水工学論文集,第51巻,2007年2月

# 常流移動床分岐水路における河床不安定に関する研究

STUDY ON THE INSTABILITY OF BED FORM IN THE CHANNEL BIFURCATION ON MOVABLE BED UNDER SUBCRITICAL FLOW

守屋　薫[1]・長谷川　和義[2]・小林　賢也[3]

Kaoru MORIYA, Kazuyoshi HASEGAWAJ, Kenya KOBAYASHI

[1]学生会員　北海道大学工学研究科（〒060-8628 札幌市北区北１３西８）

[2]フェロー会員　工博　(財)河川環境管理財団（〒060-0061 札幌市中央区南１西７）

[3]正会員　国土交通省（〒100-8918 東京都千代田区霞が関２-１-３）

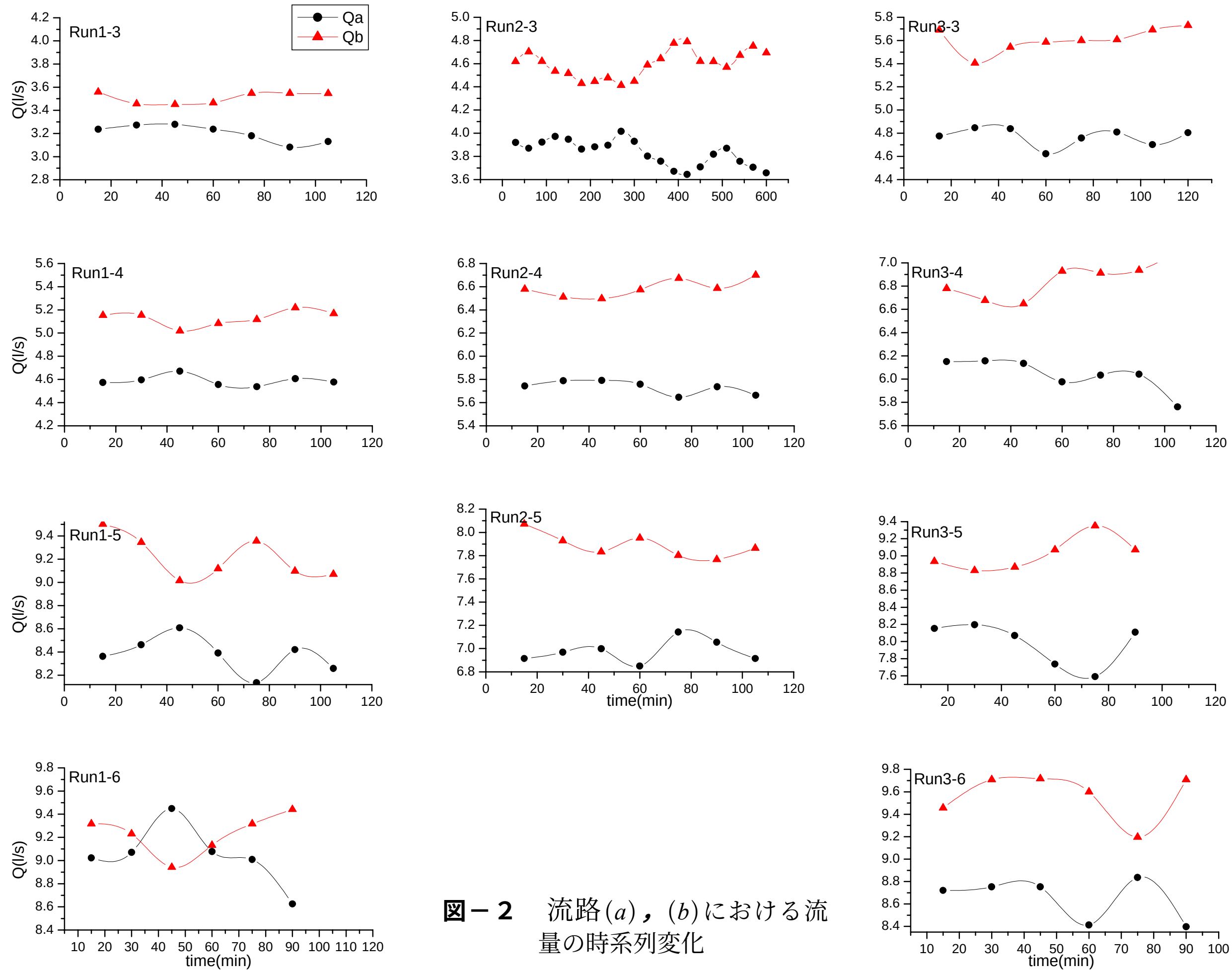
Stability condition for a bifurcated channel system is not well known on the bed displacement and discharge ratio in branched alluvial rivers. Subcritical flow tests using a simple straight bifurcated channel with different slopes of movable channel bed were conducted to find hydraulic parameters relating to the unstable changes and instability conditions. Also, linear stability analysis on bed change was performed to the upstream area of a channel bifurcation with using the shallow water flow equations and continuous equation of sediment by applying the Galerkin method. The results show that instability of bed displacement and discharge is strongly influenced by nondimensional wave number k of bed undulations in the upstream area of channel bifurcation and parameter βwhich reflects the lateral inclination of a cross section caused by the difference of bed slopes of two bifurcated channels. In the range of $0.1<k<0.5$ and $\beta<2.35$, bed displacement and discharge ratio will change with time in channel bifurcation.

