水工学論文集, 第50巻, 2006年2月

混合砂礫河床材料の空隙に関する シミュレーションモデル

A SIMULATION MODEL FOR THE VOID PROPERTIES IN GRAVEL RIVERBED

堤大三 [1]・藤田正治 [2]・Muhammad Sulaiman [3]
Daizo TSUTSUMI, Masaharu FUJITA, and Muhammad SULAIMAN

[1] 正会員　農博　京都大学助手　防災研究所流域災害研究センター（〒611-0011　宇治市五ヶ庄）
[2] 正会員　工博　京都大学教授　防災研究所流域災害研究センター（〒611-0011　宇治市五ヶ庄）
[3] 京都大学大学院工学研究科（〒606-8501　京都市左京区吉田本町）

A method for simulating particle packing, in which the spherical particles were placed into a hypothetical rectangular vessel, was developed. A laboratory experiment, in which six different-sized spherical glass beads were mixed and used to fill a cylindrical vessel, was conducted to assess the validity of the simulation method. Good agreement between the calculated and observed results indicated that the simulation method is reliable for use in calculating the void ratio. Simulations were conducted to elucidate the dependency of the void ratio on parameters of a lognormal-type particle size distribution. These showed that when the particle size was uniform ($\ln\sigma = 0.0$) the void ratio was small and close to the theoretical value for uniform-sized spherical particles (0.28); it increased drastically (0.37) when the particles had a small non-zero size-distribution ($\ln\sigma = 0.01$), and decreased continuously with increasing standard deviation.

Key Words: *void ratio, riverbed material, particle size distribution, riverbed deformation calculation*

1．はじめに

従来の河床変動計算において，河床材料の空隙率は材料の粒度分布にかかわらず一定値（0.3－0.5，多くの場合0.4）と仮定されている．しかし，空隙率が構成材料の粒度分布に依存して変化することは明らかであり，空隙率を一定値としたままでは，例えば河床からの細粒成分の洗脱や，礫間への砂の充填のような流砂現象を伴う河床変動を再現計算することはできない [1]．また，空隙そのものも，水生生物の棲息空間としての重要な役割を持っており，堆砂による河床内空隙環境の変化については広く研究されてきている [2), 3]．空隙環境への人為的撹乱としては，例えばダム建設による下流河床におけるアーマーコートの発達や，貯水池から人為的排砂による礫間の大空隙の充填等の空隙変化が挙げられる．これらの撹乱が水生生物の棲息空間に及ぼす影響を検討するためには，土砂移動だけでなく空隙の変化も考慮する必要があり，それを含んだ河床変動解析法の開発が求められる．

空隙と粒度分布との関係については，粉体工学の分野で研究されており，球形粒子のランダム充填に関する数値シミュレーションにより，微粒子充填時の空隙率や配位数を計算している [4), 5]．しかし，これらのシミュレーションモデルでは，対象とする粒子の粒径が単一か数種類の多成分に限られており，連続する任意の粒度分布には対応していない．また，結果は比較的過大に空隙率を算出し，実際の河床材料に見られるような密に充填された構造を解析するには適していない．

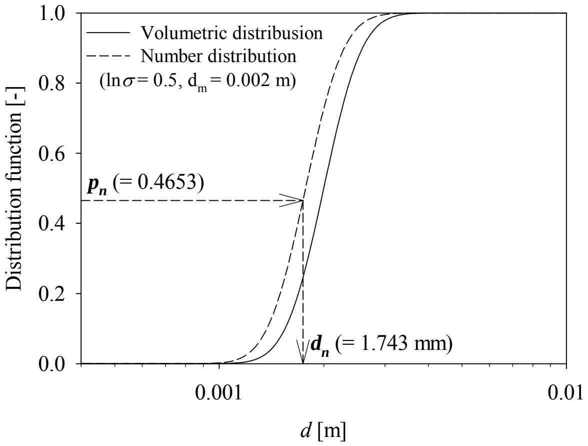
本研究では，任意の粒度分布に対応したシミュレーションモデルを新たに開発した．また，ガラスビーズを用いた粒子充填実験を行い，その結果と計算結果を比較することでモデルの検証を行った．さらに，粒度分布として対数正規分布を仮定し，空隙率の粒度分布に対する依存性について解析を行った．本研究において開発したモデルは，個別要素法などによって粒子の動力学的な挙動を計算するのとは異なり，単純な幾何学的配列を扱うものであるため，粒子配列の履歴などを考慮することはできないが，モデルの簡便性や計算負荷の低さにおいて優れていると考えられる．

