

階段を流下する空気混入流中の 物体の抗力係数

A DRAG COEFFICIENT OF BODIES IN AERATED FLOW
ON STEPPED CHANNELS

高橋正行¹・安田陽一²・大津岩夫³
Masayuki TAKAHASHI, Youichi YASUDA and Iwao OHTSU

¹正会員 博(工) 助手 日本大学理工学部 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1-8)

²正会員 博(工) 教授 日本大学理工学部 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1-8)

³フェロー会員 工博 教授 日本大学理工学部 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1-8)

During a big flood in recent years, flood waters intruded into the staircase between ground and underground in an urbane area. Aerated flows are formed in the staircase. Drag force acts on bodies or human legs in a high-speed-aerated flow. The authors proposed a method for estimating the velocity and the depth on stepped channels. Flow resistance and total head in stepped channels were clarified under a wide range of angle of slope, step height, and drop height. On the basis of the flow characteristics of aerated flows, the expression for a drag coefficient on bodies in a high-speed-aerated flow can be reasonably presented. Also, the drag coefficient of a model leg is obtained using the previous results.

Key Words : stepped channel, staircase, aerated flow, drag force, void fraction, urban flood

1. まえがき

近年、市街地化された都市部で豪雨による地下街・地下室等の地下空間への浸水被害が増加している。地下空間への浸水が生じると、地上と地下空間とを結ぶ階段を氾濫水が流入し、高速の空気混入流となり、階段上の物体には流体力が作用する。また、階段を使用して避難しようとする人の脚部には流体力が作用し、歩行を阻害する要因となる。

石垣らは階段歩行者脚部に作用する流体力の計測を実物大階段部を作成して行った¹⁾。また、後藤らは粒子法を用いて、階段部の流れの数値計算を試み、階段歩行者に作用する流体力の評価を行った²⁾。さらに両者は、階段部での流れの流速評価を試みている。しかしながら、階段部の流れは飛沫を伴う空気混入流となっており、適切な水深と流速の評価はなされていない。

空気混入流中の物体の抗力係数を評価する場合、代表流速、代表水深、流体の密度を定める必要がある。

著者は階段状水路における空気混入流の特性について広範囲な傾斜角度、ステップ高さ、落差のことで解明をしてきた^{3)~5)}。また、空気混入流の空気混入率および流速の特性から断面平均流速、aerated flow depth、および全水頭を評価している^{4) 5)}。これらの知見を利用すると、

空気混入流中の物体や歩行者脚部の抗力係数の表示が可能となる。

ここでは、階段部での空気混入流の水理特性にもとづいた抗力係数評価方法を提示し、石垣らの階段歩行者脚部に作用する流体力の実験資料をもとに階段歩行者脚部の抗力係数を示した。

2. 階段部での流況

階段上の流況は相対ステップ高さ S / d_c (S :ステップ高さ, d_c :限界水深; $d_c = (q_w^2/g)^{1/3}$, g :重力加速度, q_w :水の単位幅流量) および水路傾斜角度 θ によって変化し、skimming flow (各隅角部で常に渦の形成が認められる流況), nappe flow (各ステップで常にエアーポケットが形成される流況), およびtransition flow に大別される(図-1参照)³⁾。

一般に、階段に流入した水のみの流れは乱流境界層が階段最上流部から発達し、乱流境界層が水面に到達した後に空気混入を開始する⁶⁾。さらに、流下するに伴って空気混入率が増加しながら飛沫を伴った white water (空気混入流) となり、十分な距離を流下すると空気混入率が一定とり、擬似等流状態³⁾となる(図-1参照)。