***Key Words :*** *channel bifurcation, movable bed, subcritical flow, stability analysis, unstable condition*

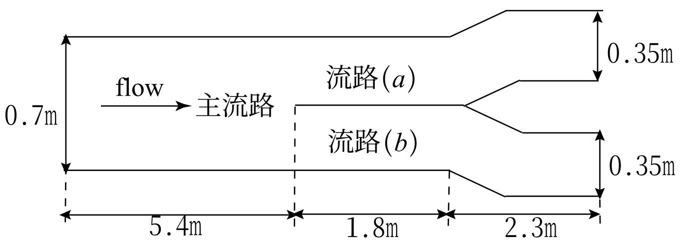
## １．はじめに

本来河川は蛇行や分岐など様々な流路形態を見せ存在するものである．それを防災や土地利用の観点から直線化してきた．河川の直線化は土砂の流出や湿地帯の消失など，河川環境を変化させた．近年の環境意識の高まりの中，河川が本来持ちうる蛇行や分岐を復元しようという試みがある．現在，北海道東部の標津川で「自然復元型川づくり」として，試験的に，直線化された河川から蛇行部を復元している試みも一例である．計画洪水流量を安全に流下させる要請から，直線化されていた流路と蛇行流路を併用できるようになっている．このような防災と環境の両面の性質を兼ね備える河川のケースも多くなってくるのではないかと思われる．

分岐流に関してはこれまで多くの研究がされている．長谷川ら[1)2)]は山地渓流における分岐流の閉塞現象に着目し，射流条件下の分岐部実験や運動量方程式による解析を行っている．長谷川らによれば射流が分岐する場合には流量配分比・水深などの解は４つ存在し分岐部流れが複数存在する．すなわち分岐水路を$(a)$, $(b)$と区別した場合，①$(a)$, $(b)$両水路ともに射流で流下する解，②$(a)$の水路で跳水が生じて常流に接続し，他方が射流で流下する解，③$(b)$水路で跳水，$(a)$水路で射流となる②の状態が反対になる解，④両水路ともに跳水が生じ常流で流下する解，である．これらのそれぞれの場合において，流量配分比が異なっていることが注目される．目黒・長谷川ら[3)]は射流移動床条件における分岐部流れを実験的に調べて主流路が代わる代わる変化する交番現象を見出している．常流移動床条件ではBollaら[4)]が分岐部モデルによる安定解析を行っており，３つの解が存在することを示している．すなわち彼らは等幅分岐水路について１次元運動方程式と流砂連続式を組み合わせて下流の分岐水路勾配が異なる場合の流量配分比を解き，①無次元掃流力がある値をこえるケースでは唯一の解が存在するが，②これを下回るケースでは３つの解が存在し，配分比が0.5に近い解はむしろ不安定である事を明らかにしている．興味深いことに勾配の緩い水路側に大きな流量が流れる解が現れやすい結果を示している．彼らは交互砂州が発生した場合にはその前進に対応して流量配分比が強




