

モード干渉を考慮した砂州のモード減少過程

WEAKLY NONLINEAR ANALYSIS OF BAR MODE REDUCTION PROCESS

渡邊康玄¹

Yasuharu WATANABE

¹正会員 博 (工学) 独立行政法人北海道開発土木研究所 河川研究室 (〒062-8602 札幌市豊平区平岸1条3丁目)

Various hydraulic test and numerical simulations have reported that under the condition in which double-row bars initially form, the mode of bars is reduced and alternate bars are formed over time. In this study, weakly nonlinear analysis is performed in order to elucidate the interaction between the modes of double-row bars and alternate bars. A concept of the rate of linear amplification is introduced in to the weakly nonlinear analysis in order to enable a consistent expansion of alternate bars and double-row bars. This analysis succeeds in reproducing the characteristics of bar mode decrease process. According to this analysis, neither of both modes (alternate bars and double-row bars) can grow up simultaneously.

Key Words : Double-row bars, mode reduction process, bed forms, weakly nonlinear analysis

1. はじめに

中規模河床波が形成されると、局所的な洗掘や流れの蛇行に起因する河岸侵食が生じることから、治水対策における必要性により、その形成領域について研究が進められてきた。この中規模河床形態の領域区分は初期増幅率の大小により行われてきたが、初期に多モードの砂州が形成される条件では、時間の経過に伴ってモードが減少することが水理実験や数値シミュレーションによって指摘されてきている^{1)~3)}。このことは、実河川における河床形態の形成は複列砂州が形成されるとされる水理条件であっても、モード減少を生じた結果あるいはモード減少中の特性を有していると考えられ、分類されている砂州形態のモードと実際の砂州形態とが結びつかない場合が存在することを示している。このことは、治水計画における護岸の配置計画のみならず、河床の微地形に大きく支配される河川環境を考えるに当たり極めて注意を要することとなる。

渡邊らは、水理条件として単列砂州が形成されるとされる領域と複列砂州が形成されるとされる領域の複数を設定し、砂州の形成過程を把握する実験を行う⁴⁾とともに、複列砂州のモード減少過程をさらに詳細に検討を行うことを目的として、砂州の発達過程について弱非線形解析を用いて検討を行っている⁵⁾。その際簡単のため、単列砂州と複列砂州をそれぞれ独立の河床波として相互の干渉を無視して解析を進めている。その中で、実験結果との比較においては複列砂州と単列砂州をそれぞれ独立の波としても複列砂州から単列砂州

へのモード現象は説明できるとしているが、本研究ではさらに一歩進め、複列砂州と単列砂州のモード間の干渉を非線形解析に取り入れ、モード間の干渉の程度を明らかとすることを目的としている。また、非線形性の強いモード間の干渉を弱非線形解析でどの程度まで表現できるかについてもあわせて考察を行う。

2. モード干渉を考慮した増幅率展開法

(1) 基礎式とその無次元化

川幅 $2\tilde{B}$ の直線水路における拡散項を省略した定常2次元浅水流式と連続の式および掃流砂を対象とした流砂連続式は、座標系を図-1 のようにとると、式 (1) ~ (4) で表される。

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{g} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{\tau}_x}{\tilde{\rho} \tilde{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{g} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\rho} \tilde{D}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\tilde{U} \tilde{D})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (\tilde{V} \tilde{D})}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{1-p} \left(\frac{\partial \tilde{Q}_{bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{Q}_{by}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\tilde{t}$; 時間、 $\tilde{x}, \tilde{y}$; それぞれ縦断方向および横断方向座標軸、 $\tilde{U}, \tilde{V}$; それぞれ $\tilde{x}$ 軸方向および $\tilde{y}$ 軸方向の流速、 $\tilde{H}$; 水位、 $\tilde{D}$; 水深、 $\tilde{\eta}$; 河床高 ($= \tilde{H} - \tilde{D}$)、 $\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y$; それぞれ $\tilde{x}$ 軸方向および $\tilde{y}$ 軸方向の剪断力、 $\tilde{Q}_{bx}, \tilde{Q}_{by}$;

