3次元流体中を移動する 任意形状物体の数値解析手法

NUMERICAL PREDICTION METHOD FOR ARBITRARILY-SHAPED BODIES MOVING IN THREE-DIMENSIONAL FLUIDS

牛島 省¹・福谷 彰²・藤岡 奨³・禰津 家久⁴

Satoru USHIJIMA, Akira FUKUTANI, Susumu FUJIOKA and Iehisa NEZU

¹ 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスタ) ² 学生員 京都大学工学部 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスタ) ³ 正会員 独立行政法人 水資源機構 (〒 501-0801 岐阜県揖斐郡揖斐川町鶴見字下平 639) ⁴ フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスタ)

A computational method has been proposed to predict the movements of arbitrarily-shaped solid bodies in a viscous incompressible fluid. This method is based on the 3D MICS, a computational method for incompressible multiphase fields. In this paper, the numerical procedures of solid-body movements are improved by introducing the quaternion that enables us to evaluate the rotating motions of solid bodies more accurately than the time-integration method. The proposed method has been applied to the assembly of tetrahedrons and it was shown that the fluid-body interactions are suitably treated. In addition, as a result of the computation of a falling rectangular body in water, it was confirmed that the position of the body and the falling speed are adequately predicted with the present method.

KeyWords : 3D MICS, tetrahedron element, quaternion, rigid bodies

1.はじめに

氾濫流による漂流物の輸送や,出水時における流木 や大粒径土砂の移動などの問題では,流れ場に比較的 スケールの大きい物体が含まれることになり,物体運 動と流動現象の相互関係が重要となる.実際に自然界 で観察されるこれらの現象には,流れ場の境界条件や 物体の変形,相互干渉など,取り扱いが難しい複雑な 要因が数多く含まれている.このため,実現象を直接 評価する手法には経験的な要素が含まれることは避け られないが,その一方で各要因を可能な限り正確に再 現できるような数値解法を構築していくことも重要な 課題であると考えられる.本報では,流体中を移動す る任意形状の物体の運動と周囲の流れ場に着目し,両 者を適切に扱う数値解法について検討を加える.

このような現象に対する水工学分野の計算例として は,流砂場や水中沈降粒子,流木を扱う計算など多くの 検討例がある^{1),2),3)}.その1つに,多相場のモデルを 利用して自由水面流れと物体運動を扱う手法(MICS) があり,これまでに3次元波動流れにおける基本的な 物体運動が再現されることなどが確認されている⁴⁾. MICSの1つの特徴は,物体に作用する流体力を抗力 係数等の経験定数を用いずに評価できる点にある.

水工学分野における物体を含む流れ場の計算例では, 扱われる物体の形状は球形に限定されたり,あるいは 球体を連結したものとする場合が多い.これには,剛 体運動を考えるときの取り扱いやすさ,抗力係数が経 験的に得られていること,また物体が接触する際にそ の判定が容易であることなど,いくつかの理由がある. MICS を用いた計算例でも,波動流れを受ける球体の 運動が扱われており^{4),5)},球体を連結することにより 物体形状を模擬する試みも行われている⁶⁾.しかしな がら,前報⁶⁾で指摘されたように,球体を組み合わせ る方法では形状の表現力に限界があり,また球体の重 なりにより慣性テンソルを正確に求めることが困難と なるという問題点がある.このため,著者らは物体を 四面体要素の集合体として表現する方法の検討を進め ており,周囲流体が存在しない条件における物体運動 の取り扱いについて考察を加えている⁷⁾.

本報では,四面体要素から構成される任意形状物体 の運動方程式に対する計算精度を向上させる方法を提 案するとともに,基本的な検証を行って既往の手法と 計算誤差に関する定量的な比較を行った.さらに,こ の物体運動の計算手法を MICS と組み合わせることに より,流動現象と物体運動の双方を取り扱えるものと した.ただし,物体間の接触力算定にはいくつかの課 題があるため⁷⁾,本報では物体間の接触は扱わない. 提案された手法により,基本計算と実験結果を対象と する計算を行い,有効性を確認する.

