

レベルセット法による気泡運動の解析 — 水中を上昇する空気気泡 —

NUMERICAL ANALYSIS OF BUBBLE MOTION BY LEVEL-SET METHOD
--- AIR BUBBLE RISING IN WATER ---

月岡康一¹・由比政年²・石田 啓³

Koichi TSUKIOKA, Masatoshi YUHI and Hajime ISHIDA

¹正会員 工修 金沢大学大学院自然科学研究科環境科学専攻 (〒920-1192 金沢市角間町)

²正会員 博(工) 金沢大学助教授 大学院自然科学研究科 (〒920-1192 金沢市角間町)

³フェロー会員 工博 金沢大学教授 大学院自然科学研究科 (〒920-1192 金沢市角間町)

Air bubble rising in water is analyzed numerically by Navier-Stokes equation. To capture liquid-gas interface as well as to smooth large gap in density/viscosity, Level-Set method is applied. For typical bubbles of spherical, ellipsoidal and spherical-cap shape, rising velocities with their shapes are calculated, from the start of motion to the terminal steady state. And, their transitions of velocity and corresponding alterations in shape, are examined in detail. In one ellipsoidal case, cyclic alteration in shape, deviating over ellipsoidal regime, is confirmed. Terminal velocities and shapes, for the bubble of equivalent diameter from 1.2mm to 24.5mm, are compared with the existing experiments in distilled water. Good agreement was obtained in shapes, while terminal velocities of our two-dimensional analysis underestimated the corresponding experimental values by about 20 percent.

Key Words : numerical analysis, level-set, bubble, shape, ellipsoidal, terminal velocity.

1. はじめに

地球環境の保全が叫ばれるなかで、地表面の大半を占める海洋が、注目を浴びている。大気との界面では、砕波などで生じる気泡が気体輸送に貢献し、CO₂やO₂の吸収を促すと考えられ、現象解明をめざした研究が進んでいる。また、CO₂ガスを海中に吹き込み、気泡生成・溶解させる技術開発も行われている。一方、海洋汚染対策としてのエアープブルカーテン(月岡ほか¹⁾)や、湖沼浄化に有効な曝気手法の開発なども強く望まれている。

しかし、これらの問題で重要な役割を果たす「気泡」の挙動については、未解明の点が少なくない。今後、研究が進み、気泡のコントロールが可能になれば、その技術の活用により、汚染対策や曝気手法も、飛躍的に進歩するであろう。しかし、実際には、液体中の気泡群の挙動は複雑で、その取り扱いが容易ではない。

単一気泡が液体中を上昇する際の運動については、化学などの分野で、古くから実験的研究が行われている。Harberman and Morton²⁾は液体中を上昇する気泡の速度、形状などで貴重な成果を上げると共に、Morton数を導入した。Clift et al.³⁾は数多くの既往実験に基づき気泡・

水滴運動の全容を体系的にまとめた。その後もBhaga and Weber⁴⁾の砂糖溶液を使った研究などが報告されている。

一方、数値解析により気泡運動を研究する場合、気液界面の取り扱いが問題とされてきた。しかし、近年、Hirt and Nichols⁵⁾が界面大変形に対応できるVOF法を開発するなど、活発な動きが目立ってきた。Ryskin and Leal⁶⁾および高木ほか⁷⁾は、境界適合格子を用いて気泡の運動を解析した。Esmaceli and Tryggvason⁸⁾はFront-tracking法によりNavier-Stokes式を直接解析し、Takada et al.⁹⁾は統計熱力学にもとづく格子ボルツマン法の適用を進めている。さらに、Sussman et al.¹⁰⁾の研究以来、レベルセット法が注目を浴び、由比ほか¹¹⁾、Koebe et al.¹²⁾、坪郷ほか¹³⁾、Smolianski et al.¹⁴⁾などが基礎的研究に取り組んでいる。そこでは、気液界面の大変形を忠実に捕獲しつつ、高密度差を数値的に緩和処理できる。

本研究では、環境分野での、レベルセット法による気泡運動解析の実用化を目指し、その第一段階として、水中を上昇する単一空気気泡の運動を解析する。得られた上昇速度と気泡形状を既往研究と比較して、本手法の適用性を検証する。

