水工学論文集,第51巻,2007年2月

非圧縮性流体計算法(MACS)を用いた浅水流方程式による常射流の数値計算

NUMERICAL PREDICTION OF SUB− AND SUPER−CRITICAL FLOWS BY SHALLOW WATER EQUATIONS WITH MACS

牛島 省[1]・福谷 彰[2]・山下 英夫[3]・禰津 家久[4]
Satoru USHIJIMA, Akira FUKUTANI, Hideo YAMASHITA and Iehisa NEZU

[1] 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスタ)
[2] 学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスタ)
[3] 学生員 京都大学エネルギー理工学研究所 修士課程 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)
[4] フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスタ)

A computational method has been proposed for shallow water equations, which is based on the prediction method for incompressible fluids on collocated grid system. In the proposed method, called MACS (MAC method on Collocated grid for Shallow water equations), the momentum equations are discretized with a C-ISMAC method and the water depth h is treated implicitly. The continuity equation is also discretized implicitly and its numerical solutions for $\phi = h^{n+1} - h^n$ are obtained by solving simultaneous equations. The unit flow rates are corrected with the iterative computations based on the C-HSMAC method. The new treatment for the continuity equation is proposed and it enables us to predict dam-break problems, hydraulic jumps and sub- and super-critical flows stably and accurately without artificial diffusions.

KeyWords *: shallow water flow, collocated grid, incompressible fluid, numerical stability*

1．はじめに

浅水流方程式は，河川の不定流や氾濫流の計算に用いられる水工学上重要な方程式である．この方程式の数値解法に関する既往の研究では，段波や跳水などの不連続面を精度良く，しかも数値的に安定に求める解法を構築することに１つの焦点が置かれてきた．実用的な計算では，拡散係数を調整すれば不連続面が計算上問題になることは少ないとする考え方もあるが，水理条件の厳しい流れや，粘性項を含まない方程式の理論解に近い数値解が得られるような解法を検討することは重要な課題であると考えられる．

常流・射流域を含む不等流計算法として，これまでに MacCormack 法を用いる計算例[1),2)]や圧縮性流体に対して適用された FDS 法を浅水流方程式に用いる方法[3),4)]，TVD スキームを利用する解法[5)]，その他の解法などが数多く検討されている．また，水深を陰的に扱う解法[6),7),8)]が数値的安定性の点で有効であるという指摘もある．前報[9)]では，この陰的解法に着目し，コロケート格子上で提案された非圧縮性流体計算法を用いる解法を提案し，その精度や安定性を検討した．本報では，この解法の数値的安定性をさらに高める方策を提案し，ダムブレイク問題や跳水，常射流を含む流れなどの問題に対する適用性を検討する．

2．数値解析手法

前報[9)]で扱われた，浅水流方程式に対するコロケート格子配置を利用する非圧縮性流体計算法を短く表現するため，これを本報では MACS (MAC method on Collocated grid for Sallow water equations) と記すこととする．前報では MACS の有効性を確認するため，拡散項や底面摩擦項を省略した簡単な基礎式を用いたが，より実際の条件に近い流れを扱えるように，本報ではこれらの項を考慮した基礎式を利用する．これらの項が導入されることにより，運動方程式の陰的解法の部分には若干の変更が加わる．また，前報では MACS が陽的な解法よりも数値的に安定であることが示されたが，不連続性がより厳しい条件では安定性が失われる場合があった．このため，跳水現象などの常射流が混在する場でも安定に計算が行えるように，本報では連続式の解法に改良を加えた．上記の点を踏まえて，MACS の基礎式と数値解法を以下に示す．

(1) 基礎方程式

基礎式としては，2 次元浅水流方程式として示されている以下のような基本的な関係式を用いる．

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j M_i) = -gh\frac{\partial H}{\partial x_i} + D_i + F_i \tag{2}$$