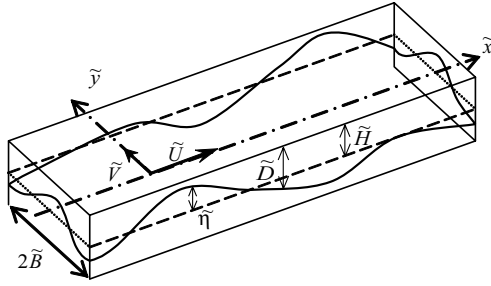


図-1 座標系

それぞれ $\tilde{x}$ 軸方向および $\tilde{y}$ 軸方向の掃流砂量、 $\tilde{\rho}$ ；水の密度、 $\tilde{g}$ ；重力加速度、 p ；河床の空隙率である。なお、各記号に付されている $\sim$ は次元を有していることを表す記号である。

式 (1)～(4) は、平坦河床上の等流の諸元を基に、 $(U, V) = (\tilde{U}, \tilde{V}) / \tilde{U}_0$ 、 $D = \tilde{D} / \tilde{D}_0$ 、 $H = \tilde{H} / (F_0^2 \tilde{D}_0)$ 、 $(Q_{bx}, Q_{by}) = (\tilde{Q}_{bx}, \tilde{Q}_{by}) / (\delta \tilde{g} \tilde{d}_0^3)^{1/2}$ 、 $(\tau_x, \tau_y) = (\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y) / (\tilde{\rho} \tilde{U}_0^2)$ 、 $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}) / \tilde{B}$ 、 $t = \tilde{t} / (\tilde{B} / \tilde{U}_0)$ で無次元化を行うと、式 (5)～(8) となる。ここで、添え字の $_0$ は等流時の値を示している。また、 $\tilde{d}_s$ ；河床材料の粒径、 δ ；河床材料の水中比重、 $Q_0 = (\delta \tilde{d}_s^3)^{1/2} / [F_0 (1 - p)]$ である。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \beta \frac{\tau_x}{D} = 0 \quad (5)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \beta \frac{\tau_y}{D} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial (UD)}{\partial x} + \frac{\partial (VD)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Q_0 \left(\frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

(2) 通常の摂動展開

通常単列砂州や複列砂州をそれぞれ単独で考える場合にはこれらの式に、 (U, V, H, D) を式 (9)～(13) で示される形で摂動パラメータを $\varepsilon^{1/2}$ として展開することとなる。

$$\begin{aligned} (U, V, H, D) = & (1, 0, H_0, 1) + \varepsilon^{1/2} (U_1, V_1, H_1, D_1) \\ & + \varepsilon^{2/2} (U_2, V_2, H_2, D_2) \\ & + \varepsilon^{3/2} (U_3, V_3, H_3, D_3) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (U_1, V_1, H_1, D_1) = & \begin{cases} A_{(T)} (S_1 u_{111}, C_1 v_{111}, S_1 h_{111}, S_1 d_{111}) E_1 + c.c. \\ \quad ; \text{mode} = 1 \\ A_{(T)} (C_2 u_{121}, S_2 v_{121}, C_2 h_{121}, C_2 d_{121}) E_1 + c.c. \\ \quad ; \text{mode} = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$(U_2, V_2, H_2, D_2) =$$

$$\begin{cases} A_{(T)}^2 E_2 [(C_2 u_{222}, S_2 v_{222}, C_2 h_{222}, C_2 d_{222}) \\ \quad + (u_{202}, v_{202}, h_{202}, d_{202})] + c.c. \\ + A_{(T)} \bar{A}_{(T)} [(C_2 u_{220}, S_2 v_{220}, C_2 h_{220}, C_2 d_{220}) \\ \quad + (u_{200}, v_{200}, h_{200}, d_{200})] \\ + (0, 0, H_{200}, 0) \quad ; \text{mode} = 1 \\ (U_2, V_2, H_2, D_2) = \\ A_{(T)}^2 E_2 [(S_4 u_{242}, C_4 v_{242}, S_4 h_{242}, S_4 d_{242}) \\ \quad + (u_{202}, v_{202}, h_{202}, d_{202})] + c.c. \\ + A_{(T)} \bar{A}_{(T)} [(S_4 u_{240}, C_4 v_{240}, S_4 h_{240}, S_4 d_{240}) \\ \quad + (u_{200}, v_{200}, h_{200}, d_{200})] \\ + (0, 0, H_{200}, 0) \quad ; \text{mode} = 2 \end{cases} \quad (11)$$