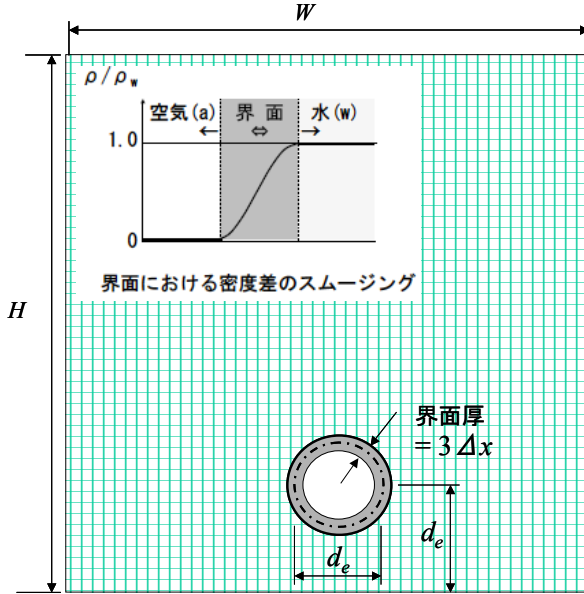


図-1 鉛直2次元の解析モデル例（初期状態）

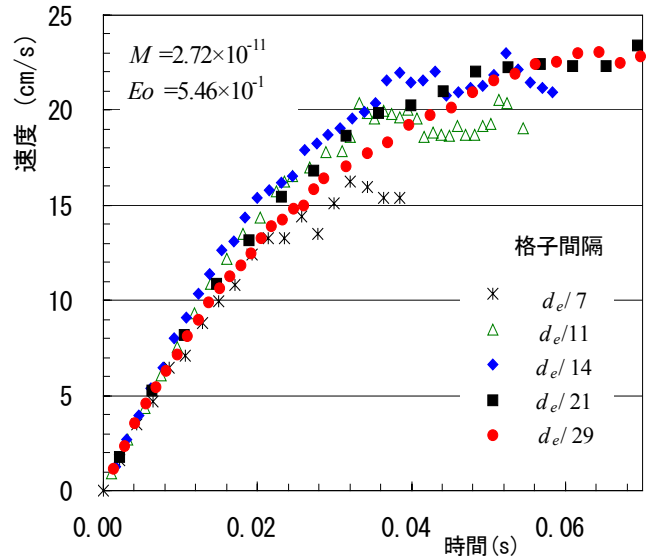


図-2 格子間隔と上昇速度

2. 解析手法

(1) 基礎方程式

一般に、気液二相流体の運動は、連続式、Navier-Stokes方程式およびパーティクルに沿った密度 ρ と粘性係数 μ の保存式で表現できる(Sussman et al.¹⁰⁾). これらは無次元形で次のように表される.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{1}{Fr} \mathbf{g} \\ + \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \frac{1}{B} \kappa \delta(d) \mathbf{n}) &\quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad \text{----- (3)}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mu = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ここで、 t は時間、 ∇ はナブラ演算子、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 $\mathbf{g}$ は重力加速度、 $\mathbf{D}$ は粘性応力テンソル、 κ は気液界面曲率、 δ はDiracのデルタ関数、 $\mathbf{n}$ は界面法線ベクトルである。また、 Fr 、 Re 、 B は、それぞれ、Froude数、Reynolds数、Bond数である。

本論では、気液両相にこれらの式を適用して統一的に解析した。解析領域は鉛直2次元平面とし、計算領域外縁の境界上で自由滑り条件を課した。

(2) 界面捕獲

気相と液相を区別する界面を捕えるためにレベルセット関数 ϕ を導入した。領域内各点から界面までの符号付き距離として ϕ を定義し、気相で負、液相で正とした。

ρ および μ の不連続を緩和するために、界面に厚みを持たせた。この有限幅の遷移領域内で、気液の ρ および μ を滑らかに接続させて、差分計算を安定化させた。

(3) 差分化

基礎方程式の離散化は、Sussman et al.¹⁰⁾ の手法に従うこととし、直交等間隔のスタガード格子系を用いて、2次精度のAdams-Bashforth法で陽的に時間発展計算を行った。空間微分では、対流項で2次精度のENOスキーム、その他の項で2次精度の中心差分を用いた。

(4) 解析モデル

図-1に鉛直2次元の解析モデル（初期状態）を例示する。直径 d_e (e : 面積等価な換算円を示す) の空気気泡が、水槽中心線上で底面から上方 d_e の位置に静止している。水槽の幅 W および深さ H は、共に気泡直径の7倍($7d_e$)を基本とし、解析条件に応じて適宜調整した。空気気泡と水では、大きな密度差(1/814)および粘性差(1/56)がある。これに対して、界面厚さを格子間隔の3倍とし、この界面領域内で、 ρ および μ を正弦関数で滑らかに接続させた。

