdot \coth(m^a \cdot a^{1/2}); m = 1.1965 \quad (45)$$

$$\tilde{\epsilon} = -1.1 \times 10^{-4} (h/L_0 = 0.044) \sim 1.1 \times 10^{-4} (h/L_0 = 0.274) \% \quad (46)$$

11-9) Carvlho⁸⁾の第4式(28)に対する反復解、あるいは山口・野中の第10式(YN10と略記)

$$b_a = a / \left\{ (\tanh a)^{1/4} \left[\tanh \left\{ (\sinh a)^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \right\} \quad (47)$$

$$\tilde{\epsilon} = -7 \times 10^{-6} (h/L_0 = 0.056) \sim 4 \times 10^{-5} (h/L_0 = 0.401) \% \quad (48)$$

上記の 11-4), 11-6), 11-7), 11-8)の中にとえらるる各式はそれぞれ正負の最大誤差の絶対値がほぼ一致するように、べき数 m を調整している。初期値の精度が高いほど、Newton法の第1回目の反復解としての最終解の精度も当然高い。

最大誤差の正負の対称性と精度および第1次近似式の簡潔さを考慮すると、Carvlho⁸⁾の第5式の修正式に対する反復解、あるいは山口・野中の第9式、すなわち式(45)を初期値として式(31)の第1式より得られる解が最適と判断される。

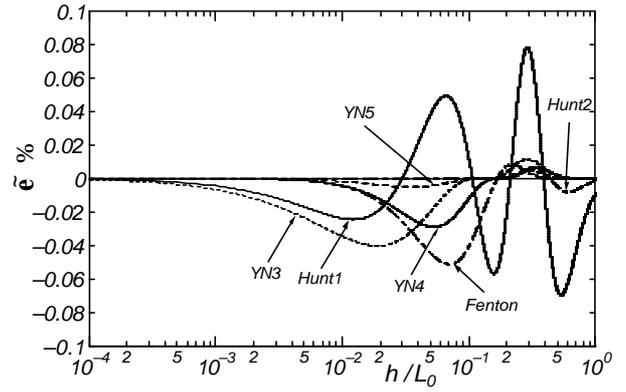


図-3 波長の近似計算式の相対誤差 $\tilde{\epsilon}$ と h/L_0 の関係(3)

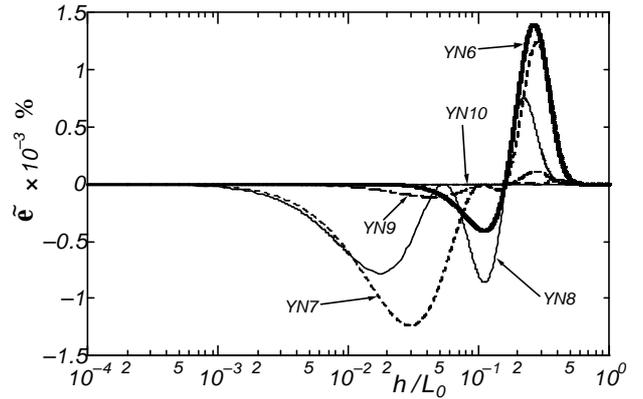


図-4 波長の近似計算式の相対誤差 $\tilde{\epsilon}$ と h/L_0 の関係(4)

Padé 近似に基づく Hunt¹⁰⁾の式はつぎのようである。

12) Hunt¹⁰⁾の第1式(Hunt1と略記)

$$(k_a h)^2 = a \left\{ a + (1 + 0.6522a + 0.4622a^2 + 0.0864a^4 + 0.0675a^5)^{-1} \right\} \quad (49)$$

$$\tilde{\epsilon} = -7.0 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.532) \sim 7.8 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.288) \% \quad (50)$$

13) Hunt¹⁰⁾の第2式(Hunt2と略記)

$$(k_a h)^2 = a \left\{ a + (1 + 0.66667a + 0.35550a^2 + 0.16084a^3 + 0.06320a^4 + 0.02174a^5 + 0.00654a^6 + 0.00171a^7 + 0.00039a^8 + 0.00011a^9)^{-1} \right\} \quad (51)$$

$$\tilde{\epsilon} = -8.2 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.603) \sim 5.4 \times 10^{-3} (h/L_0 = 0.324) \% \quad (52)$$