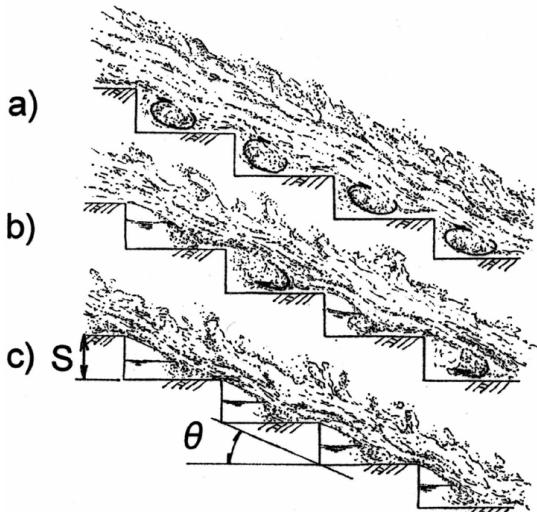


図 - 1 階段状水路に形成される流況
(a)skimming flow; (b)transition flow; (c)nappe flow

3. 空気混入流中の抗力係数の表示

一般に、抗力係数 C_D が普遍的な値となるように、代表流速 V を適切に選び、抗力係数を次式で定義している。

$$C_D = P / \frac{1}{2} \rho V^2 A$$

ここに、 A は流れ方向に投影した物体の面積、 P は抗力、 ρ は流体の密度である。

空気混入流中の物体に抗力が作用する場合、抗力係数の値が普遍的に定まるようない代表水深、代表流速、および流体の密度を選ぶ必要がある。

以下に、空気混入流中に柱状物体を置いた場合の抗力係数の表示について検討する。

空気混入流中の柱状物体に作用する抗力 F について、空気混入率の変化を密度変化として表現し、運動エネルギーが圧力に変換されるものと解釈し、次のように表示することとする。

$$F = C_f \int_0^{y_{0.9}} \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 b dy \quad (1)$$

ここに、 C_f は(1)式の仮定と実際との違いを補正する係数、 \bar{u} はaerated flowの流速、 b は柱状物体の幅、 $y_{0.9}$ はaerated flow depthと呼ばれ^{5), 10)} $C = 0.9$ となるときの y の値、 y は仮想底面に垂直方向の座標(図 - 2参照)、 C は空気混入率($C = \text{空気量} / (\text{水の量} + \text{空気量})$)、 ρ は空気混

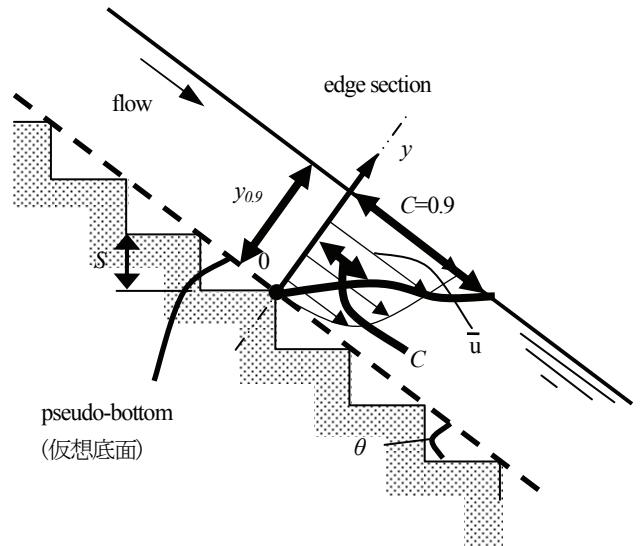


図 - 2 定義図

入流の密度 ($\rho = (1-C) \rho_w$)、 ρ_w は水の密度である。

また、 $Y = y / y_{0.9}$ および $U = \bar{u} / u_{0.9}$ を用いると(1)式は次のように示される。ここに、 $u_{0.9}$ は $y = y_{0.9}$ での \bar{u} である。

$$F = C_f \frac{1}{2} \rho_w u_{0.9}^2 b y_{0.9} \int_0^1 (1-C) U^2 dY \quad (2)$$