格子分割では幅、深さ方向とも等間隔とし、幅方向200 (気泡直径 d_e 上で約29)を標準とした。

3. 解析結果

(1) 解析手法の検証

a) 格子間隔の影響

解析にあたって、まず、格子解像度の影響を検討した。図-2は、気泡直径 d_e 上の格子間隔を5段階に変化させ、気泡上昇速度 U (気泡内平均値) に与える影響を見たもの

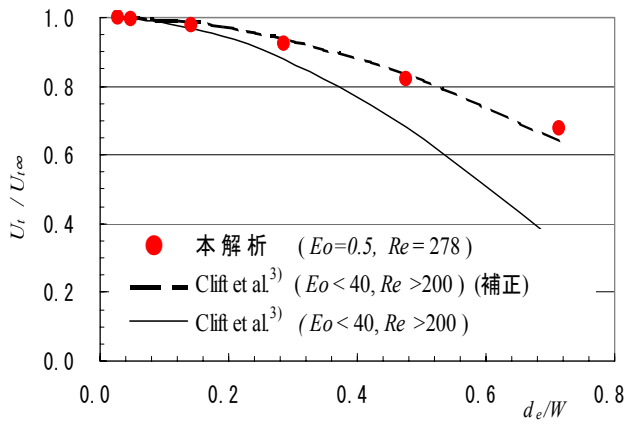


図-3 解析領域幅と終端速度

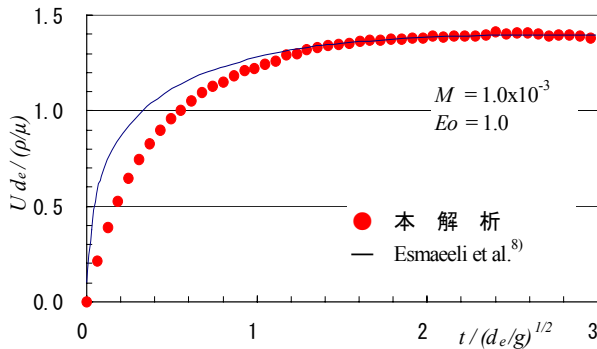


図-4 既往研究との比較(上昇速度の時間的変化)

である。この場合のMorton数 ($M = g \mu^4 / (\rho \sigma^3)$, ただし σ は表面張力) およびEötvös数 ($Eo = g \rho d_e^2 / \sigma$) は, おおの $M = 2.72 \times 10^{-11}$ および $Eo = 5.46 \times 10^{-1}$ で, 水中を上昇する直径2mmの空気気泡の場合に相当する。

気泡上昇開始直後では, 格子間隔による有意な差は無いが, 時間経過とともにその影響が顕在化している。格子間隔 $d_e/7$ (×印) では, 0.03sec 前後で速度増加率が低下し終端速度 ($t \rightarrow \infty$ の速度) $U_t \approx 15 \text{ cm/s}$ に達している。同様に, $d_e/11$ (△印) は 0.04sec 前後で $U_t \approx 20 \text{ cm/s}$ に達する。これに対して, $d_e/14$ (◆印), $d_e/21$ (■印) および $d_e/29$ (●印) の3ケースは, 有意な差が無いまま, 0.05sec 前後で $U_t \approx 22 \text{ cm/s}$ に達する。

以上をまとめると, ①格子間隔が大きいと終端速度が低下する, ②格子間隔を $d_e/14$ 程度かそれ以下とすれば, 格子間隔の影響を受ずに解析できる, となる。これらは Esmaceli and Tryggvason⁸⁾ および Tomiyama¹⁵⁾ の研究とも符合しており, 妥当な結果と判断できる。

b) 解析領域幅の影響

次に, 解析領域幅 W が終端速度 U_t に与える影響を検討した。図-3 は, 終端速度の無次元量 $U_t / U_{t\infty}$ ($U_{t\infty}$ は $W = \infty$ の場合の U_t 値) を縦軸とした解析結果である。●印が本2次元解析値で, 気泡形状は円形に近い楕円形である。実線は Clift et al.³⁾ の実験式, 破線はそれを2次元問題用に補正した曲線である。●印と実線(3次元値)は, d_e/W の