式 (1) は連続式，式 (2) は運動方程式である．下添字 i, j は $1, 2$ という値を取り，縮約の規約に従うとする．t は時間，x_i は直交座標系の座標成分 ($i = 1, 2$) である．M_i は x_i 方向の単位幅流量で $M_i = u_i h$ と表され，u_i は水深方向に積分された x_i 方向の流速成分，h は水深である．また，g は重力加速度，H は基準面から測った水位であり，D_i と F_i はそれぞれ拡散項と境界面に作用する摩擦力などの外力を表す．

拡散項 D_i の具体的な形は，以下のようにした．

$$D_i = \nu_M \frac{\partial^2 M_i}{\partial x_j^2} \tag{3}$$

ここに，ν_M は拡散係数で，本報では定数とする．また，外力 F_i としては底面摩擦のみを考慮し，Manning の粗度係数 n を用いて次のように表されるとした．

$$F_i = -\frac{gn^2 U M_i}{h^{4/3}} \equiv \lambda M_i \tag{4}$$

ここに，$U = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ である．後述するように，上式右辺に含まれる M_i は，既往研究と同様に，Vasiliev の不安定を避けるため陰的に扱われる．

(2) 解法 (MACS) の概要

離散化された変数は，コロケート格子上で定義される．変数の定義位置は前報[9] と同様であり，水深 h と流速 u_i，単位幅流量 M_i はセル中心に配置される．保存形表示された移流項と拡散項を評価する場合や，後述する C-HSMAC 法の計算などでは，セル境界上に定義されたフラックスや水深 h_b，流速 u_{bi}，単位幅流量 M_{bi} が用いられる．空間内挿によりセル境界上の変数が求められる場合には，近接する 2 つのセル中心の変数を単純平均する．

MACS の計算手順は，コロケート格子上の 2 次元非圧縮性流体計算と同様に，予測段階，水位変化量 $\phi\ (= H^{n+1} - H^n)$ の計算段階，修正段階から構成される．このうち 2 番目の計算段階は，非圧縮性流体計算の場合の圧力変化量の計算段階に相当するもので，ϕ の方程式の残差を十分小さくするために C-HSMAC 法を用いるのが有効である．

予測段階の計算方法

MACS の予測段階では，セル中心における単位幅流量の推定値 M_i^* を求める．予測段階の計算に陽的な解法を用いる場合には，前報[9] で示したように，CBP スキーム[10] に基づいて，水位勾配と外力項が除かれた運動方程式から M_i^* が計算される．一方，陰的な解法である C-ISMAC 法[11] を利用する場合には，2 次元非圧縮性流体計算法と同様に，水位勾配と外力項を含めた CCP スキーム[10] を利用して M_i^* を求め，得られた M_i^* からこれらの 2 項を取り除いてセル境界に空間内挿し，セル境界で改めて水位勾配と外力項を考慮する，という手順を取る．以下に上記の計算で用いられる関係式を示す．

C-ISMAC 法に基づき，陰的に離散化された関係式は次のように表される．

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i^n - gh^n \frac{\partial H^n}{\partial x_i} \Delta t - gn^2 \frac{U^n M_i^n}{(h^n)^{4/3}} \Delta t \\ &\quad - \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^n M_i^*) + (1-\alpha) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^n M_i^n) \right] \Delta t \\ &\quad + \nu_M \left[\beta \frac{\partial^2 M_i^*}{\partial x_j^2} + (1-\beta) \frac{\partial^2 M_i^n}{\partial x_j^2} \right] \Delta t \end{aligned} \tag{5}$$

ここに，α と β は，$0 \le \alpha, \beta \le 1$ の範囲にある定数で，両者が 0 のときには陽的に M_i^* が計算され，1 のときには完全陰解法により M_i^* が求められる．パラメータ α と β は独立に設定できるので，数値的安定性に関して移流が支配的であるか，あるいは拡散が支配的かに応じて，それらの値を適当に設定して安定化を図ることができる．なお，式 (5) 右辺第 2，3 項の水位勾配と外力項はセル中心で評価される．