**図－２**　流路($a$)，($b$)における流量の時系列変化




**図－１**　実験水路概略図

く影響を受けるとし，不安定性がそれによるものなのではないかとしているが，詳細については不明である．そこで本研究では外部条件の影響が無いよう平行等幅に分岐された流路を用い，常流移動床条件とし，分岐後の流路に勾配差を与え，内部条件による分岐流れへの不安定性を実験・理論の両面から検討した．

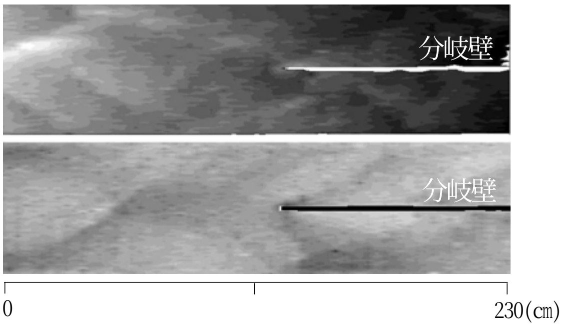
## 2．実験の概要

### (1) 実験装置と条件

実験で使用した水路は**図－１**に示すような長さ950cm，主流路幅70cmの木製水路であり，水路中央を板で仕切ることによって流路を対称に分岐させた．以後，分岐流路のうち左岸側流路を流路($a$)，右岸側を流路($b$)と呼ぶことにする．主流路河床勾配および流路($b$)河床勾配は1/531であり，流路($a$)の河床勾配を緩勾配とし，また河床には粒径0.5mmの砂を一様に敷き詰めた．実験条件は**表－１**に示すとおりである．流路($a$)河床勾配を３通りに，それぞれ流量を変えて実験を行った．流れはいずれ

**表－１**　実験条件

| | 河床形態 (分岐部上流) | 流量 $Q$(l/s) | 流路($a$) 河床勾配 $i_a$ | フルード数 $Fr$ | 無次元掃流力 $\tau_*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Run1-3 | 交互砂州 | 6.7 | 1/724 | 0.59 | 0.068 |
| Run1-4 | 複列砂州 | 9.7 | 1/724 | 0.64 | 0.083 |
| Run1-5 | Dune | 17.6 | 1/724 | 0.65 | 0.122 |
| Run1-6 | Dune | 18.3 | 1/724 | 0.76 | 0.112 |
| Run2-3 | 複列砂州 | 8.4 | 1/1110 | 0.67 | 0.073 |
| Run2-4 | 複列砂州 | 12.3 | 1/1110 | 0.68 | 0.093 |
| Run2-5 | Dune | 14.9 | 1/1110 | 0.67 | 0.106 |
| Run3-3 | 複列砂州 | 10.4 | 1/2448 | 0.62 | 0.088 |
| Run3-4 | 複列砂州 | 12.9 | 1/2448 | 0.66 | 0.098 |
| Run3-5 | Dune | 17.0 | 1/2448 | 0.66 | 0.118 |
| Run3-6 | Dune | 18.2 | 1/2448 | 0.79 | 0.110 |




**図－３**　Run1-6(上)とRun3-3(下)の河床コンター図

も常流である．表中の河床形態は分岐壁の上流部で認められた典型的な形態を示している．

### (2) 実験結果

左右分岐流路末端の採水により求めた流量の時系列を**図－２**に示す．**図－３**はRun1-6とRun3-3の河床コンター図である．**図－２**のどのグラフも左右流路の流量変化が見られるが，Run1-6では左右流路の流量が逆転する交番現象が見られた．またRun2-3では通水時間を長くすることで交番に至るのではないかと考え，600分間通水したが交番には至らなかった．また河床形態が交互砂州であったRun1-3では流量が安定しているように見える一方，交番現象が起こったRun1-6で発生した河床形態はDuneであった．その他，発生河床形態がDuneである場合に左右流路流量の変化が顕著に現れる結果となった．

## ３．理論解析

解析の対象は，分岐壁の上流端から上流側$\lambda$の影響区間であり，本研究ではこれを河床波の１波長程度と見ることにした．この区間の河床が分岐後の水路勾配の違いによって内部的な不安定を起こすか否かを明らかにする．