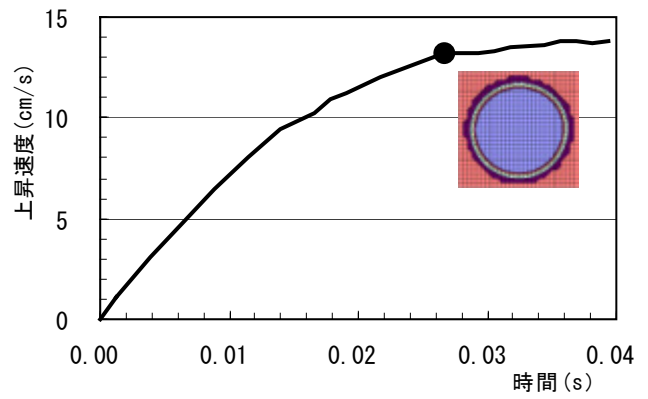


図-5 上昇速度の時間的変化 ($d_e = 1.2 \text{ mm}$)

増加とともに $U_t / U_{t\infty}$ が指数的に減少する点で同傾向を示すが, 数値的には両者の差が次第に大きくなっている。一方, ●印と破線(2次元値)は, d_e/W の全範囲で良く一致している。従って, 本解析値は実験値と良く対応していると言える。

c) 既往研究との比較(上昇速度の時間的変化)

最後に, 上昇速度の時間的変化について, 既往研究と比較検討した。図-4は, レベルセット法による本解析結果を, Esmaceli and Tryggvason⁸⁾ の2次元Front-tracking法の結果と比較したものである。解析条件は, $d_e/W = 0.4/1.0$, $M = 10^{-3}$, $Eo = 1.0$, 気液密度比0.05 および 気液粘性比0.05 としており, エンジンオイル中を上昇する空気気泡に相当する。縦軸は Re 数表示された無次元化速度, 横軸は無次元化時間である。初期段階では本解析値が低めだが, 時間経過とともに両者は良く一致し, 同一の結果を与えることがわかる。

(2) 過渡状態の解析結果

a) 検討対象

はじめに, 図-1に示す気泡が, 上昇運動を開始してから定常状態に至るまでの, 過渡状態に着目する。運動挙動(上昇速度, 気泡形状等)は, 気泡直径 d_e により大きく異なる。 d_e が十分小さい範囲では, 気泡を剛体とみなす Stokes の理論が適用可能だが, 0.5mm 以上では気泡変形や内部気体の運動が無視できない(Gaudin¹⁶⁾)。ここでは, 後者の範囲を対象に, b) 円形 ($d_e = 1.2 \text{ mm}$), c) 楕円形 ($d_e = 3.3 \text{ mm}$), d) 楕円形 ($d_e = 5.5 \text{ mm}$) および e) キャップ形 ($d_e = 24.5 \text{ mm}$) の4ケースの解析をおこなった。

b) 円形【微小変形】 ($d_e = 1.2 \text{ mm}$)

図-5に $d_e = 1.2 \text{ mm}$ の場合の解析結果を示す。上昇速度は滑らかな凸形状で増加し, 0.027sec 後には 13.2 cm/s (●印) と, ほぼ終端速度 U_t に達している。気泡形状はわずかに変形(アスペクト比(鉛直軸/水平軸) = 0.97) するも, ほぼ円形を維持している。

c) 楕円形【小変形・周期的変動】 ($d_e = 3.3 \text{ mm}$)

図-6は $d_e = 3.3 \text{ mm}$ の場合の解析結果である。時間経過とともに, 上昇速度の微小変動が顕在化し, $t \approx 0.05 \text{ sec}$

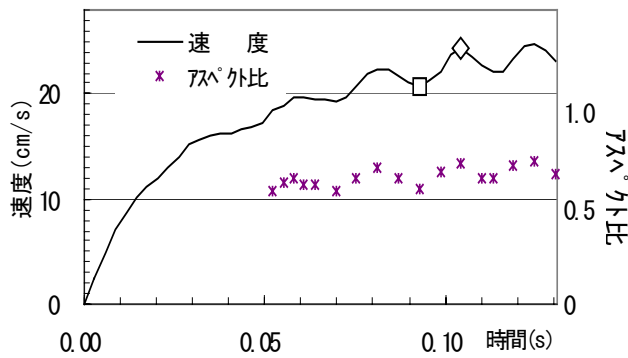


図-6 上昇速度の時間的变化 ($d_e=3.3\text{mm}$)