C-ISMAC 法では，M_i^* を n ステップの単位幅流量 M_i^n とそれからの偏差 $\tilde{M}_i$ の和として，次式のように表す．

$$M_i^* = M_i^n + \tilde{M}_i \tag{6}$$

これを式 (5) に代入すると，$\tilde{M}_i$ に関する次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} &\tilde{M}_i + \alpha \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^n \tilde{M}_i) \Delta t - \beta \nu_M \frac{\partial^2 \tilde{M}_i}{\partial x_j^2} \Delta t \\ &\quad = -\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^n M_i^n) \Delta t + \nu_M \frac{\partial^2 M_i^n}{\partial x_j^2} \Delta t \\ &\quad\quad - gh^n \frac{\partial H^n}{\partial x_i} \Delta t - gn^2 \frac{U^n M_i^n}{(h^n)^{4/3}} \Delta t \end{aligned} \tag{7}$$

C-ISMAC 法は，Δ 型陰解法[12] と同様に，定常解あるいは時間スケールが Δt と比較して十分長い非定常解を高次精度で求めることを目的とするもので[11]，式 (7) のうち $\tilde{M}_i$ を含む項の空間方向の離散化に 1 次風上差分などの低次スキームを用い，M_i^n を含む項に高次精度スキームを適用する．数値解が定常解に近づいた場合，あるいは準定常と見なせるような時間スケールの大きい現象を計算対象とする場合には，式 (6) において $\tilde{M}_i \approx 0$ となるので，高次精度の数値解が得られる．一方，$\tilde{M}_i$ を含む項には低次スキームを用いるので，陰的な離散化式が容易に導出できるという利点がある．

式 (7) の離散化式は未知変数 $\tilde{M}_i$ の連立 1 次方程式となる．$\tilde{M}_i$ を含む項は低次スキームにより離散化さ

れているので，係数行列は対角行列に近い疎な行列となる．また，$\tilde{M}_i$ は通常 0 に近い値となるので，初期値を 0 とすれば比較的軽い計算で収束解を求めることができる．このため，本報では式 (7) の解法として SOR 法を用いた．

このようにして数値解 $\tilde{M}_i$ を求めた後，式 (6) により M_i^* を求める．そして，C-ISMAC 法では次式により M_i^* から水位勾配と外力項を取り除いたセル中心の推定値 M'_i を求める．

$$M'_i = M_i^* + gh^n \frac{\partial H^n}{\partial x_i}\Delta t + gn^2 \frac{U^n M_i^n}{(h^n)^{4/3}}\Delta t \tag{8}$$

得られた M'_i をセル境界に空間内挿したものを M'_{bi} とする．M'_{bi} にセル境界上で水位勾配と外力項を評価して，セル境界で定義される単位幅流量の推定値 M_{bi}^* を次式のように定める．

$$M_{bi}^* = M'_{bi} - gh^n \frac{\partial H^n}{\partial x_i}\Delta t - gn^2 \frac{U^n M_i^n}{(h^n)^{4/3}}\Delta t \tag{9}$$

式 (9) 右辺第 2，3 項は，式 (7) を計算する場合と異なり，セル境界で評価される．

以上のようにして，予測段階の計算が完了し，次の水位変化量 ϕ の計算段階に移る．なお，本報では式 (7) の両辺に含まれる移流項と拡散項を有限体積法により離散化した．左辺の移流項には 1 次精度の風上法を用い，右辺の移流項の計算には 3 次の MUSCL スキームと 5 次精度の TVD スキーム [13] のいずれかを選択できるものとした．また，拡散項に対しては，2 次精度の離散化法を共通に用いている．

水位変化量 ϕ の計算段階

式 (9) では右辺第 2 項の水位勾配は H^n を用いて評価されているが，MACS では，前報 [9] のように，H^{n+1} を用いて M_{bi}^{n+1} を求める次の関係式を利用する．

$$\begin{aligned} M_{bi}^{n+1} = M'_{bi} - gh^n \frac{\partial H^{n+1}}{\partial x_i}\Delta t \\ - gn^2 \frac{U^n M_i^n}{(h^n)^{4/3}}\Delta t \end{aligned} \tag{10}$$