2．シミュレーションの方法

本シミュレーションモデルは，始めに設定した直方体の仮想容器に，粒子を順次充填していき，容器が完全に充填されたときの空隙率を計算するものである．充填する粒子の粒径は乱数群を用いランダムに決定するが，全体としては与えられた粒度分布となるようにする．粒子充填においては，設置可能な位置のうち，最低位置を選択する．現実の空隙率は，材料の粒度分布と締固め度に

表ー1 粒子径決定のために発生させた乱数の一例

粒子番号	乱数	粒子番号	乱数
k	p_k[-]	k	p_k[-]
1	0.9010	6	0.3068
2	0.2916	7	0.4033
3	0.5387	···	···
4	0.0399	n	0.4653
5	0.3808	···	···



図ー1　対数正規分布関数とその分布に従った粒径決定方法

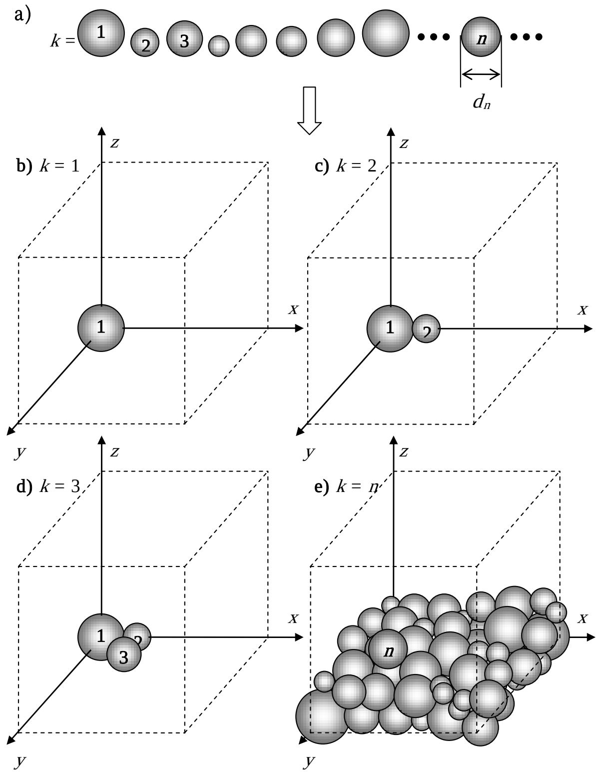
よって決まるものであるが，モデル上，締固め度は考慮していない．ただし，上述の充填方法（最低位置選択）のため，結果としては密な充填構造となる性質を持っている．以上のように，は本モデル，(1)乱数群の発生，(2)仮定した粒度分布に従った粒子径の決定，(3)仮想容器への粒子充填，(4)空隙率の計算，の４段階から成っており，以下に，各段階の詳細について述べる．

(1)　乱数群の発生

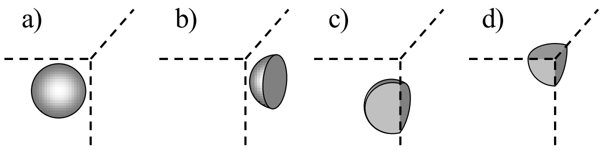
次節に示す粒子径決定のため，0.0ー1.0 間の任意の数値をランダムに発生させる．乱数群発生には，表計算ソフト等の乱数発生機能が有効である（例えば，MS Excel の RAND 関数）．一例として，発生させた乱数群を**表ー1** に示す．ここで，k は粒子番号，p_k は乱数である．

(2)　粒子径決定

実際に測定された河床材料の粒度分布は，一般的な統計関数によって近似されることが多い（例えば，正規分布，対数正規分布等）．本シミュレーションモデルでは，前節で示した乱数群を用いて，任意の分布関数に対応した粒径を持つ粒子群を決定する．河床材料の粒度分布は体積基準で表されることが多いが，本モデル・シミュレーションは，粒子を一つずつ充填していく手法をとるため，個数基準の粒度分布が必要となる．ここで，体積基準の確率密度関数を $f(d)$ とすると，個数基準の確率密度関数 $g(d)$ は，