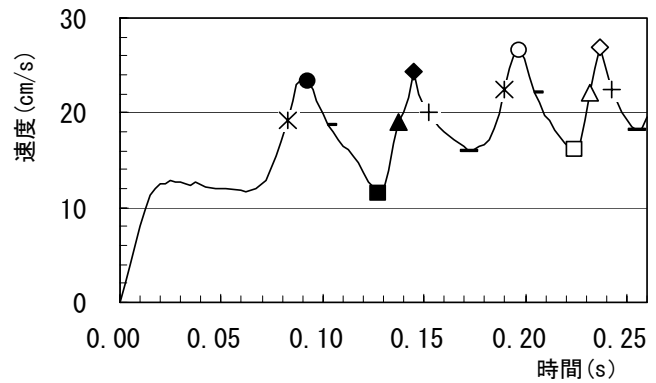


図-8 上昇速度の時間的变化 ($d_e=5.5\text{mm}$)

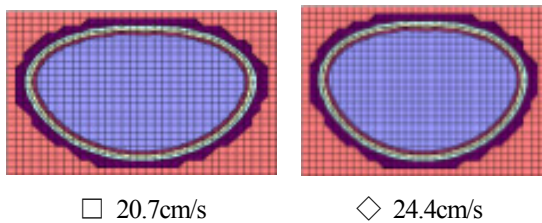


図-7 速度極小および極大時の気泡形状

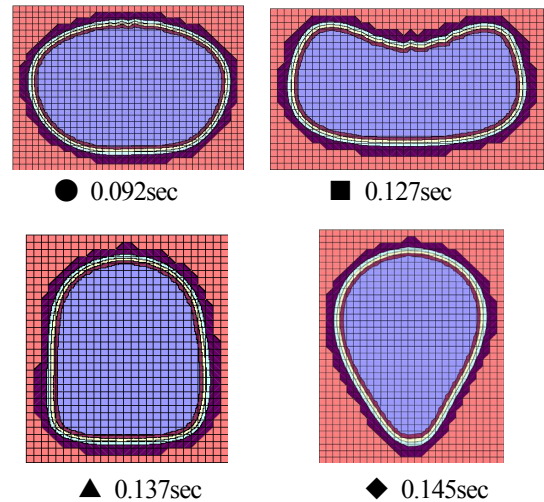


図-9 代表的な気泡形状 ($d_e=5.5\text{mm}$)

からは明確な周期的変動に成長すると共に、その平均値は一定値($U_t \approx 24\text{cm/s}$)に収束していく。

図-7は、速度極小および極大時の気泡形状例である。速度差にも拘らず、気泡形状は、両者とも「上部が扁平な楕円形」と呼べる範囲内にある。しかし、これを数値的に評価すると両者間の差が明確になる。

図-6の×印は、形状変化をアスペクト比で表現し、速度変化と対比させたものである。両者の周期的変動の位相が一致している。また、アスペクト比の平均値は約0.6で、Clift et al.³⁾の実験値(蒸留水の場合)0.25~0.7の範囲内にある。さらに、Marco et al.¹⁷⁾による、 $M \approx 8 \times 10^{-10}$ ($< 10^{-6}$)の気液システムでの実験値 ≈ 0.6 とも一致しており、妥当な結果と言える。

d) 楕円形〔大変形・周期的変動〕($d_e=5.5\text{mm}$)

図-8に上昇速度の解析結果を実線で示す。上昇速度は初期に直線的に増加した後、ほぼ一定値を維持するが、 $t \approx 0.07\text{sec}$ 以降は周期的変動を繰り返す。変動の平均値は緩増しつつ、終端速度 $U_t \approx 22\text{cm/s}$ に収束している。この周期的変動を $d_e=3.3\text{mm}$ の場合(上述)と比較すると、平均値の挙動はほぼ同じだが、振幅が著しく大きい。これは、気泡上昇運動全体の中で、速度の周期的変動のウェイトが増大したことを示すと考えられる。

速度曲線上の○、△印などは、その点での気泡形状のパターン分類表示である。黒塗印は各パターンの代表であり、具体的な形状は後述する(図-9)。はじめに、速度曲線上の極大点でのパターンに着目する。1番目と3番目の極大点は共に丸印(●と○)、2番目と4番目は共に菱印(◆と◇)である。同様に極小点では1、3番目が四角印、

2、4番目は—印である。*印など上記以外の点でのパターンについても同様である。すなわち、気泡形状は、速度曲線上の位置によって決まる、と言える。本ケースの場合、速度が周期的に変動するので、気泡形状もこれに対応して、周期的に変形を繰り返している。