式 (10) から式 (9) を辺々差し引くと，次の関係が得られる．

$$M_{bi}^{n+1} = M_{bi}^* - gh^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Delta t \tag{11}$$

ϕ は 1 ステップ間の水位の変化量であるが，本報では河床変動は考えないので，1 ステップの水深の変化量 $h^{n+1} - h^n$ に等しい．

式 (1) で与えられる連続式に M_{bi}^{n+1} を用いて次のように陰的に離散化する．

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \frac{\partial M_{bj}^{n+1}}{\partial x_j} = 0 \tag{12}$$

式 (12) に式 (11) を代入すると，式 (12) の左辺第 1 項の分子が ϕ と表されることを考慮すれば，次の ϕ の関係式を得る．

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = \frac{\gamma}{\Delta t}\phi + \gamma D \tag{13}$$

ここに，$\gamma = 1/(gh^n \Delta t)$ および $D = \partial M_{bi}/\partial x_i$ である．

C-HSMAC 法により，式 (13) の解 ϕ を M_{bi} を修正しながら計算する．最初に，次式により D^k を求める．変数の上添え字の k は C-HSMAC 法の反復回数を表す．

$$D^k = \frac{\partial M_{bi}^k}{\partial x_i} \tag{14}$$

M_{bi}^k の初期値には式 (9) で与えられる M_{bi}^* を用いる．この D^k を用いて，式 (13) から ϕ を求める．次に，得られた ϕ を用いて，次式より M_{bi}^{k+1} を求める．

$$M_{bi}^{k+1} = M_{bi}^* - gh^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Delta t \tag{15}$$

収束判定は，たとえば M_{bi}^{k+1} から計算される D^{k+1} を用いた次式の残差 ϵ を用いて，すべての計算セルから得られる ϵ の 2 乗和がしきい値 ϵ_0 以下となる条件とする．

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\Delta t}\phi + \alpha D^{k+1} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} \tag{16}$$

もし，収束解が得られていなければ，D^{k+1} を D^k として，再び式 (13) の計算を行う．

なお，本報では離散化された式 (13)，すなわち未知変数 ϕ の連立 1 次方程式の数値解は，BiCGSTAB 法により求めるものとした．

水深 h^{n+1} の計算方法

前報 [9] では，水深 h^{n+1} は上記の C-HSMAC 法の収束解が得られた時点で，次式から計算されるとした．

$$h^{n+1} = h^n - D^{k+1}\Delta t \tag{17}$$

これに対して，本報では，数値的な安定性を高めるため，前報と異なる以下のような解法を新たに導入する．

まず，式 (1) で与えられる連続式を次のように表す．

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + h \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{18}$$

上式の左辺第 2 項は非保存形表示された移流項と同じ形をしている．この移流項のみから計算される水深を h_1 とおき，h_1 と移流項の関係として，次の陽的な離散式を考える．

$$\frac{h_1 - h^n}{\Delta t} + u_i \frac{\partial h^n}{\partial x_i} = 0 \tag{19}$$

式 (18) も同様に Euler 陽解法により離散化すると，

$$\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta t}-\frac{h_1-h^n}{\Delta t}+h^n\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{20}$$

という関係が得られるので，ここで求めたい h^{n+1} は次式から計算されることになる．

$$h^{n+1}=h_1-h^n\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Delta t \tag{21}$$

連続式から h^{n+1} を計算する際に，前報[9] のように，保存形表示された式 (17) を用いて，セル境界上の単幅流量 M_{bi}^{n+1} から h^{n+1} を求めれば流体の保存性が精度良く満足される．しかし，本報では，保存性よりも数値的な安定性を向上させることを重視して，式 (19) のように非保存形表示された関係式を利用することとした．式 (19) を計算する際の具体的な手順は以下のとおりである．