図ー2　粒径が決定された粒子群(a)の仮想容器への充填方法（b-e）



図ー3　仮想容器に含まれる粒子体積を計算する場合の粒子位置と容器壁面との関係の分類

$$g(d)=\frac{f(d)/d^3}{\int_0^\infty f(x)/x^3dx} \tag{1}$$

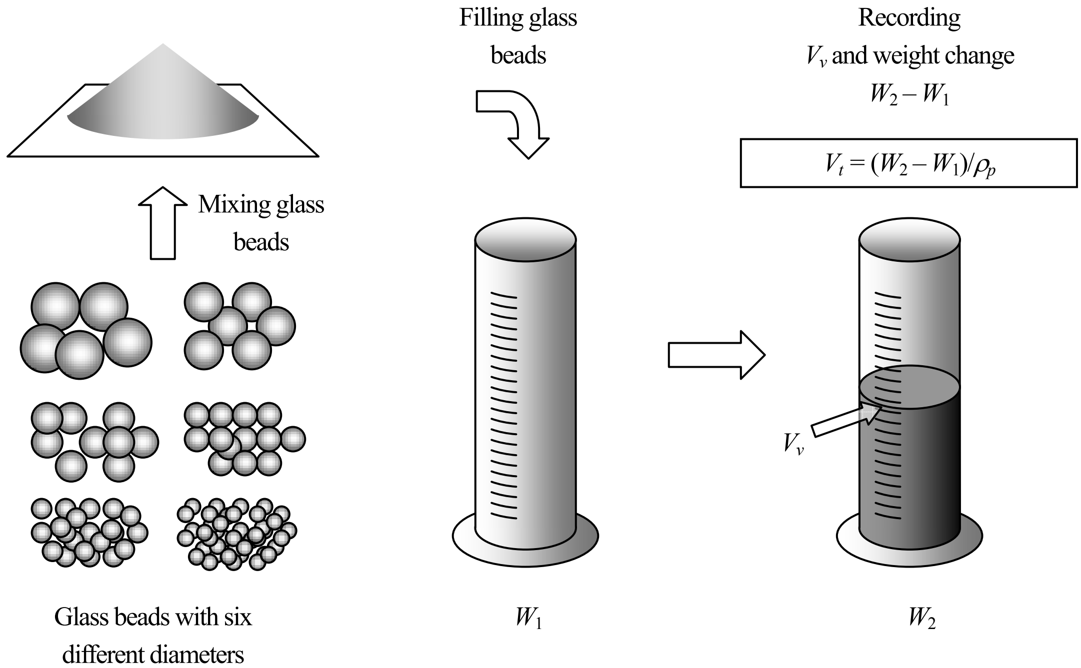
と表せる．よって，個数基準の分布関数 $G(d)$ は，

$$G(d)=\frac{\int_0^d f(x)/x^3dx}{\int_0^\infty f(x)/x^3dx} \tag{2}$$

となる．一例として，粒度分布を対数正規分布（式 3）とみなした場合の粒径決定方法を**図ー1** に示す．

$$f(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ln\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln d-\ln d_m)^2}{2(\ln\sigma)^2}\right] \tag{3}$$

図ー1 の実線は対数正規分布の体積基準分布関数 $F(d)$ を表し，破線は個数基準分布関数 $G(d)$ を表す．ここでは，**表ー1** に示した n 番目の粒子に対応する乱数 p_n = 0.4653 から個数基準の分布関数 $G(d)$ に従い，粒径 d_n を求めている．ただし，d_n は解析的には決定できないため，二分法を用いて数値計算を行い求めた．



図－4　　粒子充填実験の方法

(3)　粒子充填

図－2 に示す，x, y, z 軸と破線で囲まれた立方体（一辺の長さ L_v）の仮想容器を仮定する．L_v は，

$$L_v = r_d d_m \tag{4}$$

として与えられる．ここで，d_m は，準備した粒子群の平均粒径，r_d は係数である．次に，準備した粒子群（**図－2a**）をこの仮想容器の中に順次充填していくが，充填時の規則を以下に示す．