なお、aerated flow depth $y_{0.9}$ は $q_w = \int_0^{y_{0.9}} (1-C) \bar{u} dy$ を満足する水深として定められている^{5), 7), 10), 11)}。ここに、 q_w は流量測定堰から求められる水の単位幅流量である。

(1) 空気混入流の特性量を用いた抗力係数

空気混入流の特性量を考慮して代表長さにaerated flow depth $y_{0.9}$ 、代表流速に空気混入流の断面平均流速 V_{ave} 、代表密度に断面平均密度 ρ_m を用いることとする。なお、 V_{ave} 、 ρ_m は次のように示される。

$$V_{ave} = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} \bar{u} dy = u_{0.9} \int_0^1 U dY \quad (3)$$

$$\rho_m = \frac{\int_0^{y_{0.9}} \rho \bar{u} dy}{\int_0^{y_{0.9}} \bar{u} dy} = \left(1 - \int_0^1 C dY \right) \rho_w \quad (4)$$

(2)式と(3)、(4)式から次式が得られる。

$$F = C_f K' \frac{1}{2} \rho_m V_{ave}^2 b y_{0.9} \quad (5)$$

$$\text{ここで、 } K' = \frac{1}{1 - \int_0^1 C dY} \frac{\int_0^1 (1-C) U^2 dY}{\left(\int_0^1 U dY \right)^2}$$

$$= \frac{\int_0^{y_{0.9}} \rho u^2 dy}{(\rho_m V_{ave} y_{0.9}) V_{ave}} \quad (6)$$

(6)式から K' はaerated flowの運動量とaerated flow depth $y_{0.9}$ 内の断面平均密度 ρ_m および断面平均流速 V_{ave} を用いた運動量との比を示すことが理解される。

代表流速に V_{ave} 、代表水深に $y_{0.9}$ 、および代表密度に ρ_m を用いた抗力係数 C_d を定義すると(7)式が示される。

$$C_d = F / \frac{1}{2} \rho_m V_{ave}^2 b y_{0.9} \quad (7)$$

(5)、(7)式から $C_d = C_f K'$ となり、(7)式で定義される抗力係数 C_d の意味が明確にされた。

(2) 水だけに換算した場合の特性量を用いた抗力係数

擬似等流状態のとき、5で述べるように水の単位幅流量 q_w 、水路傾斜角度 θ 、ステップ高さ S が与えられるとClear water depth d_w および平均流速 $V_w = q_w/d_w$ が容易に求められるため、ここでは水だけに換算した特性量を用いた場合の抗力係数について検討する。

空気混入流において水だけに換算した特性量を用いて抗力係数を定義するため、代表長さとして clear water depth d_w 、代表流速として水の単位幅流量 q_w および d_w から算定される断面平均流速 V_w 、代表密度として水の密度 ρ_w を用いることにする。clear water depth d_w は空気混入率の測定値を用いて次式より算定される。

$$d_w = \int_0^{y_{0.9}} (1 - C) dy \quad (8)$$

また、 V_w は水の単位幅流量 q_w を用いて次式から求まる。

$$V_w = q_w / d_w \quad (9)$$

(8)、(9)式を(2)式に代入して整理すると次のように示される。

$$F = C_f K \frac{1}{2} \rho_w V_w^2 b d_w \quad (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{1 - \int_0^1 C dY} \left\{ \frac{\int_0^1 (1 - C) dY}{\int_0^1 (1 - C) U dY} \right\}^2 \int_0^1 (1 - C) U^2 dY \\ &= \frac{\int_0^{y_{0.9}} \rho u^2 dy}{(\rho_w V_w d_w) V_w} \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式から K はaerated flowの運動量とclear water depth d_w 、平均流速 V_w 、および水の密度 ρ_w を用いた運動量との比を示すことが理解される。