- セル中心で定義される流速 u_i は，C-HSMAC 法により得られたセル境界上の M_{bi}^{n+1} を単純平均して，セル中心の h^n で除して求める．
- 式 (19) 左辺第 2 項の h^n の勾配は 1 次風上差分か中央差分により評価する．
- 上記で中央差分を用いる場合には，計算された h_1 に対して，通常の移流方程式の計算と同様に，MMT フィルタ[14] を適用する．

一方，式 (21) 右辺第 2 項を評価する際には，セル中心の h^n を単純平均してセル境界上の水深を求め，C-HSMAC 法により得られたセル境界上の M_{bi}^{n+1} をこれで除することによりセル境界上の流速を求める．この流速を用いて $\partial u_i/\partial x_i$ を計算する．

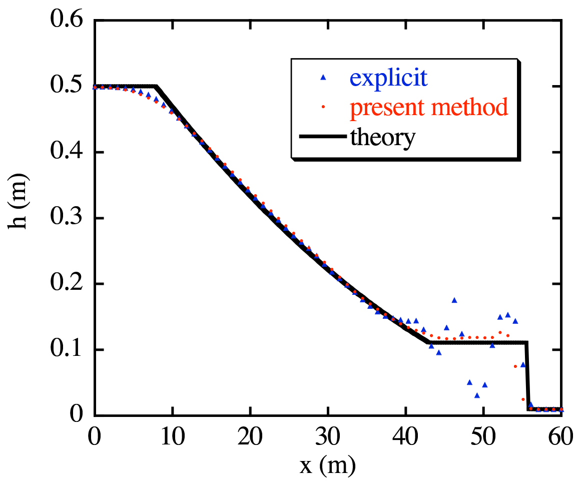
修正段階の計算

セル中心で定義される $n+1$ ステップの単位幅流量 M_i^{n+1} は，予測段階で得られた推定値 M'_i に，上記で得られた h^{n+1} および H^{n+1} を用いる水位勾配と，底面摩擦項を考慮することで求められる．このうち，底面摩擦項は，既往研究と同様に部分的に陰的に扱われるものとした．すなわち，

$$M_i^{n+1}=M'_i-gh^{n+1}\frac{\partial H^{n+1}}{\partial x_i}\Delta t \\ -\theta\lambda M_i^{n+1}\Delta t-(1-\theta)\lambda M_i^n\Delta t \tag{22}$$

ここで，θ は $0\le\theta\le 1$ なる係数である．式 (22) より，M_i^{n+1} は次式から計算される．

$$M_i^{n+1}=\frac{1}{1+\theta\lambda\Delta t}\Big[M'_i-gh^{n+1}\frac{\partial H^{n+1}}{\partial x_i}\Delta t \\ -(1-\theta)\lambda M_i^n\Delta t\Big] \tag{23}$$



図–1 ダムブレイク問題の計算結果 (流下方向計算セル数は 60)