(a)　第 1 番目の粒子の中心は, 座標原点に設置（**図－2**b）

(b)　第 2 番目の粒子の中心は, 第 1 番目の粒子と接するように，x 軸上に設置（**図－2**c）

(c)　第 3 番目の粒子の中心は，第 1,2 番目の粒子と接するように，x-y 平面上に設置（**図－2**d）

(d)　第 n 番目の粒子は，x-y 平面上もしくは既に設置された 3 個の粒子に接する位置の内，z 座標が最小となる点に設置（**図－2**e）

(e)　仮想容器が完全に充填されれば終了

(4)　空隙率の計算

仮想容器全体の体積 V_v は，式(5)で表される．

$$V_v = L_v^{\ 3} \tag{5}$$

一方，仮想容器に含まれる粒子の体積は，その位置によって次のように計算される．

(a) 第 k 番目の粒子全体が，仮想容器の内部に含まれる場合（**図－3**a），その体積 $V_{p,k}$ は式(6)で表される．

$$V_{p,k} = \frac{\pi}{6} d_k^{\ 3} \tag{6}$$

ここで，d_k は第 k 番目の粒子の粒径である．

(b) 第 k 番目の粒子の一部が，仮想容器外にはみ出している場合（**図－3**b, c, d），仮想容器内に含まれる部分の体積 $V_{p,k}$ は，粒子の中心座標，粒径 d_k，仮想容器の壁面の位置から，解析的に計算される．このように，仮想容器内に含まれる部分のみを粒子体積に含めることで，容器形状の影響を排除することができる．

仮想容器に含まれる粒子の全体積 V_t は，式(7)にて計算される．

$$V_t = \sum_k V_{p,k} \tag{7}$$

以上より，仮想容器全体についての空隙率λは，式(8)により得られる．

$$\lambda = \frac{V_v - V_t}{V_v} \tag{8}$$

3．実験方法

モデル検証のため行ったガラスビーズを用いた粒子充填実験に関する概略図を**図－4**に示す．6種類の粒径を持つガラスビーズ（0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0 mm）を異なる割合で混合し，6種類の粒度分布を調整した．それぞれの粒度分布に対する粒子の混合割合を**表－2**に示す．十分に混合した粒子を3回に分けて100 cm^{3}メスシリンダーに充填し，1.8 cmの高さから180回自由落下させて締固めを行った．その後，重量を計測することで全粒子体積V_tを算出し，メスシリンダーの読みを容器体積V_vとして式(8)により空隙率λを計算した．なお，メスシリンダー

表−2　異なる粒度分布（No.1-6）を作成するために混合した6 種類の粒子（0.2-2.0 mm）の混合割合 [Vol%]とシミュレーションに用いた r_d

	Number of particle size distribution					
d mm]	1	2	3	4	5	6
0.2	−	−	−	−	−	16.6
0.4	−	−	−	−	20.0	16.6
0.6	−	−	−	25.0	20.0	16.7
0.8	−	−	33.3	25.0	20.0	16.7
1.0	−	50.0	33.3	25.0	20.0	16.7
2.0	100.0	50.0	33.4	25.0	20.0	16.7
r_d	3.5-7.0	3.25	3.25	2.75	2.25	1.25

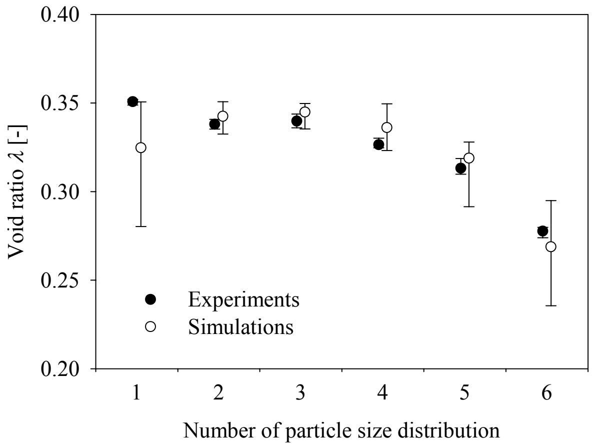
の直径は，粒子径に比べ十分大きいため，壁面による影響は，無視できるものと考えられる．