代表流速に V_w 、代表水深に d_w 、代表密度に ρ_w を用いて

抗力係数 C_{d_w} を定義すると(12)式が示される。

$$C_{d_w} = F / \frac{1}{2} \rho_w V_w^2 b d_w \quad (12)$$

(10)、(12)式から $C_{d_w} = C_f K$ となり、(12)式で定義される抗力係数 C_{d_w} の意味が明確にされた。

(3) C_{d_w} と C_d との関係

(7)、(12)式より C_{d_w} と C_d との比が次のように示される。

$$\frac{C_d}{C_{d_w}} = \left(\frac{V_w}{V_{ave}} \right)^2 \quad (13)$$

V_{ave} / V_w については4で詳しく述べるが、 $\theta = 30^\circ$ 、 $S/d_c = 0.45 \sim 0.73$ の範囲では $V_{ave} / V_w = 1.05 \sim 1.06$ である。

4. 空気混入率分布および流速分布

階段上を通過する流れの空気混入率 C および流速 u の分布はBoes⁷、Yasuda and Chanson⁸、Ohtsu et al.⁹、高橋ら⁴によって示されている。ここでは、歩行用階段に多い傾斜角度 $\theta = 30^\circ$ を例として、相対ステップ高さ $S/d_c = 0.43, 0.73$ の空気混入率分布および流速分布特性についてBoesの測定値にもとづき検討する。

(1) 空気混入率分布

擬似等流状態における $R_e \geq 4.0 \times 10^4$ (R_e はレイノルズ数; $R_e = q_w / v_w$; v_w は水の動粘性係数)での空気混入率分布を次の関係^{9), 10)}で整理したものを図-3(a)に示す。

$$C = F \left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{S}{d_c}, \theta \right) \quad (14)$$

図-3(a)および(14)式に示されるように、一定の θ および $y/y_{0.9}$ に対して C が S/d_c によって変化している。

空気混入率分布は次式の気泡の拡散モデルを用いて近似できる¹¹⁾。

$$C = 1 - \tanh \left(k' - \frac{1}{2D'} \frac{y}{y_{0.9}} \right) \quad (15)-1$$