Hunt¹⁰⁾の第1式(49)は a^5 の項まで用いた最大相対誤差 0.1%の近似式、第2式(51)は a^9 の項まで用いた最大相対誤差 0.01%の近似式となっている。式(51)では、用いられる項数が多すぎる。また Newton 法による反復解と比べると、その精度もあまり高くない。

以上に述べた 11-1) ~ 13)の各式は 1) ~ 10)の各式と同様に h/L_0 の両極限において厳密解を満たす。図-3は 11-1), 11-2), 11-3), 11-4), 12), 13)の各式による相対誤差 $\tilde{\epsilon}$ と h/L_0 の関係を、また図-4は高精度の近似式である 11-5)

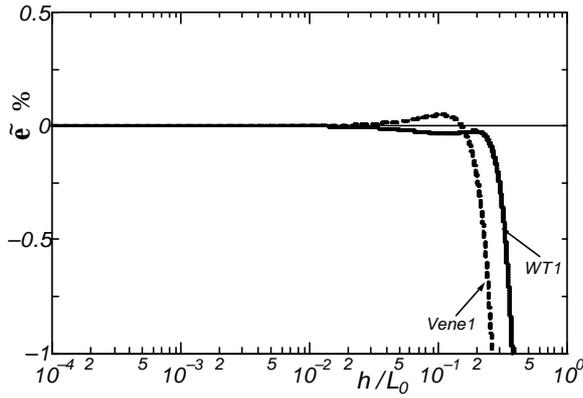


図-5 波長の近似計算式の相対誤差 \tilde{e} と h/L_0 の関係(5)

~ 11-9)の各式による相対誤差 \tilde{e} と h/L_0 の関係を示す．図-3では Hunt¹⁰⁾の第5式(49)による \tilde{e} が0のまわりに大きい振動を伴う特徴が際立つこと，図-4では初期値の精度が高いものほど反復解の精度が h/L_0 の全範囲について高いことがうかがえる．

(4) 浅海域に適用が限定される近似式

浅海域に適用が限定される グループの式のうち，簡潔な形でしかもある程度の精度をもつ近似式，すなわちグループに属する式^{11), 12), 13)}のうち Venezian¹²⁾の第1式と Wu and Thornton¹³⁾の第1式およびそれぞれの式の相対誤差の範囲を以下に示す．これらはそれぞれ長波条件($a \rightarrow 0$)に対して厳密解に漸近する．また，いずれの式による相対誤差 \tilde{e} も h/L_0 の増加とともに一度極値をとったのち負値を急増させるので，その極値と同程度の絶対値を与える h/L_0 を各式の適用限界値(h/L_0^* で表示)としている．

14) Venezian¹²⁾の第1式 (Vene1 と略記)

$$k_a h = a^{1/2} / (1 - a/6) ; h/L_0^* \leq 0.165 \quad (53)$$

$$\tilde{e} = -4.8 \times 10^{-2} (h/L_0^* = 0.165) \sim 4.8 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.104) \% \quad (54)$$

式(53)は簡易な形をとるにもかかわらず，適用範囲内での精度はかなり高い．

15) Wu and Thornton¹³⁾の第1式 (WT1 と略記)

$$k_a h = a^{1/2} \left\{ 1 + \frac{a}{6} \left(1 + \frac{a}{5} \right) \right\} ; h/L_0^* \leq 0.219 \quad (55)$$

$$\tilde{e} = -3.4 \times 10^{-2} (h/L_0^* = 0.219) \sim 0 (h/L_0 \rightarrow 0) \% \quad (56)$$

図-5は14)~15)の各式による相対誤差 \tilde{e} と h/L_0 の関係を表す． \tilde{e} はいずれの式によっても h/L_0 の増加とともに極値をとったのち，急増減する．

ついで，浅海域に適用が限定される グループの式のうち，長い項をもつが精度も高い近似式，すなわちグループに分類される式として You²⁾の式，Venezian¹²⁾の第

2式，Olson¹⁴⁾の式のうち，Venezian¹²⁾の第2式とその相対誤差の範囲はつぎのようである．

16) Venezian¹²⁾の第2式 (Vene2 と略記)

$$k_a h = a^{1/2} (1 + p_1 a + p_2 a^2 + p_3 a^3) / (1 + q_1 a + q_2 a^2 + q_3 a^3) ; h/L_0^* \leq 0.159 (a^* \leq 1) \quad (57)$$

$$p_1 = -0.42886826 \quad p_2 = 0.0939283$$

$$p_3 = -0.00269417 \quad q_1 = -0.59553493$$

$$q_2 = 0.16262861 \quad q_3 = -0.01497505 \quad (58)$$

$$\tilde{e} = -2 \times 10^{-4} (h/L_0^* = 0.159) \sim 6 \times 10^{-6} (h/L_0 = 0.030) \% \quad (59)$$