2.数值解析手法

(1) 混合体に対する基礎式

本報で扱う3次元多相場の解法 (3D MICS) では,ス ケールの比較的大きい物体を含む流体などの多相場を, 図-1 に概略的に示すように,物性が異なる混ざり合わ ない非圧縮性流体の混合体として扱う⁴⁾.このような 多相場の取り扱いは,一流体モデル⁸⁾として知られる ものであり,例えば図-1の領域 Ω に対する Euler 表 記された質量保存則は次式のように表される.

$$\sum_{k} \int_{\Omega_{k}} \left[\frac{\partial \rho_{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{j}} (\rho_{k} u_{k,j}) \right] \, d\Omega = 0 \qquad (1)$$

この領域 Ω が十分小さく, Ω 内の各流体の変数 $\phi'_k(t, x)$ が,領域内の空間的な代表値 $\phi_k(t)$ で近似できる場合には,次の仮定が成り立つ.

$$\int_{\Omega_k} \phi'_k(t, \boldsymbol{x}) \ d\Omega \approx \int_{\Omega_k} \phi_k(t) \ d\Omega = \Omega_k \phi_k(t) \quad (2)$$

この関係を用いれば,式(1)は次のように表される.

$$\sum_{k} \Omega_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \sum_{k} \Omega_k \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_{k,j}) = 0 \qquad (3)$$

ここで, ρ と u_i を次式で定義される Ω 内の体積平均密度と質量平均速度成分とする.

$$\rho = \frac{\sum_k \Omega_k \rho_k}{\Omega} \tag{4}$$

$$u_i = \frac{\sum_k \Omega_k \rho_k u_{k,i}}{\Omega \rho} \tag{5}$$

これらを用いると,式(3)は次式のように表される.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_j) = 0 \tag{6}$$

ここで Ω_k に対する微分は0であると近似した.

上記のような操作を Lagrange 表記された質量保存 則と運動方程式に用いれば,以下の非圧縮条件と保存 形表示された運動方程式が得られる⁴⁾.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\mu u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu u_j) \right]$$
(8)

ここで,質量平均速度と各流体の速度差に起因する項 は無視できると仮定している.また,流体間の界面張 力は無視している.本報の解法では,上記の基礎式と ともに,任意形状物体の運動方程式を計算する.



図-1 混ざり合わない非圧縮性流体の混合体

(2) 任意形状物体の運動方程式

3D MICS では,上記の基礎式を用いて,流体ととも に格子スケールより十分大きい物体の運動を扱う.そ の際に,物体は剛体であると仮定し,物体の運動方程 式に式(8)から得られる流体力を外力として考慮する. また,後述するように,任意形状の物体は,慣性テン ソルの算出や流体計算セルに含有される体積の算出等 が容易に行えるように,複数の四面体要素から構成さ れるものとする.

並進運動の運動方程式は次式のように表される.

$$M\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} \tag{9}$$

ここに, *M* は物体の質量, *v* は物体の重心点の並進速 度ベクトル, *F* は外力ベクトルである.また,上付の ドットは時間による微分を表す.

一方,回転運動は次の Euler の運動方程式により表 される.

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N} \tag{10}$$

N は物体に作用するトルクである.現在のある姿勢に 対する角運動量ベクトル L は次のように表される.

$$\boldsymbol{L} = R\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} \tag{11}$$

ここに, R は基本姿勢から現在の姿勢への変換を表す 回転行列, ω は物体の基本姿勢からみた角速度ベクト ル, I は基本姿勢における慣性テンソルを表す.基本 姿勢とは,慣性テンソルを算出しやすいように剛体に 対する Euler 角が適当に設定された状態を表す.

式(11)を時間微分すると、次の関係が得られる.