ここに、 D' は無次元化された乱流拡散係数であり、 k' は積分定数であり次のように示されている¹¹⁾。

$$k' = \tanh^{-1} \sqrt{0.1} + \frac{1}{2D'} \quad (15)-2$$

$$D' = \frac{0.848C_m - 0.00302}{1 + 1.1375C_m - 2.2925C_m^2} \quad (15)-3$$

なお、 C_m は断面平均された空気混入率であり、次式から求められる。

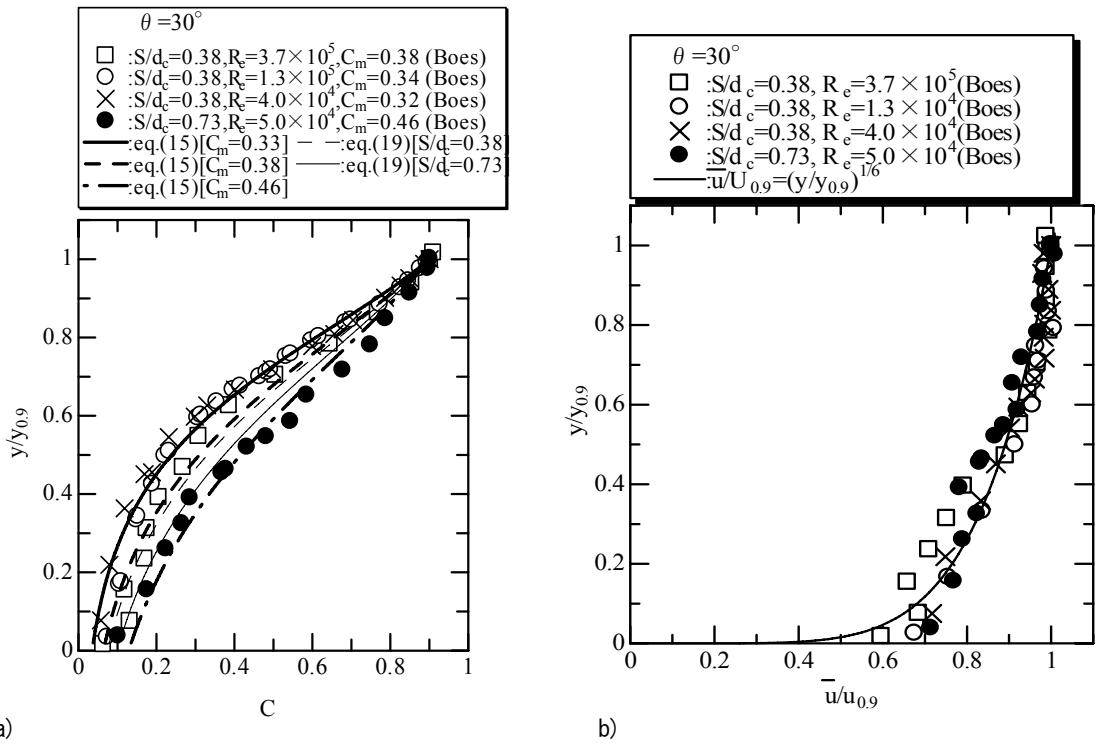


図 - 3 空気混入率分布および流速分布

$$C_m = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} C dy = \int_0^1 C dY \quad (16)$$

Boesの実測値によると $\theta = 30^\circ$, $S/d_c = 0.38, 0.73$ の断面平均空気混入率 C_m は $C_m = 0.32 \sim 0.46$ である。それらの C_m を(15)式に代入して描いたものが図 - 3(a) 中の各線(太線)である。図 - 3(a) に示されるように、気泡の拡散モデルは実験値の分布形状を示すことができている。

(2) 流速分布

図 - 3(b) に $0 \leq y / y_{0.9} \leq 1$ の流速分布を示す。空気混入流の流速分布は次式で示される $1/N$ 乗則によって近似できる^{4), 7), 8), 11)}。

$$\frac{\bar{u}}{u_{0.9}} = \left(\frac{y}{y_{0.9}} \right)^{\frac{1}{N}} \quad (17)$$

図 - 3(b) に示されるように、 $\theta = 30^\circ$ の流速分布は $1/6$ 乗則で近似される。

(3) V_{ave} / V_w の変化特性

V_{ave} / V_w は空気混入率分布と流速分布を用いて次式で示される⁵⁾。

$$\frac{V_{ave}}{V_w} = \frac{\left(1 - \int_0^1 C dY \right) \int_0^1 U dY}{\int_0^1 (1-C) U dY} \quad (18)$$

(18)式と空気混入率分布および流速分布から V_{ave} / V_w の

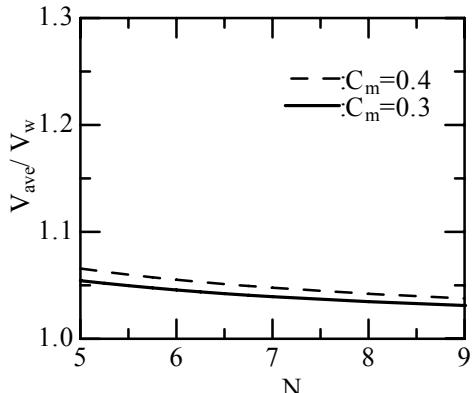


図 - 4 V_{ave}/V_w の N と C_m による変化

値が求まる。空気混入率分布は気泡の拡散モデルで近似でき、流速分布は $1/6$ 乗則で近似できることは前述した。ところで、気泡の拡散モデルを用いて空気混入率分布形状を知るためには、断面平均空気混入率 C_m を与える必要がある。著者は Skimming flow の擬似等流状態における C_m の実験式(19)を提案している³⁾。

$$C_m = -2.0 \times 10^{-4} \theta^2 + 2.14 \times 10^{-2} \theta - 3.57 \times 10^{-2} - 0.3 \exp \left\{ -5 \left(\frac{S}{d_c} \right)^2 - 4 \frac{S}{d_c} \right\} \quad (19)$$