式(57)は複雑な形をもつが，その精度は適用範囲内では非常に高い．正の相対誤差は $h/L_0 < 0.1$ で実質的に $0 < 10^{-5} \%$ であり， $h/L_0 > 0.1$ で負の相対誤差が次第に増大する．このため，適用範囲を Venezian¹²⁾が与えた $a^* \leq 1$ ($h/L_0^* \leq 0.159$)としている．

(5) 准深海域に適用が限定される近似式

このグループに属し，准深海域に適用が限定される Nielsen¹⁵⁾の第3式と Wu and Thornton¹³⁾の第2式のうち，後者の式とその相対誤差の範囲はつぎのように表される．

17) Wu and Thornton¹³⁾の第2式 (WT2 と略記)

$$k_a h = a \{ 1 + 2t(1+t) \} , \quad t = \exp \{ -2a(1 + 1.26e^{-1.84a}) \} ; h/L_0^* \geq 0.195 \quad (60)$$

$$\tilde{e} = -2.5 \times 10^{-2} (h/L_0 = 0.252) \sim 2.5 \times 10^{-2} (h/L_0^* = 0.195) \% \quad (61)$$

この式の精度は比較的高いが，式の形がやや複雑である．浅海域に対して14)~16)のいずれかの式，准深海域に対して式(60)を用い，両者を接続すれば， h/L_0 の全範囲に適用可能な近似式が得られる．Wu and Thornton¹³⁾は $a = 0.4p$ ($h/L_0 = 0.2$)を境とする式(55)と式(60)の組合せ，また You²⁾は別の組合せを提案している．しかし，たとえば Wu and Thornton¹³⁾による式(55)はその接続境界である $h/L_0 = 0.2$ で $\tilde{e} = -2.4 \times 10^{-2} \%$ ，式(60)は $\tilde{e} = 1.6 \times 10^{-2} \%$ をとり，両者の値は連続しない．

表-1は各近似式の相対誤差の範囲の一覧を改めて示したものである．なお，紙数の都合上省略した Nielsen¹¹⁾の第1式と第2式，Nielsen¹⁵⁾の第3式，You²⁾の式，Olson¹⁴⁾の式に対する相対誤差の範囲は別途¹⁶⁾与えている．

4. 結 語

本研究では，水深・深海波長比 h/L_0 の全範囲に有効な近似式について，Carvalho⁸⁾の第5式の修正式に対する反復解，すなわち山口・野中の第9式(45) (誤差範囲±

表-1 波長の近似計算式の相対誤差の範囲

No.	formula	relative error (%)
1)	Eckart	0 ~ 5.24
2)	Iwagaki	- 3.05 ~ 3.14
3)	Carv14	- 2.45 ~ 3.28
4)	FM	- 1.39 ~ 1.66
5)	YN1	- 1.52 ~ 1.55
6)	Carv9	- 1.12 ~ 0
7)	Guo	- 0.75 ~ 0.75
8)	YN2	- 0.73 ~ 0.73
9)	Carv5	- 0.21 ~ 0.27
10)	Carv4	- 0.12 ~ 0.20
11-1)	Fenton	- $5.1 \times 10^{-2} \sim 8.4 \times 10^{-3}$
11-2)	YN3	- $4.0 \times 10^{-2} \sim 1.2 \times 10^{-2}$
11-3)	YN4	- $2.9 \times 10^{-2} \sim 6.7 \times 10^{-3}$
11-4)	YN5	- $4.9 \times 10^{-3} \sim 4.9 \times 10^{-3}$
11-5)	YN6	- $4 \times 10^{-4} \sim 1.4 \times 10^{-3}$
11-6)	YN7	- $1.2 \times 10^{-3} \sim 1.2 \times 10^{-3}$
11-7)	YN8	- $9 \times 10^{-4} \sim 8 \times 10^{-4}$
11-8)	YN9	- $1.1 \times 10^{-4} \sim 1.1 \times 10^{-4}$
11-9)	YN10	- $7 \times 10^{-6} \sim 4 \times 10^{-5}$
12)	Hunt1	- $7.0 \times 10^{-2} \sim 7.8 \times 10^{-2}$
13)	Hunt2	- $8.2 \times 10^{-3} \sim 5.4 \times 10^{-3}$
14)	Vene1	$\pm 4.8 \times 10^{-2} (h/L_0^* \ 0.165)$
15)	WT1	- $3.4 \times 10^{-2} \sim 0 (h/L_0^* \ 0.219)$
16)	Vene2	- $2 \times 10^{-4} \sim 6 \times 10^{-6} (h/L_0^* \ 0.159)$
17)	WT2	$\pm 2.5 \times 10^{-2} (h/L_0^* \ 0.195)$