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R} \boldsymbol{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{12}$$



図-2 四面体と重心点の関係

式 (12) 中の *R* は次のように表される.

$$\dot{R} = RQ(\boldsymbol{\omega}) \tag{13}$$

ここに, $Q(\omega)$ は角速度ベクトル ω の i 成分 ω_i (i = 1, 2, 3)を用いて,以下のように定義される.

$$Q(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$
(14)

この $Q(\omega)$ を用いると, $Q(\omega)I\omega = \omega \times I\omega$ という関係が成り立つので,結局式 (10) は次のように表される.

$$R(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}) = \boldsymbol{N}$$
(15)

(3) 慣性テンソルの設定

有限要素法による固体解析などの例に見られるよう に,任意形状の物体は,複数の四面体を用いることに より,その境界形状を近似的に表現することができる. このため,本報では物体は四面体要素から構成される ものとする.

物体を構成する四面体要素の慣性テンソルは以下の 手順によって求められる.まず,図-2のように,物体 全体の重心点から n 番の四面体要素の1つの頂点 C_n までのベクトルを r_n とする.また,頂点 C_n を基準と して,その四面体を構成する他の3つの頂点までのベ クトルを $a_{n,1}$, $a_{n,2}$, $a_{n,3}$ とする.すると,頂点 C_n を中心とする四面体の慣性テンソル I_n の成分 $I_{n,i,j}$ は 次式で得られる.

$$I_{n,j,k} = A_{i,i}^n \delta_{jk} - A_{j,k}^n \tag{16}$$

ここで, δ_{jk} はクロネッカーのデルタであり,スカラー

 $A_{i,k}^n$ は次式で与えられる.

$$A_{j,k}^{n} = \rho_{n} \int \int \int x_{j} x_{k} dx_{1} dx_{2} dx_{3}$$

= $6M_{n} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\alpha_{1}} \int_{0}^{1-\alpha_{1}-\alpha_{2}}$
 $\left(\sum_{s=1}^{3} \alpha_{s} a_{n,s,j}\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^{3} \alpha_{t} a_{n,t,k}\right) d\alpha_{1} d\alpha_{2} d\alpha_{3}$
= $\frac{M_{n}}{20} \sum_{s,t=1}^{3} a_{j}^{n,s} a_{k}^{n,t} (1+\delta_{st})$ (17)

ここに, $\rho_n \ge M_n$ はそれぞれ四面体要素の密度と質量であり, $a_{n,i,j}$ (i, j = 1, 2, 3)はベクトル $a_{n,i}$ の成分である、以上より,頂点 C_n から四面体の重心までのベクトルを r_c とすると,四面体要素の重心点を基準とする慣性テンソル I_{tn} は次式のように表される.

$$\boldsymbol{I}_{tn} = \boldsymbol{I}_n - M_n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_c) \tag{18}$$

ここで,F(r)は,ベクトルrの成分 r_i から構成される以下のようなテンソルである.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_2 r_1 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & r_1^2 + r_2^2 \end{bmatrix}$$
(19)

さらに,物体の重心点を基準とする慣性テンソル I_{0n} は次のように求められる.

$$\boldsymbol{I}_{0n} = \boldsymbol{I}_{tn} + M_n \boldsymbol{F} (\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_n)$$
(20)

これより,物体の慣性テンソルは四面体要素数が N で あるとすれば,次式から計算される.

$$\boldsymbol{I} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{I}_{0n} \tag{21}$$

(4) 四元数を用いる Euler の運動方程式の表記

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{I}^{-1} \Big[R^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega} \Big]$$
(22)

上式右辺に含まれるベクトル $R^{-1}N$ を四元数を用い て表記する.四元数は,回転軸方向に向かう単位ベク トル $n = (n_1, n_2, n_3)$ と回転角 θ が与えられたとき, 次のように定義される.