$$(U_3, V_3, H_3, D_3) =$$

$$\begin{cases} A_{(T)}^2 \bar{A}_{(T)} (S_1 u_{311}, C_1 v_{311}, S_1 h_{311}, S_1 d_{311}) E_1 \\ \quad + c.c. + h.h. \quad ; \text{mode} = 1 \\ A_{(T)}^2 \bar{A}_{(T)} (C_2 u_{321}, S_2 v_{321}, C_2 h_{321}, C_2 d_{321}) E_1 \\ \quad + c.c. + h.h. \quad ; \text{mode} = 2 \end{cases} \quad (12)$$

$$(S_m, C_m, E_m) =$$

$$\left(\sin \left(\frac{1}{2} \pi m y \right), \cos \left(\frac{1}{2} \pi m y \right), \exp [m i (\lambda x - \omega t)] \right) \quad (13)$$

ここで、 $c.c.$ は直前の項の共役複素数、 $h.h.$ は高次の項であり、 m は河床波のモード数を表している。また、 $A_{(T)}$ は、微小攪乱の時刻 T における振幅であり、 T は微小攪乱の変動を表すために導入された時間スケールで流れの時間スケール t との関係は式 (14) で定義される。なお、 $\bar{A}_{(T)}$ は $A_{(T)}$ の共役複素数である。

$$T = \varepsilon t \quad (14)$$

すなわち、河床波の発達時間は流れの変化時間に比べて極めて遅いものとしている。

$\varepsilon^{3/2}$ のオーダーにおいて単列砂州および複列砂州それぞれについて式 (15) で表される Landou-Stuart 型の微分方程式を得る。

$$\frac{dA_{(T)}}{dT} + \alpha_1 A_{(T)} + \alpha_2 A_{(T)}^2 \bar{A}_{(T)} = 0 \quad (15)$$

式 (15) の解は、式 (16) となる。

$$|A| = \sqrt{\frac{-\text{Re}(\alpha_1)}{\text{Re}(\alpha_2) - a_0 \text{Re}(\alpha_1) \exp[-2\text{Re}(\alpha_1) T]}} \quad (16)$$

ここで、 $|A|_0$ を微小攪乱の初期値とすると a_0 は式 (17) で表される。

$$a_0 = \frac{1}{|A|_0^2} + \frac{\text{Re}(\alpha_2)}{\text{Re}(\alpha_1)} \quad (17)$$

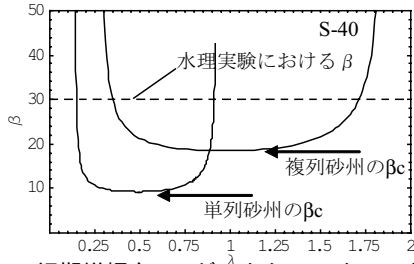


図-2 初期増幅率 Ω_0 が 0 となる β と λ の関係

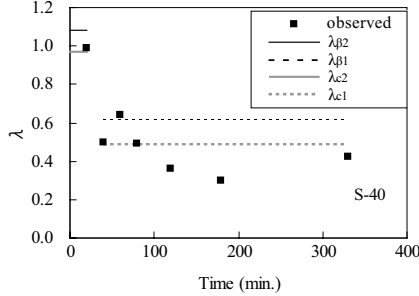


図-3 水理実験における波数の変化

上記の増幅率展開法により河床波の発達過程について非線形解析を行う際の摂動パラメータ $\varepsilon^{1/2}$ は、式 (18) で表されるように、初期擾乱が中立すなわち線形解析において初期増幅率 Ω_0 が 0 となる最小の川幅水深比 β_c から対象としている条件における β の差の割合の平方根としている。

$$\beta = \beta_c (1 + \varepsilon) \quad (18)$$

このため、この非線形解析手法は対象とする現象について川幅水深比 β が β_c の近傍である必要がある。なお、河床波の波数 λ についても式 (19) となるが、その影響は微小なものとし解析の都合上、 $\lambda_1 = 0$ と仮定している。

$$\lambda = \lambda_c + \varepsilon \lambda_1 \quad (19)$$

(3) モード干渉を考慮した増幅率展開法

この手法を用いて、複列砂州と単列砂州の発達過程を同じオーダーで同時に考える場合、図-2 にその一例を示すように、それぞれの河床波の初期増幅率 Ω_0 が 0 となる最小の川幅水深比である限界川幅水深比 β_c は異なる。増幅率展開法では、限界川幅水深比の近傍における現象を取り扱うという考え方をしていることから、そのままでは限界川幅水深比の異なる現象を同時に検討することが理論上できない。複列砂州から単列砂州へのモードの変化を扱う場合、それぞれの相互干渉をも取り込むことが不可欠となることから単列砂州と複列砂州とを同じオーダーで考慮する必要がある。このことを解決するため、以下に示すいくつかの仮定を設けて検討を試みることにする。