以上のようにして，h^{n+1} と M_i^{n+1} が得られるので，境界条件を適切に設定した後，所定の時間まで同様の時間進行の計算が繰り返される．

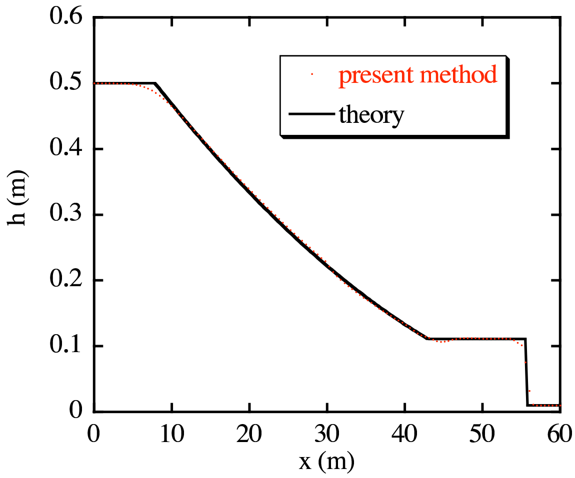
3．MACS による常射流の計算

(1) ダムブレイク問題

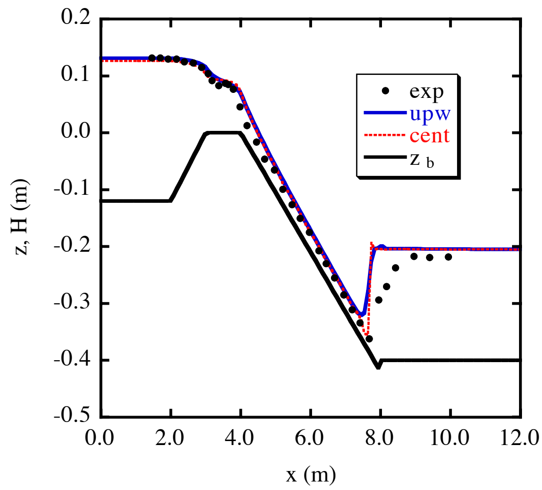
最初に，MACS を 1 次元ダムブレイク問題に適用した．計算対象は，上流側水深 0.5m，下流側水深 0.01m，流下方向長さ 60m の静止水がダムブレイクする問題である．重力加速度は 9.8m/s^2 としている．計算は t=10 (s) まで行い，流下方向の計算セル数を 60 および 120 とした計算結果をそれぞれ**図–1** と**図–2** に示した．

図–1 中の explicit は，本報の解法に対して ϕ の連立 1 次方程式の求解を行わず，運動方程式が陽的に離散化された条件における計算を表す．この計算結果では，下流領域に大きな数値振動が発生している．一方，**図–1** 中の present method は MACS による計算結果を表す．運動方程式の予測段階の計算には，パラメータを $\alpha=\beta=1$ とした C-ISMAC 法を用い，移流項の計算には 3 次の MUSCL 法を用いた．また ϕ の関係式に対しては C-HSMAC 法を用いた．MACS による計算結果には若干の振動が見られるが，陽的解法と比較すれば十分安定な解が得られている．

図–2 は，計算セル数を 120 として，MACS を用いた場合の計算結果である．陽解法では，この条件では計算が不安定となり，数値解は得られなかった．**図–2** に示されるように，格子分解能を高めることにより数値振動も少なくなり，理論解に近い数値解が得られている．



図–2 ダムブレイク問題の計算結果 (流下方向計算セル数は 120)



図–3 跳水計算の結果 (実験結果は文献[1] による．図中で upw= 風上差分，cent= 中央差分)

(2) **跳水現象**

跳水現象への適用性を確認するため，開発土木研究所で行われた実験結果に対する計算を行った．対象とする実験条件は，崇田ら[1] が MacCormack 法の適用性を確認するために用いた条件のうち，完全越流するケースである．

計算では，単位幅流量は 0.07971 $\mathrm{m^2/s}$ とし，下流端水深を 0.1949 m とした．水路床の粗度係数は 0.01 である．計算セルの流下方向の長さ Δx は 0.1 m とし，時間ステップ Δt を $1.0{\times}10^{-2}$ s として，適当な初期水面形から 100 秒まで時間進行計算を行った．

運動方程式の計算には C-ISMAC 法を用い，パラメータは $\alpha = \beta = 1$ とした．移流項の計算には 3 次の MUSCL スキームを用い，ϕ の計算には C-HSMAC 法を用いた．なお，解法の数値的な安定性を確認するため，この計算では拡散係数は 0 としている．

図–3 に計算結果を示す．図中には，水深 h^{n+1} を求める計算に風上差分と中央差分を用いた場合の結果が示されている．いずれの解法でも計算は安定に進められ，定常解が得られた．2 つの計算結果のうち，中央差分を用いて得られた水面形では，跳水部分の不連続性がより明瞭に得られているが，下流側にわずかなオーバーシュートが見られる．以上のように，MACS により，人工粘性の導入を行わずに，跳水現象の計算が可能であることが示された．なお，実験結果との相違は，浅水流方程式では跳水部分の内部流動が再現できないことや，この計算では拡散効果を無視していることなどが原因と考えられる．