$$\boldsymbol{q}(\theta, \boldsymbol{n}) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, n_1 \sin\frac{\theta}{2}, n_2 \sin\frac{\theta}{2}, n_3 \sin\frac{\theta}{2}\right) \quad (23)$$

 $R^{-1}N$ は,四元数pを用いて次のように表される.

$$R^{-1}\boldsymbol{N} = H(\boldsymbol{p}) \tag{24}$$

ここに, *H* は四元数から 3 次元ベクトルへの変換を 表す.四元数 *p* の成分が (*a*, *b*, *c*, *d*) で与えられるとき, w = H(p) により,ベクトルwの成分は(b, c, d)と定められる.式(24)の四元数pは次式から計算される.

$$\boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{q}}(\alpha, \boldsymbol{s}) \ \boldsymbol{N}_{q} \ \boldsymbol{q}(\alpha, \boldsymbol{s})$$
(25)

ここで,添字qはベクトルを四元数としたものを表し, $N = (N_1, N_2, N_3)$ に対して N_q は $(0, N_1, N_2, N_3)$ で 与えられる.また, α とsは初期姿勢から現在の姿勢 までの回転角と回転軸方向の単位ベクトルである.式 (25)の $\overline{q}(\theta, n)$ は, $q(\theta, n)$ の共役四元数を表す.以上 より,Eulerの運動方程式として,式(22)の別の表記 である次式を利用することができる.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{I}^{-1} \Big[H(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega} \Big]$$
(26)

(5) 物体の運動方程式の計算方法

物体の運動方程式のうち,特に Euler の運動方程式 の計算方法に着目すると,上記の式(22)あるいは式 (26)を用いる2つの解法が考えられる.ここでは前者 を計算法A,後者を計算法Bと呼ぶこととする.

計算法 A では,次のような手順で計算が行われる⁷⁾. まず,角加速度の定義式を離散化することにより,*n*+1 ステップの角速度を求める.

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1} = \boldsymbol{\omega}^n + \dot{\boldsymbol{\omega}}^n \Delta t \tag{27}$$

離散化方法としては,各種の高精度の手法があるが, ここでは簡単のため Euler 陽解法を用いて記述してい る.式 (27)の上付のnは,時間方向のステップ番号, Δt は1ステップの時間増分を表す.次に,次式から n+1ステップの角加速度を計算する.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} = \boldsymbol{I}^{-1}$$

$$\cdot \left[(R^{n+1})^{-1} \boldsymbol{N}^{n+1} - \boldsymbol{\omega}^{n+1} \times (\boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega}^{n+1}) \right] \qquad (28)$$

ここで,回転行列 R^{n+1} は,式 (13) を用いて,次式から計算する.

$$R^{n+1} = R^n + R^n Q(\boldsymbol{\omega}^{n+1}) \Delta t \tag{29}$$

以上の演算を繰り返して時間進行計算を行うのが計算 法 A である.

一方,計算法 B においても,最初に式 (27) により ω^{n+1} を計算する.次に,計算法 B では式 (26)を用い るので,回転行列 R^{n+1} を次式から求める.

$$(R^{n+1})^{-1} \mathbf{N}^{n+1} = H(\mathbf{p}^{n+1})$$
(30)

この p^{n+1} は以下のようにして求める.微小時間 Δt の間の回転角 θ と回転軸方向の単位ベクトルnは次式で計算される.

$$\theta = |\boldsymbol{\omega}_s^{n+1}| \ \Delta t \tag{31}$$



図-3 計算誤差の比較(時間と誤算の関係)

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{\boldsymbol{\omega}_s^{n+1}}{|\boldsymbol{\omega}_s^{n+1}|}$$
(32)

ここで, *ω*。は実空間座標における物体の角速度で あり, 以下のようにして求められる.