図-9に代表的な気泡形状を示す。図-8の黒塗印に沿って、速度極大点から減速し、極小点を経て次の極大点に至る過程での、形状変化を見たものである。(● 0.092sec)は、図-8の速度極大点での気泡形状で、比較的円に近い楕円形である。その後、速度を緩め極小点では、下面が凸形に撓んだ横長矩形(■ 0.127sec)となっている。しかし、再び速度増加に転じた後は、気泡形状は縦長矩形(▲ 0.137sec)に激変する。その後も速度を増加させ、極大点到達時の気泡形状は流星形(◆ 0.145sec)に変形している。

以上をまとめると、 $d_e=5.5\text{mm}$ の場合、上昇速度が周期的に大きく変動し、それと対応して、気泡形状も周期的に大きく変形する。その形状は楕円形、横長矩形、縦長矩形、流星形など極めて多様である、といえる。

一方、Clift et al.³⁾は、本条件下の気泡形状を”Ellipsoidal”と表現しているが、その定義を「真の

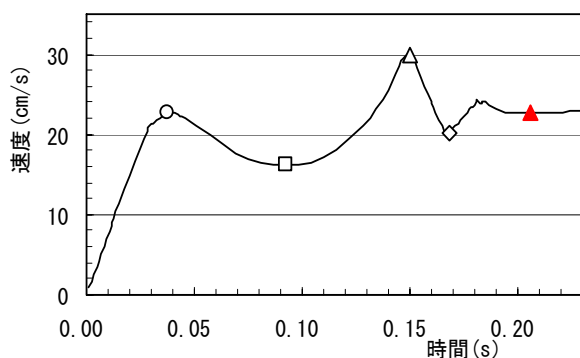


図-10 上昇速度の時間的变化 ($d_e=24.5\text{mm}$)

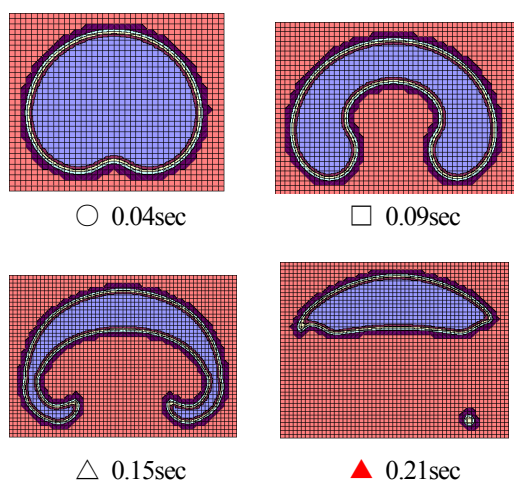


図-11 代表的な気泡形状 ($d_e=24.5\text{mm}$)

楕円形と著しく異なる形状も含む」としており、本解析結果と符合する。なお、最近、数値解析的研究のなかに、速度の周期的変動の報告例(Goz et al.¹⁸⁾, Liovic et al.¹⁹⁾など)があるが、現象の詳細検討には至っていない。

e) キャップ形【形状遷移】($d_e=24.5\text{mm}$)

図-10 に速度変化の解析結果を示す。実線は上昇速度、○、△印等は代表的な着目点である。上昇速度は初期に直線的に増加して最初の極大点(○印)に達する。その後、速度は一旦緩やかに減少するも、再び増加に転じる。2番目の極大点(△印)に達した後は、若干の速度減少を経て、急速に変動が消滅し、一定速度 $U_r \approx 23\text{cm/s}$ に収束する。この点は、周期的変動が継続する楕円形($d_e=3.3\text{mm}$ および 5.5mm) の場合と著しく異なっている。

図-11 に代表的な気泡形状を示す。(○ 0.04sec)は、図-10の最初の極大点における形状で、初期状態に近い円形である。(□ 0.09sec)は速度極小点での形状で、円形の下面が著しく窪んで、馬蹄形に変形している。(△ 0.15sec)は2番目の極大点での形状で、馬蹄形の両端部が細く変形している。その後、速度極小点(◇ 0.17sec)前後で、変形した両端部が本体から離脱していく。(▲ 0.21sec)は速度変動収束後の気泡形状で、キャップ形を示している。