ここに、 θ は degree で与えられている。

(15)式と(19)式から得られる空気混入率 C の分布を図 - 3(a) に示す。図 - 3(a) の細線で示されるように、計算値は Boes の実験値と概ね一致している。

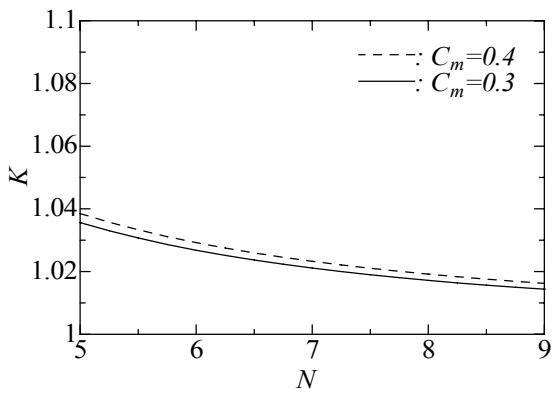


図 - 5 K の N と C_m による変化

(19)式から、水路傾斜角度 $\theta = 30^\circ$, $S/d_c = 0.43 \sim 0.78$ の C_m の値は $C_m = 0.38 \sim 0.40$ である。そこで、 $C_m = 0.3$ および 0.4 のとき $1/5$ 乗則から $1/9$ 乗則を対象に V_{ave}/V_w の値を求めた結果を図 - 4 に示す。図に示されるように、与えられた C_m に対して、 V_{ave}/V_w は N が大きくなるにつれて、小さくなる。また、与えられた N に対して、 C_m の変化に対する V_{ave}/V_w の変化は小さい。 $\theta = 30^\circ$, $S/d_c = 0.43 \sim 0.78$ の範囲での V_{ave}/V_w は $1.05 \sim 1.06$ の範囲である。

(4) K の変化特性

(11)式から空気混入率分布および流速分布形状が与えられると K の値が求まる。 $C_m = 0.3$ および 0.4 のとき $1/5$ 乗則から $1/9$ 乗則を対象に K の値を求めた結果を図 - 5 に示す。図に示されるように、与えられた C_m に対して、 K の値は N が大きくなるにつれて、小さくなり 1.01 に近づく。また、与えられた N に対して、 C_m の変化に対する K の変化は小さい。 $\theta = 30^\circ$, $S/d_c = 0.43 \sim 0.78$ の範囲での K は $1.02 \sim 1.03$ の範囲であり、 C_{d_w} に対する K の影響は小さい。

5. 抗力係数の算定

(12)式から抗力係数 C_{d_w} を算定するためには F , d_w , V_w が必要である。ここでは、 F の値として、階段部の空気混入流中に脚部模型を設置し、抗力の計測を行った石垣らの結果¹⁾を用いることとする。なお、石垣らの実験によって多くの歩行者が避難困難となったとされる相対ステップ高さ S/d_c を求めると $S/d_c \leq 0.75$ であり、その場合の流況は Skimming flow である。ここでは、歩行者が避難困難の場合を対象に脚部の抗力係数を算出することとする。

また、 d_w , V_w の値は Ohtsu et al. の方法³⁾を用いて算出することとする。以下に、clear water depth d_w および V_w の算出方法を紹介する。