### (1) 基礎方程式と線形化

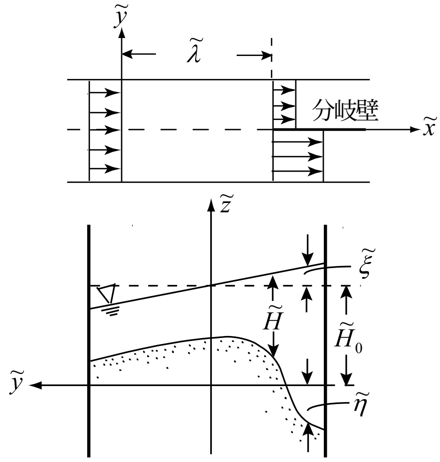
移動床，広矩形断面開水路流れを考える．流れを二次元浅水流とし，河床砂の運動形態は掃流運動のみとし，浮遊運動はないとする．**図－４**のように水路の中心線に沿って$\tilde{x}$軸，それに垂直に$\tilde{y}$軸，平均河床面を原点とし垂直上向きを正に$\tilde{z}$軸をとる．この座標系によれば，水路床に小変位$\tilde{\eta}$(深掘れを正)を持つ流れの定常運動量方程式，連続の式は以下のようになる．

$$\tilde{U}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = gI - \frac{\tilde{\tau}_x}{\rho_w \tilde{H}} - g\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{H}-\tilde{\eta}) \tag{1}$$

$$\tilde{U}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\tilde{\tau}_y}{\rho_w \tilde{H}} - g\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{H}-\tilde{\eta}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{U}\tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{V}\tilde{H}) = 0 \tag{3}$$

ただし，$\tilde{U}$，$\tilde{V}$はそれぞれ流速の$\tilde{x}$，$\tilde{y}$軸方向成分．$\rho_w$は水の密度，$I$は$\tilde{x}$軸に沿った平均河床勾配，$g$は重力




**図－４**

加速度である．$\tilde{\tau}$は河床せん断力で，添え字はその軸向成分を示している．また，摩擦係数$f$を用いてせん断力を表わすことができる．すなわち，平均流の局所値に応じて，その場所の河床せん断力が決まる．しかし$f$は必ずしも一定ではなく，特に小規模河床波の存在する場合には形状抵抗が大きな値をしめ，水理量変化に対応して複雑に変化する．ところが砂州河床では，形状抵抗はほとんど現れず，平坦床と同様に水深/粒径比にのみ変化を見せ，平均水理量間において，断面平均水理量によって決まる摩擦係数$f_0$，径深$R_b$で$f$は表される．今，平均水理量間に成り立つ先述の関係が，局所的な水深の違いに対応して，同様に成立するものと考える．以上のことから，式(1)～(3)に関して流れを(等流解＋摂動解)の形で表し，摂動部の２次以上の項を省略するとともに無次元化を施すと，以下の線形無次元化式が求まる．ただし$\tilde{U}_0$は等流(断面平均)流速．$\tilde{U}_0 u$は平均流速からの偏倚流速であり，$\tilde{H}_0 \xi$は水面の平均水位からの変位(上向き正)である．

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0(1+u), \tilde{V} = \tilde{U}_0 v, \tilde{H} = \tilde{H}_0(1+\xi+\eta)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{H}_0\eta, \tilde{\xi} = \tilde{H}_0\xi, \tilde{x} = \tilde{H}_0 x, \tilde{y} = \frac{\tilde{B}}{2}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{F^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + f_0\left\{u - \frac{\gamma}{2}(\xi+\eta)\right\} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{F^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

ただし，

$$F = \frac{\tilde{U}^2}{\sqrt{g\tilde{H}_0}}, \varepsilon = \frac{2\tilde{H}_0}{\tilde{B}}$$

底面せん断力の$\tilde{x}$方向成分$\tilde{\tau}_x$を表す式を偏倚流速を用いた無次元掃流力の形で表現し，$\tilde{x}$軸方向のMeyer Peter-Müller型の流砂量式に代入し高次項を省略して整理すると以下の式で表される．

$$\widetilde{q}_x = \widetilde{q}_{x0}\{1+3\phi_* u + (1-\gamma)\phi_* \eta\} \tag{7}$$

$$\widetilde{q}_{x0} = 8\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho_w}-1\right)gd^3}\,(\tau_{*0}-\tau_{*c})^{1.5}, \phi_* = \frac{\tau_{*0}}{\tau_{*o}-\tau_{*c}}$$