$$\boldsymbol{w}_{s}^{n+1} = H(\boldsymbol{q}(\alpha^{n}, \boldsymbol{s}^{n}) \boldsymbol{\omega}_{q}^{n+1} \, \overline{\boldsymbol{q}}(\alpha^{n}, \boldsymbol{s}^{n}))$$
(33)

この θ とnから構成される四元数 $q(\theta, n)$ を用いれば, 初期姿勢からn+1ステップの姿勢までの回転を表す 四元数 $q(\alpha^{n+1}, s^{n+1})$ は,次式のように表される.

$$\boldsymbol{q}(\alpha^{n+1}, \boldsymbol{s}^{n+1}) = \boldsymbol{q}(\theta, \boldsymbol{n}) \ \boldsymbol{q}(\alpha^n, \boldsymbol{s}^n)$$
(34)

このようにして得られる四元数を用いて, p^{n+1} は次 式から計算される.

$$\boldsymbol{p}^{n+1} = \overline{\boldsymbol{q}}(\alpha^{n+1}, \boldsymbol{s}^{n+1}) \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{q}}^{n+1} \boldsymbol{q}(\alpha^{n+1}, \boldsymbol{s}^{n+1}) \quad (35)$$

以上が計算法 B の計算手順である.

上記の2つの計算法の相違は,計算法Aでは式(29) の計算において離散化誤差が入り込み,回転行列の直 交条件が成り立たなくなる可能性があるのに対し,計 算法Bでは離散化が行われていないので,計算精度が 比較的高いと考えられる点である.後述部分では,2 つの計算法における計算精度の比較を行う.

3.計算例と結果に関する考察

上記の計算法Aと計算法Bの精度の比較を行う.図-3に示される四面体に一定の角速度を与えて計算を行った.この計算では,物理量は無次元化されているものとして扱う.図-3において原点に位置する四面体の頂点に着目し,座標3成分の理論値と計算値との差の二乗和を求め,その平方根を計算誤差erとした.



図−4 計算誤差の比較 (△t と誤算の関係)



図-5 四面体の回転運動

図-4 は角速度 $\omega = 10$,時間増分 $\Delta t = 10^{-5}$ の場 合の各計算法の誤差を示している.図-4 に示されるように,計算法 A では 10^{-3} 程度と誤差が大きいが,計 算法 B の誤差は丸め誤差程度であることがわかる.次 に,図-5 は角速度を $\omega = 10$ という一定の値とし,時 刻 t = 10 における誤差と Δt の関係を示したものであ る.図-5 に見られるように,計算法 A では Δt を大き くとると急激に誤差が増加するのに対して,計算法 A では Δt を大きくしても誤差が増加せず,計算精度の 点で優れていることが確認できる.本報の以下の計算 では,計算法 B を用いている.



図-6 流体中を回転を伴いながら浮上する4つの 四面体要素から構成される物体

4.解法の適用性に関する基本的な検討

(1) 回転浮上する物体

4個の四面体から構成される物体が流体中を浮上す る場合の計算を行った.四面体はいずれも同一の形状 と物性値を有し,これらは原点で結合されていて,相 互の位置関係は変化しない.原点から四面体最遠点ま での長さは 0.15 m であり,比重は 0.7 cある.周囲 の流体は比重 1,動粘性係数 $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ として いる.この流体が満たされた断面の縦横が 0.4 m であ るダクト内において,上記の物体を底面付近に静止す る状態から解放したときの物体運動と周囲流体の計算 を行った.重力加速度は 9.8 m/s^2 としている.

計算結果を図-6 に示す.これらは,上から順に運動 開始から0.6,0.8,1.0秒後の結果である.上方から見 ると四面体の3面は非対称な形状であるため,各面付 近の流速が異なり,圧力分布が生じる.その結果,物 体は回転運動を伴いながら浮上する.このように,物 体周囲の流れに起因する流体力が考慮された,回転を 伴う物体運動が計算可能であることが確認された.