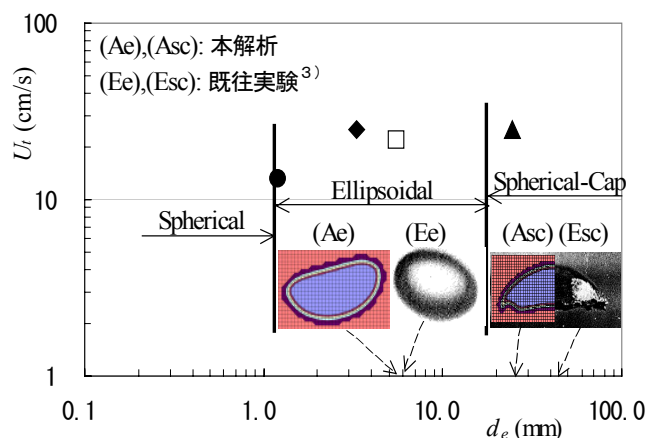


図-12 気泡形状と気泡直径(d_e)

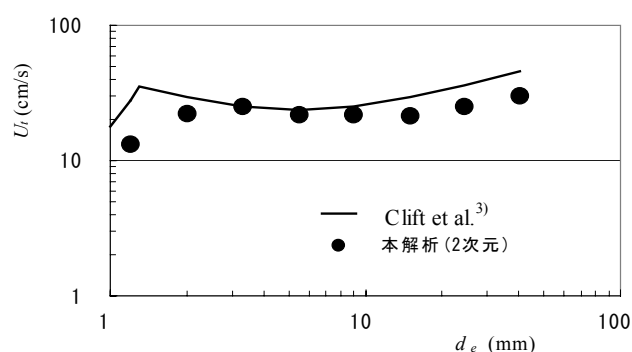


図-13 終端速度(U_t)と気泡直径(d_e)

(3) 定常状態の解析結果

a) 気泡形状

ここでは、前節(2)の解析結果のうち、気泡の運動が定常状態に達し、終端速度で上昇している時点に着目する。図-12 は、既往実験に基づく気泡形状領域図(Clift et al.³⁾)中に、前節(2)の解析点をプロットすると共に、形状例を図示したものである。「Spherical と Ellipsoidal の境界上」の●印($d_e=1.2\text{mm}$)では、気泡形状の解析結果は「わずかに変形した円形」であり、領域図と良く符合している。同様に、「Ellipsoidal 領域」の◆印($d_e=3.3\text{mm}$)では解析結果が「楕円形」、また、「Spherical-Cap 領域」の▲印($d_e=24.5\text{mm}$)では解析結果が「キャップ形」であり、共に領域図と符合する。図中の(Asc)と(Esc)は「Spherical-Cap 領域」の気泡形状例で、前者は本解析 ($d_e=24.5\text{mm}$)、後者は既往実験 ($d_e=42\text{mm}$)³⁾である。 d_e 値の相違にもかかわらず、両者は良く一致している。

一方、「Ellipsoidal 領域」の□印($d_e=5.5\text{mm}$)では、解析結果が「楕円形、横長矩形、縦長矩形、流線形など多様に変形」している。しかし、「Ellipsoidal」の定義(前節(2)d))が「真の楕円形と著しく異なる形状も含む」であることから、解析結果は領域図と符合すると言える。図中の(Ae) と(Ee)は「Ellipsoidal 領域」の気泡形状例で

ある。前者は周期的に変形する本解析($d_e=5.5\text{mm}$)の一例、後者は既往実験($d_e=6\text{mm}$)³⁾である。両者共「広義の楕円形」と言い得る点で符合している。

b) 終端速度

図-13は、終端速度 U_t と気泡直径 d_e の関係を、両対数紙上で見たものである。●印は本解析、実線はClift et al.³⁾の既往実験に基づく曲線(蒸留水中の空気気泡の場合)である。後者の U_t は、 d_e が小さい範囲で直線状に増加するが、 $d_e=1.3\text{mm}$ を境に緩やかな減少に転じ、その後は再び増加している。この傾向は、●印群にも表れており、本解析の妥当性を示すものと言える。しかし、数値的に比較すると、本解析は全体的に小さく、実験曲線の約8割程度である。

この原因の1つに、3次元挙動を2次元解析した点がある。モデル化に伴う気泡形状の差(例；球形と円筒形)や、3次元運動(例；ロッキング、ジグザグ、スパイラル、形状振動)を2次元領域内で解析することによる自由度不足等が、誤差を生むことが考えられる。