4．結果と考察

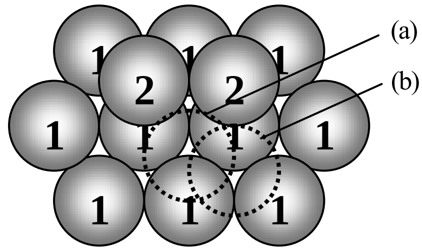
(1)　粒子充填実験によるモデルの検証

各粒度分布（**表−2**）に対して粒子充填実験を5回ずつ行い，得られた空隙率の最小値−最大値範囲と平均値を**図−5**に示す（Error Barと●）．各粒度分布によって空隙率は異なる値を示し，粒度分布番号がNo.1から6に変わる，つまり分布が広がるに従って空隙率は減少している．最小空隙率は粒度分布番号がNo.6の場合の0.278であった．また，各粒度分布において，空隙率の最小値−最大値間のばらつきは小さい．均一粒径粒子を最密充填した場合，解析的に得られる空隙率は0.28であるが，粒子充填実験で得られた均一粒径粒子の空隙率（粒度分布番号No.1）は0.35であり，理論値よりはるかに大きい．この原因については，後述の(2)節において考察する．

5種類の乱数群を用いて行った粒子充填シミュレーションによる空隙率の最小値−最大値範囲と平均値を実験結果と合わせて**図−5**に示す（Error Barと○）．また，シミュレーションにおいて用いたr_dの値を，表−2に示す．粒度分布番号No.1の空隙率の計算結果はばらつきが大きく（0.280−0.351），平均値も実験結果とは異なる．計算結果の大きなばらつきの原因は，**図−6**に図示するように，本モデルの手法では，必ずしも最密充填構造とはならないためであると考えられる．ただし，仮想容器が粒径と比較して過大でない場合（$r_d = 3.5$），最密充填構造が保たれることがあり，その場合は単粒径最密充填の解析値0.28がモデル計算によっても得られている（**図−5**の粒度分布番号No.1の最小値）．また，最小値−最大値間のばらつきは，実験値に比べて概して大きく，特に粒度分布No.5, 6では0.03を超える．これは計算負荷が過大とならないようr_dを小さくしたため（表−2），乱数群の違いによる影響が大きくなったためである．実験とシミュレーションでは，充填する容器の形状も異なるが，r_dは実験で



図−5　異なる粒度分布を持つ充填粒子の空隙率（実測値●と計算値○の比較）



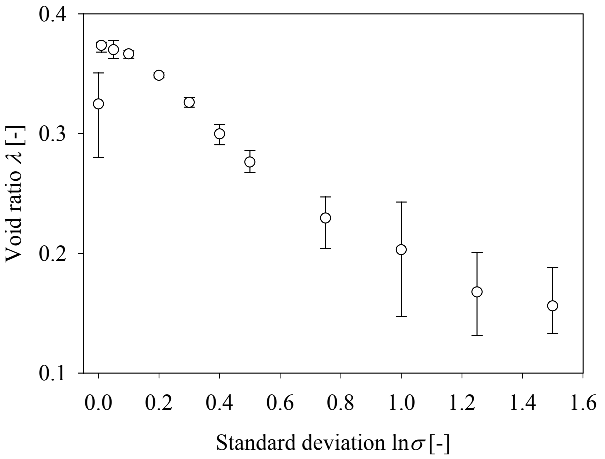
図−6　単分散粒子の充填構造の違い（最密充填構造を持つ 1 層目の上に 2 層目が配置する場合，最密充填構造を維持する配置(a)と，最密充填構造とはならない配置(b)がある）

の方がシミュレーションで用いたものより大きいと考えられるため，最小値−最大値間のばらつきが小さくなったものと思われる．シミュレーションモデルでは，大きなr_dを採用するよりも，比較的小さなr_dを用いて繰返し回数を多くし，平均値を求めるほうが効率良く計算できるものと考えられる．