$\tau_{*0}$：断面平均の無次元掃流力

また $\widetilde{y}$方向の流砂量は次のように表される．

$$\widetilde{q}_y \approx \widetilde{q}_{x0}\left(v + \varepsilon\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{8}$$

流砂の連続条件は，

$$\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \widetilde{t}} = \frac{1}{1-n_e}\left(\frac{\partial \widetilde{q}_x}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial \widetilde{q}_y}{\partial \widetilde{y}}\right) \tag{9}$$

であり，$\widetilde{t}$ は実時間である．上式に式(7)，(8)を代入し，

$$\widetilde{t} = \left\{\frac{(1-n_e)\widetilde{H}_0^2}{\widetilde{q}_{x0}}\right\}t \tag{10}$$

なる置き換えを行い，整理すれば河床底面の時間変化式が以下のように求まる．ただし$n_e$：河床の空隙率．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - 3\phi_* \frac{\partial u}{\partial x} - (1-\gamma)\phi_* \frac{\partial \eta}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon^2\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \tag{11}$$

式(4)～(6)，(11)より，$u$ ，$v$を消去すると以下の２本の式を得る．

$$\left(\frac{1}{F^2}-1\right)\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{F^2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{\gamma}{2}+1\right)f_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + f_0\frac{\varepsilon^2}{F^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \left(\frac{\gamma}{2}+1\right)f_0\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + (\gamma\phi_* + 3\phi_* - 1)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \varepsilon^2\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_{*0}}}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} + 3\phi_*\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{F^2}(1-3\phi_*)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

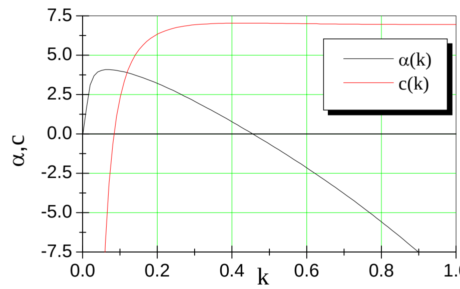
上記の２本の式が基礎式であるが，$\eta$ ，$\xi$ に関するいずれかの１本の式にはならない．

### (2) ガラーキン法の適用

実験で得られた河床形状をもとに，水路床，水面の局所変位を無次元化した解関数 $\eta$, $\xi$ を次のように与える．

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\exp[\alpha t + ki(x-ct)]\frac{kx}{2\pi}\cos(\pi y)\exp(-\beta y) \tag{14}$$

ここで$a,b$：振幅，$k$：波数，$\alpha$：振幅の増幅を表すパラメータ(正で不安定・負で安定)　$c$：移動速度である．本解析では分岐流路の河床勾配が異なる場合を想定しており，**補足１**で詳述する様に，河床勾配の比が分岐部上流に及ぼす影響を$\beta$の項で表現している．すなわち，横




**図－５**

断方向の河床変位に, $\exp(-\beta y)$ を乗ずることにより，河床勾配が緩やかな分岐流路につながる左岸側ほど，右岸側に比べて侵食量が小さくなるように影響を見積もっている．また式(14)中に$kx/2\pi$を乗じているのは，$2\pi/k=\lambda$だけ上流においては分岐の影響が無く，分岐部付近に近づくに従ってそれが強まることを想定したものである．また　$\lambda = \widetilde{\lambda}/\widetilde{H}_0$　である．ところで上記のように解に制約を与えた場合，通常の不安定解析のように式(14)を直接式(12)，(13)に代入することによって係数を導き出すことはできない．そこで式(14)の係数$\alpha$などをガラーキン法によって近似的に解くこととした．すなわち同式を式(12)，(13)に代入して得られた残差に解関数の一部，

$\cos(\pi y)\exp[\alpha t + ki(x-ct)]$

を乗じて$x$ について(0，$2\pi/k$)，$y$ について(-1,1)の範囲でそれぞれ積分し，直交条件によってそれぞれ0となる条件を求めた．この場合問題となることは，ガラーキン法の適用が安定解析にとって妥当な結果をもたらすか否かということである．このため本方法が単列交互砂州の発生に対して有効に機能することを**補足２**において確かめている．結果は，

$$F_1(a,b,c,k,\alpha,\beta,) = 0 \tag{15}$$
$$F_2(a,b,c,k,\alpha,\beta) = 0 \tag{16}$$