Ohtsu et al. は Skimming flow の流況を対象に次に示す階段状水路の抵抗係数 f の定義を用い、 f を解明した³⁾。

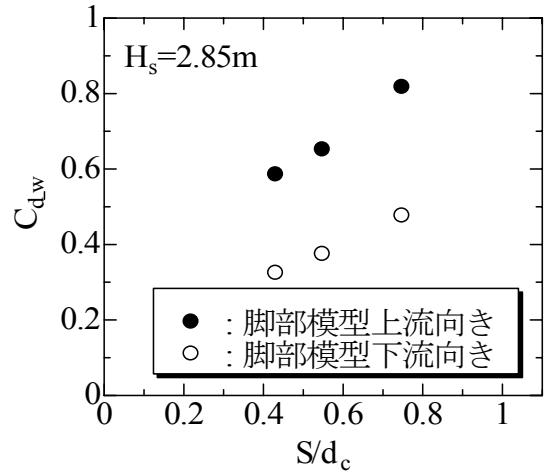


図 - 6 C_{d_w} の S/d_c による変化
(H_s : 階段最上部から脚部模型設置ステップまでの落差)

表 - 1 C_{d_w} の算定結果

S/d_c	0.43	0.55	0.73
f	0.167	0.173	0.173
d_w/d_c	0.36	0.36	0.36
V_w/V_c	2.8	2.8	2.8
$C_{d_w}(\bullet)$	0.59	0.65	0.82
$C_{d_w}(\circ)$	0.32	0.37	0.48

$\theta = 27^\circ$, $S = 0.15\text{m}$, ● : 脚部模型上流向き,
○ : 脚部模型下流向き

$$f = \frac{4\tau_0}{\frac{1}{2}\rho_w V_w^2} = 8 \left(\frac{d_w}{d_c} \right)^3 \sin \theta \quad (20)$$

ここに、 d_c は限界水深 $\left(d_c = \sqrt[3]{q_w^2/g} \right)$, τ_0 は仮想底面

(図 - 2) に作用しているとしている壁面せん断応力である。また、水路傾斜角度 $\theta = 19^\circ \sim 55^\circ$ での f の実験式は (21) 式で示されている³⁾。

$$f = f_{max} - 0.452 \left(0.5 - \frac{S}{d_c} \right)^2 \quad (21)-1$$

$$0.1 \leq S/d_c < 0.5$$

(21)-1 式中の f_{max} は (21)-2 式から求められる。

$$f_{max} = 2.32 \times 10^{-5} \theta^2 - 2.75 \times 10^{-3} \theta + 2.31 \times 10^{-1}$$

$$(\theta \text{ in degree}) \quad 0.5 \leq S/d_c \leq (S/d_c)_s \quad (21)-2$$

また、(21) 式中の $(S/d_c)_s$ は Skimming flow が形成される上限の相対ステップ高さの値であり、 $(S/d_c)_s = 7/6 * (\tan \theta)^{1/6}$ で求められる³⁾。

与えられた θ および S/d_c に対して、(21) より f が算定される。また、(20) 式より d_w/d_c が算定される。さらに、 V_w/V_c は $V_w/V_c = d_c/d_w$ より算定される。ここに、 V_c

は限界流速であり、 $V_c = q_w / d_c$ で求められる。

石垣らの実験における $\theta = 27^\circ$, $S = 0.15\text{m}$ の各相対ステップ高さ S / d_c に対する f , d_w / d_c , V_w / V_c および $C_{d,w}$ の算定結果を表-1に示す。表中の $C_{d,w}$ の値は石垣らの抗力 F の実験値を用いて算定されている。なお、脚部の幅 b は石垣らの実験¹⁾と同じ $b = 0.09\text{m}$ とする。また、 $C_{d,w}$ と S / d_c との関係を図-6に示している。図-6と表-1に示されるように、階段を昇る方向に脚が向いた場合の $C_{d,w}$ の値は $0.6 \sim 0.8$ であった。

水路傾斜角度 θ , ステップ高さ S , 単位幅流量 q_w (もしくは限界水深 d_c) が与えられると、得られた $C_{d,w}$ の値を用いて、脚部に作用する抗力 F を推定できる。本検討の範囲では抗力の実験資料が少なく、 $C_{d,w}$ の変化特性についてはさらなる検討が必要であろう。