実験値と計算値を比較すると，粒度分布番号 No.1 では実測値と計算値の差が大きいものの，それ以外の粒度分布（No.2-6）では，両者はよく一致している．粒度分布番号 No.2 から No.6 の実測値と計算値の平均誤差は，0.0067 であり，これは実測値の分布範囲（0.340 から 0.278）の約 11%と小さな値である．以上の結果から，本研究で提案した球状粒子充填モデルは，均一粒径粒子の場合を除き，粒度分布と空隙率の関係を求める手段として有効であることが確認された．

(2)　粒度分布と空隙率の関係

河床材料の粒度分布は，正規分布，対数正規分布，Talbot 型分布等，様々な関数によって近似されるが，ここでは粒子充填モデルに対数正規分布を用いてシミュレーションを行った．シミュレーションでは，対数正規分布の標準偏差 lnσを 0.0 から 1.5 の間で変化させ，12 種類の粒度分布に対する空隙率を計算した．**図−7** に異なる標準偏差 lnσに対して計算された空隙率λの最小値−最大値，平

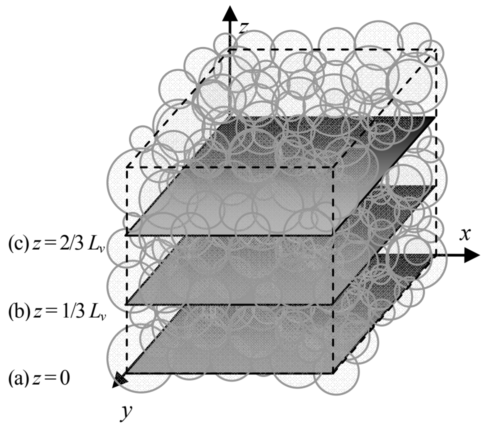


図−7　対数正規分布の標準偏差 $\ln\sigma$ と空隙率 λ との関係（Error bar は，最小値−最大値範囲を表す）

均値を示す．最小値−最大値間のばらつきが $\ln\sigma$ によって異なるのは r_d = 5.0 ($\ln\sigma \leqq 0.5$)，r_d = 1.75−3.5 ($\ln\sigma > 0.5$)と異なる r_d を用いたためである．標準偏差 $\ln\sigma$ が 0.0 からわずかに 0.01 に増加しただけで，空隙率 λ は 0.325 から 0.374 に大きく増加していることは興味深い．これは，粒径がわずかにばらつくだけで，規則的な配列が損なわれてしまうことを意味している．前節の**図-5**において均一粒径粒子の空隙率実測値が最密充填の解析値 0.28 よりかなり大きな値を示したのは，実験に用いたガラスビーズが，均一粒径とはいえ少なからず分布を持っていたため大きな値を示したと説明できる．また，厳密には均一粒径ではないが現実的には均一粒径に近い粒度分布（$0.01 \leq \ln\sigma \leq 0.1$）の場合，空隙率は約 0.38 と計算され，この値が既往の河床変動計算に用いられてきた空隙率 0.4 に近い値であることも興味深い．標準偏差 $\ln\sigma$ が 0.01−1.50 の範囲では，$\ln\sigma$ の増加に伴い，空隙率は 0.374 から 0.156 まで減少した．特に $\ln\sigma$ が 1.0 を超えるような広い分布を持つ粒子では，空隙率が 0.2 を下回り，既往の河床変動計算で仮定されてきた 0.4 よりもはるかに小さい値となっている．自然河川の砂洲における空隙率の実測値が 0.16 であったとの報告もあり[6]，**図−7** に示される空隙率が現実にありうる値といえる．以上の結果から，球形粒子の場合，空隙率は粒度分布に大きく依存することが示されたが，実際の河床材料である非球形粒子に関しても検討し，河床変動計算において考慮していく必要がある．

(3) 粒子充填シミュレーションにおける空隙構造

空隙は立体的に分布しているため，充填された粒子間の空隙を可視化するには本来なら 3 次元的な表示をするべきであるが，それは困難である．よって，ここでは**図−8** に示すような 3 平面で仮想容器を切断し，その断面に現れる粒子断面を 2 次元的に表示することとする（**図−9**）．よって，粒子断面を示す円の間の空間を空隙とみなす．**図−9** には，対数正規分布を仮定した場合の 3 種