という形をしている．ただし$F_1$，$F_2$ は関数を意味する．

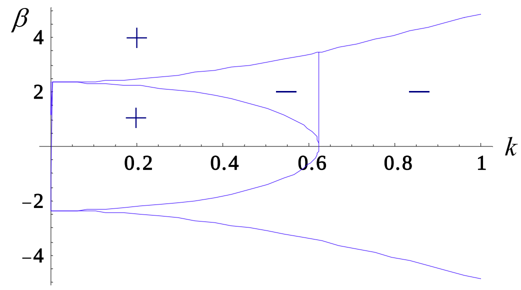
式(15)を$b$ について解き(この時 $a$ は消去される)，式(16)に代入した式の実部を$c$ について解き，虚部をα について解き連立することにより，

$$\alpha = G_1(k,\beta) \tag{17}$$
$$c = G_2(k,\beta) \tag{18}$$

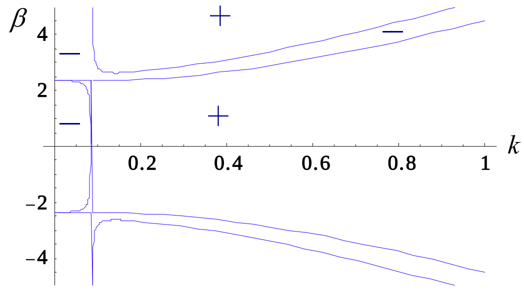
の関係式が得られる．$G_1$，$G_2$は関数を意味する．関与するパラメータとしては，他に$F$(フルード数)，$\varepsilon$(水深半幅比)，$f_0$(摩擦係数)などが式中に現れるが，記述は省略している．

### (3) 分岐不安定解析

式(17)，(18)中の$\beta$および他の未知量にRun1-6の実験値を与え，$\alpha$ と$k$，$\alpha$ と$c$の関係について調べたものを**図**




**図－６**　$\alpha$=0の限界時の$\beta$, $k$ の関係




**図－７**　$c$ =0の境界の$\beta$**,** $k$ の関係

**－５**に示す．他の実験例についてもほぼ同様な図が得られる．$\alpha$の正領域の極大が$k$=0近傍にあるが，これは交互砂州の卓越波数に近いものとなっている．$k$ の値が0.5付近より大きな値を持つ領域，すなわち短波長の河床起伏に関しては$\alpha$が負の領域をとり，流れが安定する傾向にある．しかし$c$の正の領域すなわち，伝播が下流に向かう領域は$k$=0.08より大きな領域にあり，この波長域の起伏は分岐部に影響を与える．逆に交互砂州など$k$<0.08の波は発生があってもその影響が分岐部に及ばない可能性がある．ただし，これらは$\beta$によっても変化する．そこで$\alpha$=0の限界時に得られる$\beta$と$k$の関係，および$c$=0の境界で得られる$\beta$と$k$の関係を**図－６**，**７**に示す．なお図中の正負はそれぞれ$\alpha$，$c$の正負を表す．**図－６**を見ると，$\beta$の値が2.35付近を超えた値をもつと，$k$の値によらず$\alpha$は正の領域になり流れが不安定となる．**図－７**からは$k$ が0.08より大きい値を持てば，$c$ は$\beta$によらずほぼ正の領域となり流れが不安定性を持つ．通常考えられる $\beta$が2.35以下では**図－５**の関係が常に成り立ち，長波長の河床起伏が分岐部の変動を引き起こすが，交互砂州のような非常に長い波長の場合では$c$が負の領域に入り，河床形態による不安定性が下流に伝わらず変動にはつながらないものと判断される．

## ４．実験結果との照合および考察

常流移動床実験では分岐流路の流量は変動し，交番にまで至ることが確認された(Run1-6)．また交互砂州の発生実験では流量の変動がほとんど起こっていなかった(Run1-3)．各実験の水理量をもとに，理論式から$c$と$\alpha$を求め，不安定領域との関係を調べた．流量が交番しているか，もしくは変動が激しい結果の現れた実験，Run1-5，Run1-6，Run3-4，Run3-5，Run3-6については$\alpha$>0，$c$> 0の領域に入った．一方流量変動の小さな実験Run1-3，Run1-4，Run3-3に関しては$\alpha$> 0，$c$<0の結果となった．なおRun2のシリーズは河床形状を測定しなかったので検証ができなかった．波数$k$ の値がある値より小さくなると$c$ は負の値となり，$c$ が正の場合と比べると流量変動が小さくなる，すなわち不安定性が小さくなるようである．