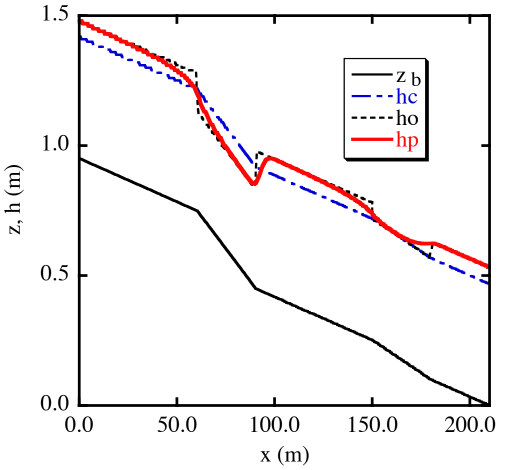
(3) **勾配が変化する水路の流れ**

常射流が混在する複雑な流れへの適用性を検討するため，路床勾配が変化する水路内の水面形の計算を行った．ここでは，西本ら[3] と同様の条件を用いた計算を行った．この条件では，水路床勾配は上流から順に 1/300，1/100，1/300，1/198，1/300 と設定され，上流端の単位幅流量 1.0 $\mathrm{m^2/s}$，マニングの粗度係数 0.02 が与えられている．また，下流端水深は等流水深に固定されている．**図–4** の限界水深と等流水深の関係に示されるように，水路床勾配は上流から順に緩勾配，急勾配，緩勾配，限界勾配，緩勾配に相当している．

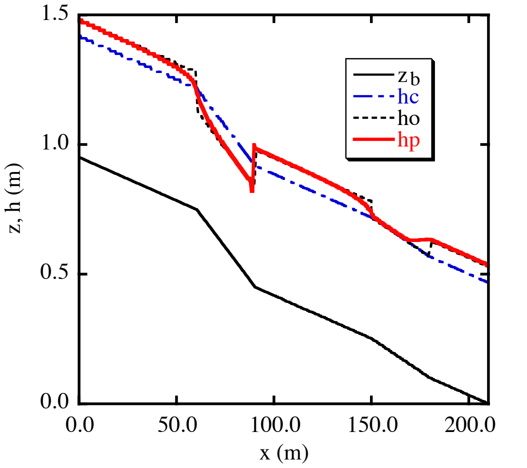
計算では，流下方向のセル幅 Δx を 0.6 m と設定した．時間ステップ Δt を $2.0{\times}10^{-2}$ s とし，勾配 1/300 における等流水深を初期初期条件として，800 秒まで時間進行計算を行った．**図–4** に示される h_p は，水深 h^{n+1} を求める計算に風上差分を用いた場合の結果である．急勾配から緩勾配に変化する位置で跳水が計算されており，概ね適切に水面形が求められることが示されている．この計算では，拡散係数は 0 としており，人工的な粘性を加えなくても計算が安定に行えることが確認された．なお，水深計算には非保存形スキームを用いているため，計算領域全体で -1% から $+2\%$ 程度の単位幅流量の誤差が生じている．

図–5 の h_p は，水深の計算に中央差分を用いたときの結果である．拡散係数は 0 としている．水深計算に風上差分を用いた**図–4** の結果と比較すると，数値的な粘性が少ないため，水面形の変化がより明瞭に計算されている．跳水の前後では，若干の数値振動が見られるが，計算には支障無く，風上差分を用いた場合と同じ計算条件の下で安定に定常解が得られた．単位幅流量の誤差は風上差分の場合と同程度である．