0.0001 %)

$$k_a h = \left\{ a + b_a^2 (1 - \tanh^2 b_a) \right\} / \left\{ \tanh b_a + b_a (1 - \tanh^2 b_a) \right\},$$

$$b_a = a \cdot \coth(m^a \cdot a^{1/2}); m = 1.1965, a = 2ph/L_0$$

が適切であること、やや低い精度を許容する場合には Carvlho⁸⁾の第5式(26) (誤差範囲0.21 ~ 0.27 %)

$$k_a h = a \cdot \coth(1.2^a \cdot a^{1/2}), a = 2ph/L_0$$

が十分利用可能であること、を示した。

また、 h/L_0 に関して適用範囲をもつ近似式について、浅海域を対象とする式はその項数や複雑さを増すほど精度を向上させるが、適用範囲外で急激な精度低下をもたらすこと、浅海域および准深海域を対象とするそれ

ぞれの式は誤差に関して異なる挙動をもつので、両式の接続によって h/L_0 の全範囲で整合性のある高精度近似式を構成することが容易でないこと、を明らかにした。結論として、波長の近似計算のためには、 h/L_0 の全範囲に適用可能な単一の式が望ましいと考えられる。

参考文献

- 1) Fenton, J. D. : The numerical solution of steady water wave problems, *Computers & Geosciences*, Vol.4, No.3, pp.357-368, 1988.
- 2) You, Z. J. : Discussion of "Simple and explicit solution to the wave dispersion equation" [*Coastal Engineering* 45(2002)71-74], *Coastal Eng.*, Vol.48, pp.133-135, 2003.
- 3) Guo, J. : Simple and explicit solution of wave dispersion equation, *Coastal Eng.*, Vol.45, pp.71-74, 2002.
- 4) 合田良実 : 海の波の波長計算プログラム, 土木学会論文報告集, 第179号, pp.97-98, 1970.
- 5) 合田良實 : 港湾構造物の耐波設計 (増補改訂), 鹿島出版会, pp.173-175, 1990.
- 6) Eckart, C. : The propagation of gravity waves from deep to shallow water, *National Bureau of Standards*, Circular 521, Washington D. C., pp.165-173, 1952.
- 7) 岩垣雄一 : 最新海岸工学, 森北出版, p.45, 1987.
- 8) http://www.filespoint.com/point/2069111/lwave_29052006.pdf.html
- 9) Fenton, J. D. and W. D. McKee: On calculating the lengths of water waves, *Coastal Eng.*, Vol.14, pp.499-513, 1990.
- 10) Hunt, J. N. : Direct solution of wave dispersion equation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., Proc. ASCE*, Vol.105, No.WW4, pp.457-459, 1979.
- 11) Nielsen, P. : Explicit formulae for practical wave calculations, *Coastal Eng.*, No.6, pp.389-398, 1982.
- 12) Venezian, G.: Discussion to the Paper by J. N. Hunt (1979), *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., Proc. ASCE*, Vol.106, No. WW4, pp.501-502, 1980.
- 13) Wu, C. S. and E. B. Thornton : Wave numbers of linear progressive waves, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE*, Vol.112, No.4, pp.536-540, 1986.
- 14) Olson, F. C. W. : An explicit expression for the wave length of a gravity waves, *J. Phys. Oceanogr.*, No.3, pp.238-239, 1973.
- 15) Nielsen, P. : Explicit solutions to practical wave problems, *Proc. 19th ICCE*, Vol.1, pp.968-982, 1984.
- 16) Yamaguchi, M. and H. Nonaka : Comparative study of explicit solutions to wave dispersion equation, *Annu. Jour. Eng., Ehime Univ.*, Vol.6, 2007 in CD-ROM.

(2006.9.30受付)