4. まとめ

レベルセット法による気泡運動解析の実用化を目指し、格子間隔、領域幅の影響を検討すると共に、上昇速度の計算結果を既往研究と比較して、本手法の妥当性を検証した。

淡水中を上昇する空気気泡($d_e=1.2\text{mm}\sim 24.5\text{mm}$)の、上昇速度と気泡形状を、本手法で解析した。過渡状態では、既往実験と定性的によく一致し、本手法の妥当性が確認された。「Ellipsoidal領域」の $d_e=5.5\text{mm}$ では、速度と形状が呼応しながら、大きく周期的変動する状況を捕えることが出来た。定常状態でも、気泡形状および終端速度は、既往実験と同傾向を示したが、数値的には2割程度低めだった。

今後は、上昇速度とあわせて、気泡形状についても、実験との比較考察を詳細に行うと共に、3次元解析など、より現実に近い条件での解析を進める予定である。

参考文献

- 1)月岡康一・石田啓・斉藤武久・由比政年：エアバブルカーテンによる汚濁制御に関する基礎的研究、日本沿岸域学会研究討論会講演概要集、No.18、pp.54-57、2005。
- 2)Harberman,W.L. and Morton,R.K.: An experimental investigation of the drag and shape of air bubbles rising in various liquids. *David Taylor model Basin*, Washington, Report No.802, 1953.
- 3)Clift,R., Grace,J.R. and Weber,M.E.: *Bubbles, Drops, and Particles*, Academic Press, 1978.

- 4)Bhaga,D. and Weber,M.E.: Bubble in viscous liquids; Shapes, wakes and velocities, *J.Fluid Mech.* 105, pp.61-85, 1981.
- 5)Hirt,C.W. and Nichols,B.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *J. of Comp. Phys.* Vol.39, pp.201-225, 1981.
- 6)Ryskin,G. and Leal,L.G.: Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics. Part 2. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid. *J.Fluid Mech.*148, pp.19-35, 1984.
- 7)高木周・松本洋一郎・黄華雄：境界適合格子による単一上昇気泡の数値解析、日本機械学会論文集、61-586,B, pp.1976-1983, 1995.
- 8)Esmaeili,A. and Tryggvason,G.: Direct numerical simulation of bubbly flows. Part 1. Low Reynolds number arrays, *J.Fluid Mech.* Vol.377, pp.313-345, 1998.
- 9)Takada,N., Misawa,M., Tomiyama,A. and Hosokawa,S.: Simulation of bubble motion under gravity by lattice Boltzman method, *J. of Nuclear Science and Technology*, Vol.38,No.5, pp.330-341, 2001.
- 10)Sussman,M., Smereka,P. and Osher,S.: A Level set approach for computing solution to incompressible two-phase flow, *J.Comp. Phys.*, Vol.114, pp.146-159, 1994.
- 11)由比政年・石田啓・保智正和：界面の大変形を伴う気液2相流体場の数値解析—衝突砕波および上昇気泡解析への適用—, 海岸工学論文集, 第45巻, pp.351-355, 1998.
- 12)Koebe,M., Bothe,D., Pruess,J. and Wamecke,H.-J.: 3D direct numerical simulation of air bubbles in water at high Reynolds number, *Proc. Of the ASME, FEDSM '02*, 2002.
- 13)坪郷浩一・朝位孝二・羽田野袈裟義：Level Set 法を用いた気泡崩壊の数値計算に関する研究、応用力学論文集, Vol.6, pp.201-208, 2003.8.
- 14)Smolianski,A., Haario,H. and Luukka,P. : Numerical bubble dynamics, *Proc. of European Symp. on Computer Aided Process Engineering, ESCAPE-13*.Elsevier science B.V., 941-946, 2003.
- 15)Tomiyama,A.: A struggle with computational bubble dynamics, *3rd Int. Conf. Multiphase Flow, ICMF*, pp.1-18, Lyon France, 1998.
- 16)Gaudin,A.M.: *Flotation*, McGraw-Hill, New York, 2nd Edition, 1957.
- 17)Marco,P.Di, Grassi,W. and Memoli,G. : Experimental study on rising velocity of nitrogen bubbles in FC72, *Int.Journal of Thermal Sciences* 42, 435-444, 2003.
- 18)Goz,M.F., Bunner,B., Sommerfeld,M., Tryggvason,G. : The unsteady dynamics of two-dimensional bubbles in a regular array. *Proc. of the ASME, FEDSM'00*, 2000.
- 19)Liovic,P., Liow,J.L. and Rudman,M. : A volume of fluid(VOF) method for the simulation of metallurgical flows, *ISIJ International*, Vol.41,No.3, pp.225-233, 2001.

(2005.9.30受付)