複数の河床波を同じオーダーで摂動展開する場合には統一された摂動パラメータが要求される。複列砂州と単列砂州を同時に考える必要のある場とは、一般に

言われている複列砂州の領域である。このため、複列砂州の初期増幅率 Ω_0 が 0 となる最小の川幅水深比である限界川幅水深比 β_c を対象とした場を考えると、摂動パラメータの統一を図る。なおこの場合、単列砂州を対象とする限界川幅水深比とは異なるため、単列砂州は初期増幅率を有することとなる。

過去に実施された、複列砂州から単列砂州へのモード減少過程をみた水理実験における波数の変化の一例を図-3 に示す。図には、線形解析によって求められる β_c における波数 λ_c と実験条件での β における波数 λ_β もあわせて記載している。なお、添え字の数字はモード数を表している。図に示されているように、モード減少に伴う波数が複列砂州の波数から概ねその 1/2 の波数へと遷移していることから、単列砂州の波数を複列砂州の波数の 1/2 に固定して現象を取り扱うこととする。

単列砂州および複列砂州について、上記の条件を与えると、そのままでは 1 次オーダーにおける方程式を満足することが不可能となるため、複列砂州の振幅はそのまま T の関数 $B(T)$ とするが、単列砂州では初期増幅率を有することを踏まえ、 T の関数 $A(T)$ に加え t の関数 $W(t)$ も取り入れることとする。このことは、モード 1 とモード 2 の発達に関する時間軸を変化させることにも相当している。

以上を踏まえ、式 (9) ~ (12) の代わりに式 (20) ~ (22) を用いることとする。

$$(U_1, V_1, H_1, D_1) =$$

$$\begin{aligned} & A(T) W(t) (S_1 u_{111}, C_1 v_{111}, S_1 h_{111}, S_1 d_{111}) E_1 + c.c. \\ & + B(T) (C_2 u_{122}, S_2 v_{122}, C_2 h_{122}, C_2 d_{122}) E_2 + c.c. \end{aligned} \quad (20)$$

$$(U_2, V_2, H_2, D_2) =$$

$$\begin{aligned} & A(T)^2 W(t)^2 E_2 [(C_2 u_{222}, S_2 v_{222}, C_2 h_{222}, C_2 d_{222}) \\ & + (u_{202}, v_{202}, h_{202}, d_{202})] + c.c. \\ & + A(T) \bar{A}(T) W(t) \bar{W}(t) [(C_2 u_{220}, S_2 v_{220}, C_2 h_{220}, C_2 d_{220}) \\ & + (u_{200a}, v_{200a}, h_{200a}, d_{200a})] \\ & + B(T)^2 E_4 [(C_4 u_{244}, S_4 v_{244}, C_4 h_{244}, C_4 d_{244}) \\ & + (u_{204}, v_{204}, h_{204}, d_{204})] + c.c. \\ & + B(T) \bar{B}(T) [(C_4 u_{240}, S_4 v_{240}, C_4 h_{240}, C_4 d_{240}) \\ & + (u_{200b}, v_{200b}, h_{200b}, d_{200b})] \\ & + \bar{A}(T) B(T) \bar{W}(t) E_1 [(S_1 u_{211}, C_1 v_{211}, S_1 h_{211}, S_1 d_{211}) \\ & + (S_3 u_{231}, C_3 v_{231}, S_3 h_{231}, S_3 d_{231})] + c.c. \\ & + A(T) B(T) W(t) E_3 [(S_1 u_{213}, C_1 v_{213}, S_1 h_{213}, S_1 d_{213}) \\ & + (S_3 u_{233}, C_3 v_{233}, S_3 h_{233}, S_3 d_{233})] + c.c. \\ & + (0, 0, H_{200}, 0) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
(U_3, V_3, H_3, D_3) = & \\
& (A_{(T)} {}^2 \bar{A}_{(T)} W_{(t)} {}^2 \bar{W}_{(t)} + A_{(T)} B_{(T)} \bar{B}_{(T)} W_{(t)}) E_1 \\
& (S_1 u_{311}, C_1 v_{311}, S_1 h_{311}, S_1 d_{311}) + c.c. \\
& + (B_{(T)} {}^2 \bar{B}_{(T)} + B_{(T)} A_{(T)} \bar{A}_{(T)} W_{(t)} \bar{W}_{(t)}) E_2 \\
& (C_2 u_{322}, S_2 v_{322}, C_2 h_{322}, C_2 d_{322}) + c.c. + h.h.
\end{aligned} \quad (22)$$