7.まとめ

階段状水路の空気混入流の水理特性にもとづき、空気混入流中に置かれた物体の抗力係数の評価法を示した。これにもとづき、地下空間と地上を結ぶ階段を氾濫水が流下する場合を対象に、石垣らの資料を用いて避難者脚部の抗力係数を求めた。以下、得られた結果を要約する。

- ① 空気混入流の特性量として定義されている aerate flow depth y_{0g} と断面平均流速 V_{ave} を用いると、抗力係数 C_d は(7)式のように表示され、(7)式で定義される抗力係数 C_d の意味が明らかにされた。
- ② 従来の知見から求められる clear water depth d_w 、と水のみの単位幅流量 q_w および d_w から算定される平均流速 V_w を用いると、空気混入流中の物体の抗力係数 $C_{d,w}$ は(12)式のように表示され、(12)式で定義される抗力係数 $C_{d,w}$ の意味が明らかにされた。
- ③ 抗力係数 C_d と $C_{d,w}$ との関係は $C_d / C_{d,w} = (V_w / V_{ave})^2$ で示される。また、本検討の範囲では、 $V_{ave} / V_w = 1.05 \sim 1.06$ となり、 $C_d / C_{d,w} = 0.89 \sim 0.91$ となることを示した。
- ④ 空気混入流中の脚の抗力係数 $C_{d,w}$ は $C_{d,w} = 0.6 \sim$

0.8 となることを示した。この結果を用いると、水路傾斜角度 θ 、ステップ高さ S 、および単位幅流量 q_w を与えることによって階段上の歩行者脚部に作用する抗力を推定することが可能となった。

参考文献

- 1) 石垣泰輔、戸田圭一、馬場康之、井上和也、中川一：実物大模型を用いた地下空間からの避難に関する研究、水工学論文集、第50巻、pp.583 - 588、2006.
- 2) 後藤仁志、五十里洋行、酒井哲郎、谷岡弘邦：浸水時地下街階段登段者の脚部に作用する流体力評価に関する計算力学的アプローチ、水工学論文集、第50巻、pp.865 - 870、2006.
- 3) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of stepped channel flows, *Journal of hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.130, No.9, pp.860 - 869, 2004.
- 4) 高橋正行、安田陽一、大津岩夫：階段状水路における空気混入射流の特性、水工学論文集、第49巻、pp.829 - 834、2005.
- 5) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Energy head of aerated flows in stepped channels, *Proc. of IAHR Congress*, IAHR, Seoul Korea, pp.2890 - 2899, 2005.
- 6) Ohtsu, I., Yasuda, Y., Takahashi, M. : Discussion of onset of skimming flow on stepped spillways, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.127, No.6, pp.522-524, 2001.
- 7) Boes, R.M.: Zweiphasenströmung und Energieumsetzung auf Grosskaskaden., *Ph.D thesis*, ETH, Zürich, Switzerland, 2000. (In German.)
- 8) Yasuda, Y. and Chanson, H.: Micro- and macro-scoptic study of two-phase flow on stepped chute, *Proc. of the 30th IAHR Congress*, Theme D, Thessaloniki, Greece, pp.703 - 710, 2003.
- 9) Takahashi, M., Yasuda, Y., and Ohtsu, I.: Effect of Reynolds number on characteristics of stepped channel flows, *Proc. of the 31st IAHR Congress*, Seoul Korea, pp.2880 - 2889, 2005.
- 10) 高橋正行、安田陽一、大津岩夫：階段状水路の空気混入射流特性量に対するレイノルズ数の影響、水工学論文集、第50巻、pp.871 - 876、2006.
- 11) Chanson, H.: *The hydraulics of stepped chutes and spillways*, Balkema, Lisse, 2001.

(2006. 9. 30受付)