図−8　仮想容器に充填された粒子の空隙構造を見るため設定された 3 水平断面(a, b, c)

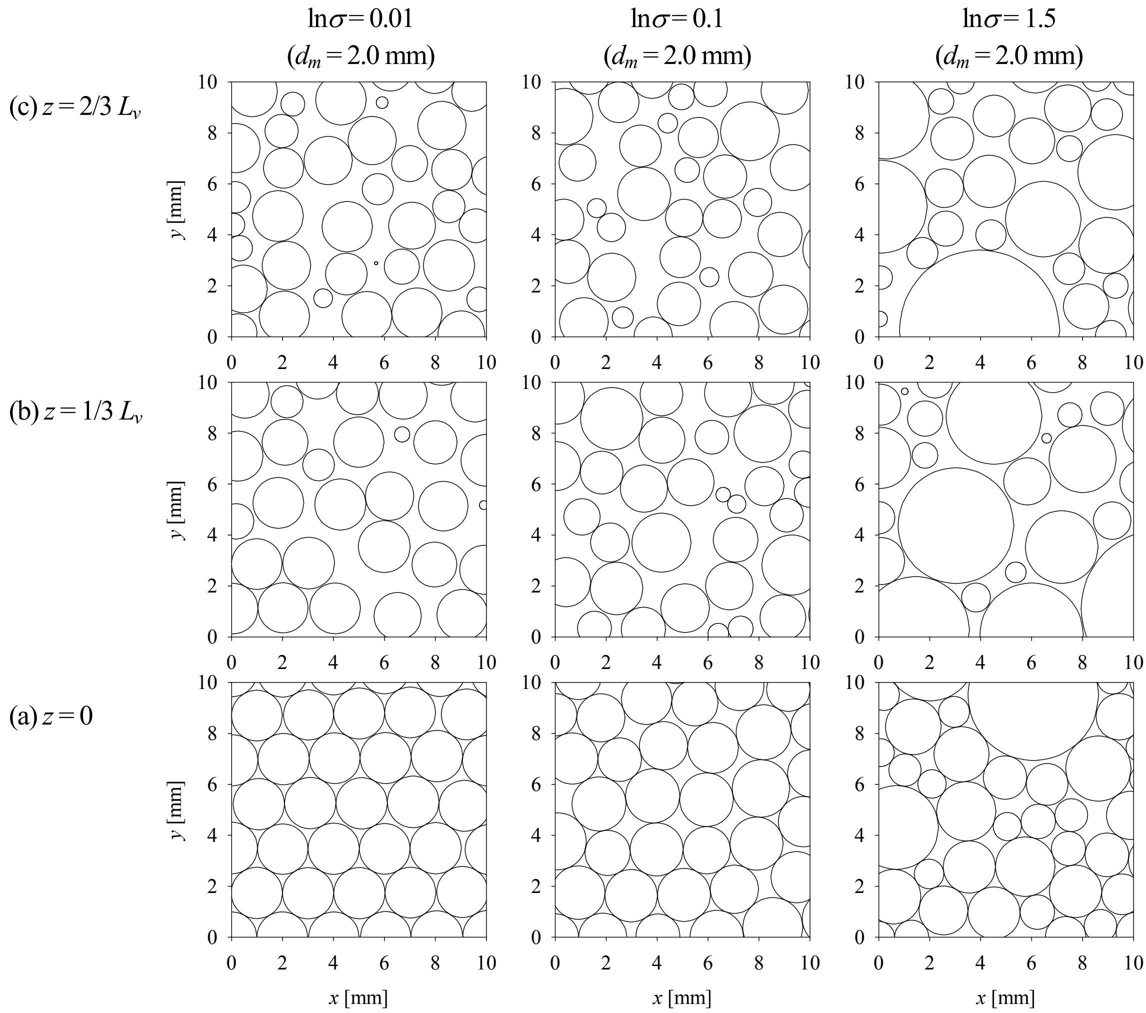
類の粒度分布（$\ln\sigma$ = 0.01, 0.1, 1.5）についてのシミュレーション結果を示している．