ここで、3桁の数字の添え字について、左端はオーダーの次数を、中央は微小攪乱の横断方向の波数を、右端は微小攪乱の縦断方向の波数を表す。これらを式(5)～(8)に代入して整理すると、 $\varepsilon^{1/2}$ のオーダー(1次のオーダー)について、式(23)および(24)が得られる。

$$\begin{bmatrix} p_{111,11} & p_{111,12} & p_{111,13} & p_{111,14} \\ p_{111,21} & p_{111,22} & p_{111,23} & p_{111,24} \\ p_{111,31} & p_{111,32} & p_{111,33} & p_{111,34} \\ p_{111,41} & p_{111,42} & p_{111,43} & p_{111,44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{111} \\ v_{111} \\ h_{111} \\ d_{111} \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} p_{122,11} & p_{122,12} & p_{122,13} & p_{122,14} \\ p_{122,21} & p_{122,22} & p_{122,23} & p_{122,24} \\ p_{122,31} & p_{122,32} & p_{122,33} & p_{122,34} \\ p_{122,41} & p_{122,42} & p_{122,43} & p_{122,44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{122} \\ v_{122} \\ h_{122} \\ d_{122} \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

式(23)および(24)が解を持つための条件としてそれぞれ行列式(25)および(26)が得られる。

$$\begin{vmatrix} p_{111,11} & p_{111,12} & p_{111,13} & p_{111,14} \\ p_{111,21} & p_{111,22} & p_{111,23} & p_{111,24} \\ p_{111,31} & p_{111,32} & p_{111,33} & p_{111,34} \\ p_{111,41} & p_{111,42} & p_{111,43} & p_{111,44} \end{vmatrix} = f_{111}(W_{(t)}, \beta_c, \lambda_c, \omega) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{vmatrix} p_{122,11} & p_{122,12} & p_{122,13} & p_{122,14} \\ p_{122,21} & p_{122,22} & p_{122,23} & p_{122,24} \\ p_{122,31} & p_{122,32} & p_{122,33} & p_{122,34} \\ p_{122,41} & p_{122,42} & p_{122,43} & p_{122,44} \end{vmatrix} = f_{122}(\beta_c, \lambda_c, \omega) = 0 \quad (26)$$

式(26)より、 $\beta_c, \lambda_c, \omega$ が実数である条件を付加すると $\beta_c, \lambda_c, \omega$ が決定される。さらに、これらを式(25)に代入することにより $W_{(t)}$ が求められる。すなわち、 $W_{(t)}$ は線形解析によって決定されることになる。式(23)および(24)において $d_{111} = 1, d_{122} = 1$ と置くことによって、1次オーダーの各波の振幅である $u_{111}, v_{111}, h_{111}, u_{122}, v_{122}, h_{122}$ が算出される。

$\varepsilon^{2/2}$ のオーダー(2次のオーダー)については、横断方向および縦断方向の波数がそれぞれ、(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 4), (2, 0), (4, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 0)の波の成分に関する方程式が式(23)および(24)と同じ形でそれぞれ得られる。

$$\begin{bmatrix} p_{2ij,11} & p_{2ij,12} & p_{2ij,13} & p_{2ij,14} \\ p_{2ij,21} & p_{2ij,22} & p_{2ij,23} & p_{2ij,24} \\ p_{2ij,31} & p_{2ij,32} & p_{2ij,33} & p_{2ij,34} \\ p_{2ij,41} & p_{2ij,42} & p_{2ij,43} & p_{2ij,44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2ij} \\ v_{2ij} \\ h_{2ij} \\ d_{2ij} \end{bmatrix} = q_{2ij} \quad (27)$$