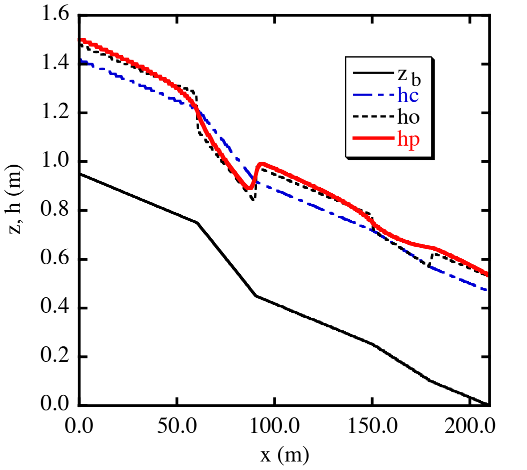
図–6 は，水深の計算に風上差分を用い，拡散係数を 2.0×10^{-4} $\mathrm{m^2/s}$ としたときの結果である．このように，MACS では高次微分項を扱うことが可能である．



図–4 水面形の計算 (風上差分，拡散係数は 0. z_b, h_c, h_0, h_p は順に水路床，水路床を基準とする限界水深，等流水深，計算結果)



図–5 水面形の計算 (中央差分，拡散係数は 0．記号は**図–4** と同様)



図–6 水面形の計算 (風上差分，拡散係数は 2.0×10^{-4} m^2/s．記号は**図–4** と同様)

4．おわりに

本報では，コロケート格子上で提案された非圧縮性流体計算法を用いて浅水流方程式を計算する方法について考察し，解法を跳水実験結果や常射流が混在する流れに適用してその有効性を確認した．

参考文献

1) 崇田徳彦, 清水康行, 渡邊康玄．MacCormack 法を用いた常・射流計算．開発土木研究所月報, No. 448, pp. 23–32, 1990.

2) 岡部健士, 天羽誠二, 石垣昌邦．常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について．水工学論文集, Vol. 36, pp. 337–342, 1992.

3) 西本直史, 森明臣, 板倉忠興, 金澤克己．FDS 法による 1 次元開水路流れの数値解析．土木学会論文集, No. 670/II-54, pp. 25–36, 2001.

4) A. K. Jha, J. Akiyama, and M. Ura. First- and second-order flux difference splitting schemes for dam-break problem. *J. Hydr. Eng. ASCE*, Vol. 121, pp. 877–884, 1995.

5) 河村三郎, 中谷剛．TVD-MacCORMAC 法による常・射流混在流の数値計算法．水工学論文集, Vol. 37, pp. 763–768, 1993.

6) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志．CIP 法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発．水工学論文集, Vol. 42, pp. 1159–1164, 1998.

7) 横山洋, 清水康行．CIP 法を用いた急勾配複断面蛇行水路の数値計算．水工学論文集, Vol. 45, pp. 601–606, 2001.

8) 川崎浩司, 小野稔和, Napaporn Piamsa-Nga, 熱田浩史, 中辻啓二．CIP 法と SMAC 法に基づく平面 2 次元氾濫流モデルの構築．水工学論文集, Vol. 48, pp. 565–570, 2004.

9) 牛島省, 山下英夫, 藤岡奨, 禰津家久．コロケート格子上の非圧縮性流体計算法に基づく浅水流方程式の数値解法．水工学論文集, Vol. 50, pp. 775–780, 2006.

10) 牛島省, 竹村雅樹, 禰津家久．コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察．土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11–19, 2002.

11) 牛島 省, 禰津 家久．陰解法を用いたコロケート格子による高次精度の流体解析手法の提案．土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 21–30, 2002.

12) B. R. Shin, T. Ikohagi, and H. Daiguji. An unsteady implicit SMAC scheme for two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *JSME International Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 598–606, 1993.

13) S. Yamamoto and H. Daiguji. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computers Fluids*, Vol. 22, No. 2/3, pp. 259–270, 1993.

14) S. Koshizuka, Y. Oka, S. Kondo, and Y. Togo. Interpolating matrix method : A finite difference method for arbitrary arrangement of mesh points. *J. Comput. Phys.*, Vol. 75, pp. 444–468, 1988.

(2006.9.30 **受付**)