標準偏差 $\ln\sigma$ = 0.01 の場合（**図−9** の左列），断面(a)上において，ほぼ単一な粒径分布が見られ，規則的な配列を示している．ただし，非常にわずかではあるが粒径の違いによる粒子間のギャップが見られ，結果的に規則配列が不完全となっている．断面(b)上では，原点に近い，いくつかの粒子に規則配列が見られるものの，その他の粒子は不規則に配置されている．断面(c)に至ると，粒子配置は完全に不規則となり，粒子間に大きな空隙が存在している．

標準偏差 $\ln\sigma$ = 0.1 の場合（**図−9** の中列），断面(a)上において，粒径は中程度の分布を示しており，$\ln\sigma$ = 0.01 の場合と異なり，規則配列は崩れてきている．断面(a)上での空隙は，$\ln\sigma$ = 0.01 の場合よりも少し大きいが，断面(b), (c)上では，同程度の大きさに見える．

標準偏差 $\ln\sigma$ = 1.5 の場合（**図−9** の右列），断面(a)上において，粒径は広い範囲に分布しており，全ての断面上で粒子配置は完全に不規則である．粒子間の空隙の大きさは，$\ln\sigma$ = 0.01, 0.1 の場合とほぼ同じ程度であるが，大粒径の粒子に占有されている面積の割合が大きく，これによって全体に占める空隙の割合を減少させている．このことは逆に，大粒子の間の空隙に小粒子が充填されており，空隙占有率を減少させているとも解釈できる．この大粒子による空隙占有が，標準偏差が大きい場合の空隙率の低下につながっていると考えられる．

図−9 に示した空隙は 2 次元的なものであるが，標準偏差の違いによる空隙構造の変化は，**図−7** に示した標準偏差と空隙率との関係と定性的に一致しており，粒度分布が広い場合，大粒径の粒子による占有率の上昇と小粒径の粒子が間隙を埋めることで全体の空隙率が減少することが確認された．また，平均粒径が同一の場合，たとえ粒度分布に差があっても，粒子間に現れる空隙の大きさは，ほぼ同じ程度であるということも示された．これは，平均粒径が小さくなれば空隙の大きさも小さくなることを意味し，礫間が細粒砂によって充填されるよう



図−9　粒子充填モデルにより得られた空隙構造の断面図

な場合, 当然ながら空隙の大きさも小さくなると言える.

5．おわりに

本研究では，球状粒子充填モデルを開発し，河床材料の粒度分布と空隙率の関係を検討した．対数正規分布を仮定した場合の粒子充填シミュレーションを行った結果，粒度分布の広がりとともに，空隙率が減少することが示された．標準偏差$\ln\sigma > 1.0$の場合，空隙率は0.2以下と計算され，従来の河床変動計算において一般的に仮定されている値0.4よりもかなり小さな値となる．

ここで求めた粒度分布と空隙率の関係は，球形粒子に関するものであるが，実際の河床材料である非球形粒子に関しても検討し，モデルで得られた結果を河床変動計算に適用していく必要がある．

参考文献

1) 平野宗夫： Armoring をともなう河床低下について，土木学会論文報告集，195，pp. 55-65，1971.

2) Erman, D. C. & Ligon, F. K. 1988. Effects of discharge fluctuation and the addition of fine sediment on stream fish and macroinvertebrates below a water-filtration facility. Environmental Management, 12, 85-97.

3) Yamada, H. & Nakamura, F. 2002. Effect of fine sediment deposition and channel works on periphyton biomass in the Makomanai river, northern Japan. River Res. Applic., 18, 481-493.

4) Tory, E. M., Church, B. H., Tam, M. K. & Ratner, M. 1973. Simulated random packing of equal spheres. Can. J. Chem. Eng., 51, 484-493.

5) Suzuki, M. & Oshita, T. 1983. Estimation of the co-ordination number in a multi-component mixture of spheres. Powder Technology, 35, 159-166.

6) 竹門康弘，竹門緑，谷田一三，中島拓男，三田村緒佐武：凍結コア法による河床間隙動物の定量調査結果，河川生物学術研究会（木津川研究グループ），pp. 235-241，2003.

(2005.9.30 受付)