以上のように，実験および理論の結果から(1)$\alpha$>0，$c$>0，(2)$\alpha$>0，$c$<0の２つのパターンが得られる．(1)のパターンが現れるのは，**図－７**上で波数$k$が0.08より大きく**図－６**上で0.6より小さい場合であり，実験結果では流量変動は大きく，交番に至るケースも認められる．(2)のパターンは，交互砂州が発生しているような場合で，流量に変動はあるが，その変動が比較的小さくなる場合である．$\alpha$>0の不安性を与える領域において，$c$>0であれば前進した河床形態による不安定性が下流に伝わり流量の変動に影響を与えるが，$c$<0であれば河床形態による不安定性は下流に伝わらず，比較的流量は安定するということである．一般に$\beta$ の値は狭い安定領域の現れる2.35付近より小さな値をとるものと考えられるので，問題とする場合の多くは上述の２つのパターンのいずれかになるものと考えられる．

## ５．まとめ

本研究から，異なる河床勾配を持つ常流移動床分岐流について，流量の変動現象につながる内部不安定性は勾配の違いと河床形態の波長に依存し，またその不安定性領域の中では河床形態の波長がある値より小さいと流量の変動が大きく，ある値より大きいと流量変動は小さいことがいえる．

このことにより理論的な分岐不安定解析によって外部条件の影響のない分岐流れの安定・不安定の領域を求めることができた．

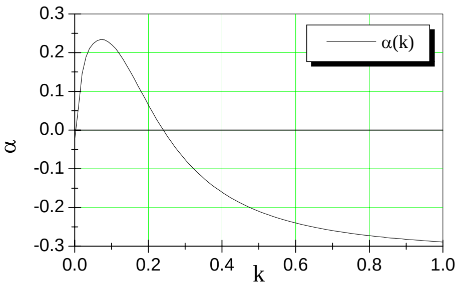
安定・不安定の指標とした$\alpha$ や$c$ には $\beta$と $k$ の他に要素パラメータとして，$F$(フルード数)，$\varepsilon$(水深半幅比)，$f_0$(摩擦係数)などが存在するので，これらのパラメータによる影響を調べることを今後の課題としたい．

### 参考文献

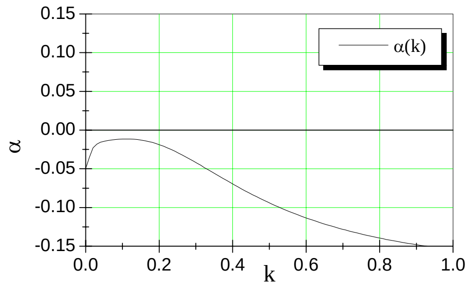

1)長谷川和義ら：標津川蛇行通水時の堰をともなう分岐流量配分比に関する研究,水工学論文集,第47巻,pp529-534，2003．

2)長谷川和義：分岐部跳水が引き起こす土砂停止よる山地河道の突然変動機構の解明,平成５年度科学研究費補助金(一般研究C)研究成果報告書,1994．

3)長谷川和義ら：山地河川における分岐部流路交番現象に関する抽出実験とその解析，水工学論文集，第47巻，pp679-684，2003．




**図－８**




**図－９**


4) Bolla Pittaluga M. , Repetto R. and Tubino M.: Channel bifurcation in brained rivers: Equilibrium configurations and stability,WATER RESOURCES RESEACH, vol. 39, No. 3, 1046-1058, 2003