図-7 沈降する直方体の鉛直方向速度

(2) 流体中を沈降する直方体

各辺の長さが 48 mm × 18.5 mm × 10.8 mm, 比重 が 1.25 である直方体が水中を沈降する現象を対象とし た実験と数値計算を行った.直方体は 6 つの四面体要 素から構成される.実験では,内寸が 90 mm × 180 mm のダクト内において,直方体の最も大きい面がほ ぼ水平となる初期状態から自由落下させた.

図-7 に直方体の鉛直方向速度 v_3 の実験値と計算値 を比較した結果を示す.実験ではダクト長の制限のた め, $t \approx 2.0$ (s) までの値が得られている.実験では 直方体のビデオ画像から速度を算出しているため,ば らつきが大きいが,落下開始から約 0.5 秒後に約 0.18 m/s のほぼ一定の沈降速度を示す.その後,直方体の 姿勢が変化するため,速度の変動が見られる.

数値計算では,直方体の初期姿勢は完全な水平状態 とした.計算による直方体の姿勢は, $t \approx 1.5$ (s)まで はほとんど変化せず,終端速度を保ちながら沈降した. この終端速度は実験結果とほぼ一致している.一方, 沈降過程後半の直方体の挙動に相違が見られたが,こ れは実験では初期姿勢が完全に水平ではないこと,ま た計算セル分割数が $20 \times 20 \times 40$ と物体のスケールと 比較して粗いため,体積評価の際に微小な姿勢変化が 十分に捉えられなかったことなどが原因と考えられる. なお,計算時間は,Pentium III (2GHz)を CPU とす る一般的な PC で約 40 分であった.

図-8は,直方体の初期姿勢を大きく傾けて沈降させ た場合の計算結果を0.225秒ごとに重ねて表示したも のである.初期姿勢を変化させると,この結果のよう に,実験における直方体の沈降過程後半で観察された 変動が再現される.



図-8 水中を沈降する直方体

5.おわりに

本報では,任意形状物体を四面体要素を用いて表現 し,物体に対する Eulerの運動方程式を精度良く計算 する方法を提案した.この解法を 3D MICS に導入し, いくつかの計算例と実験結果を用いた検証を行った.

謝辞:実験にご協力頂きました牧野統師氏 (社会基盤 工学専攻修士課程) に謝意を表します.

参考文献

- 清水義彦,岩井明彦,長田健吾.個別要素法と流れの数値 解析を組み合わせた高濃度平衡流砂場の数値計算.水工 学論文集, Vol. 47, pp. 559–564, 2003.
- 2) 重松孝昌,小田一紀,田野雅彦,廣瀬真由. 個別要素法に よる水中沈降粒子群の3次元挙動に関する研究. 海岸工 学論文集, Vol. 47, pp. 996–1000, 2000.
- 3) 五十里洋行,後藤仁志,角哲也. 自然調節型洪水吐きの流 木による閉塞機構に関する計算水理学的研究.水工学論 文集, Vol. 50, p. 133, 2006.
- 4) 牛島省,山田修三,藤岡奨,禰津家久.3次元自由水面 流れによる物体輸送の数値解法(3D MICS)の提案と適 用性の検討.土木学会論文集,Vol.810/II-74, pp. 79–89, 2006.
- 5) 牛島省,牧野統師,禰津家久.水路を遡上する波動流れと 物体輸送に対する3次元多相場の数値解法(3D MICS) の適用性.応用力学論文集,Vol. 9, pp. 933–940, 2006.
- 6)藤岡奨,牛島省. 運動する任意形状物体を含む流れ場のmicsによる数値計算法.水工学論文集,Vol. 50, pp. 751-756,2006.
- 7)藤岡奨,牛島省,福谷彰.四面体要素を用いた接触を伴う剛体運動の数値計算法.応用力学論文集,Vol. 9, pp. 141-150,2006.
- 8) 森岡茂樹. 気体力学. 朝倉書店, 1982.

(2006.9.30 受付)