5) 小林賢也，長谷川和義，守屋薫：異なる河床勾配を有する常流分岐水路の水理特性，土木学会北海道支部論文集，第61号,CD Rom, 2005．


## 補足１．分岐流路勾配の比率とβの関係

分岐流路の勾配が互いに異なる場合に，その比率に応じて流量配分比が変化する．小林ら[5]は流量配分比$r$を未知数として分岐部上流区間に検査断面をとり，運動量方程式を導いて勾配比が異なる分岐流れの$r$と上流水深$h_0$を数値的に解いている．いま，この運動量方程式に対し主流路，および二つの分岐流路の境界端の水深が等流水深に等しいという近似をおこない，$r$に関する近似解を求めると以下のようになる．

$$r=\frac{1}{2}+\frac{3.48(\phi_a-\phi_a{}^3)+6.96F^2(\phi_a-1)}{2.61\phi_a-1.74\phi_a{}^2-9.23\phi_a{}^3+F^2(13.93\phi_a-19.50)} \qquad \text{(i)}$$

ただし，$\phi_a=(i_0/i_a)^{3/10}$，$i_0$=主流路河床勾配，$i_a$= 流路$(a)$勾配，$F$=主流路流れのフルード数である．流路$(b)$の勾配を主流路勾配に等しい場合を想定しているほか，分岐流路が等幅で粗度係数を等しく取っているためこれらの影響は現れない．次に，分岐入り口部の河床変動は，$(a)$，$(b)$ それぞれ以下のように見積ることができる．

$$\Delta\eta_a\propto\left[\ \left(\frac{h_a i_a}{sd}-\tau_{*c}\right)^{3/2}-\left(\frac{h_0 i_0}{sd}-\tau_{*c}\right)^{3/2}\ \right]$$

$$\Delta\eta_b\propto\left[\ \left(\frac{h_b i_b}{sd}-\tau_{*c}\right)^{3/2}-\left(\frac{h_0 i_0}{sd}-\tau_{*c}\right)^{3/2}\ \right]$$

ただし，$h_a$，$h_b$，$h_0$はそれぞれ各流路の等流水深，$s$ = 砂礫の水中比重，$d$ = 粒径，$\tau_{*c}$=無次元限界掃流力．したがって，横断方向の傾斜は$h_a/h_0$，$h_b/h_o$水深比の結果を採用して次のように評価される．

$$\frac{\Delta\eta_a}{\Delta\eta_b}\propto\frac{\left[\{2(1-r)\}^{3/5}\phi_a{}^{-7/3}-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}-\left[1-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}}{\left[(2r)^{3/5}-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}-\left[1-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}} \qquad \text{(ii)}$$

次に，解関数の横断形状を

$$\eta\propto b\exp(-\beta y)\cos(\pi y) \qquad \text{(iii)}$$

のように与え，流路$(a)$に対応して$y$の$(0,1)$区間で流路$(b)$に対応して$(-1,0)$区間でそれぞれ積分して平均高さの比を求めると，

$$\frac{\Delta\eta_a}{\Delta\eta_b}=-\frac{1+\exp(-\beta)}{1+\exp(\beta)} \qquad \text{(iv)}$$

これを（ii）式右辺の$1/K$ 倍に等しいとして$\beta$ を求めると

$$\beta=\ln\left[-K\frac{\left[(2r)^{3/5}-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}-\left[1-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}}{\left[\{2(1-r)\}^{3/5}\phi_a{}^{-7/3}-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}-\left[1-(u_{*c}/u_{*0})^2\right]^{3/2}}\right] \qquad \text{(v)}$$

となり，式（ｉ）を代入することにより $\beta$ が勾配比の関数として表されることになる．

## 補足２． 交互砂州の不安定解析によるガラーキン法の成立性の検証

ここで**３.(2)**の理論解析が妥当かどうかを，分岐を考えない単純流路において交互砂州が発生した場合を考え，成立性を検証した．まず$\eta$，$\xi$ は次のように与えられる．

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\exp\left[\alpha t+ki(x-ct)\right]$$

上式を式(12)，(13)に代入し，同様の操作を行うと，

$$\alpha=F(k)$$

が得られ，この$\alpha$と$k$の関係を**図－８**に示す．$\alpha$の極値が$k$=0.1近傍にて現れていること，$k$＞0.25で$\alpha$＜0となっていることなど，通常の交互砂州の発生理論に一致する結果が得られている．次に発生した河床形態がDuneのときの実験条件を用いた$\alpha$と$k$の関係を**図－９**に示す．$k$の値によらず$\alpha$は正の領域を持たない．つまり砂州が非発生の状態である．

以上より，方程式の適用と解関数を与えたガラーキンの適用が妥当であると判断できた．


**(2006.9.30受付)**