ここで、 i および j はそれぞれ微小攪乱の横断方向および縦断方向の波数を表す。しかしこれらの方程式は右辺が0ではなく値を持つ非斉次方程式であり、1次オーダーで求められた値を用いて u_{211} 等の2次のオーダーの振幅が求められる。

なお、単列砂州を表す(1, 1)の波および複列砂州を表す(2, 2)の波についてもこのオーダーで得られることから、非線形解析を行う際の摂動パラメータを ε とすることによって、理論上2次のオーダーにおいて砂州の発達過程を表す $A_{(T)}$ および $B_{(T)}$ を決定することが可能であり、式(28)および(29)が得られるが、後述の水理実験条件を与えて計算を試みたところ、両者とも時間とともに発散した。このため、非線形解析を行う際の摂動パラメータを $\varepsilon^{1/2}$ として、解析を行うこととした。

$$\frac{dA_{(T)}}{dT} + \alpha_1 A_{(T)} + \alpha_2 B_{(T)} \bar{A}_{(T)} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dB_{(T)}}{dT} + \alpha_4 B_{(T)} + \alpha_5 A_{(T)}^2 = 0 \quad (29)$$

$\varepsilon^{3/2}$ のオーダー(3次のオーダー)について(1, 1)の波および(2, 2)の波について整理すると、それぞれ、式(30)および(31)が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dA_{(T)}}{dT} + \alpha_1 A_{(T)} + \alpha_2 A_{(T)} {}^2 \bar{A}_{(T)} \\ + \alpha_3 A_{(T)} B_{(T)} \bar{B}_{(T)} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_{(T)}}{dT} + \alpha_4 B_{(T)} + \alpha_5 B_{(T)} {}^2 \bar{B}_{(T)} \\ + \alpha_6 B_{(T)} A_{(T)} \bar{A}_{(T)} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

この両式を連立させて解くことにより $A_{(T)}$ および $B_{(T)}$ を求めることが可能となるが、解析的には解けないため以降は数値計算を用いることとなる。なお、 $W_{(t)}$ については係数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ の中に含めている。式(30)および(31)の左辺第4項が相互干渉を表す項となっているとともに、この左辺第4項を省略すると、式(15)と同じ形となることがわかる。

3. 水理実験結果への適用

モード相互間の干渉を考慮した非線形解析の結果を検証するため、複列砂州から単列砂州へのモード減少過程を扱った水理実験結果に適用する。用いた実験の水理諸元を表-1に示す。実験ケース3例について、S-30は通水初期に複列砂州が形成されその後単列砂州に遷移した実験であり、S-40は通水直後は複列砂州が形成

表-1 水理実験条件および計算条件

実験名	β	d_s	θ	$A_{(0)}$	$B_{(0)}$	β_c	$\varepsilon^{1/2}$
S-30	37.5	0.063	0.12	0.0065	0.0010	17.5	1.07
S-40	30.0	0.051	0.15	0.0020	0.0010	18.5	0.79
S-50	25.0	0.042	0.18	0.0010	0.0010	19.2	0.55

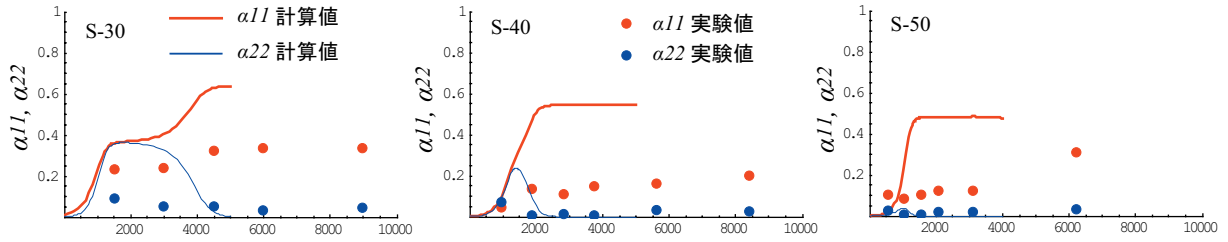


図-4 単列砂州および複列砂州成分の時間変化に関する実験値と1次オーダーの解析解

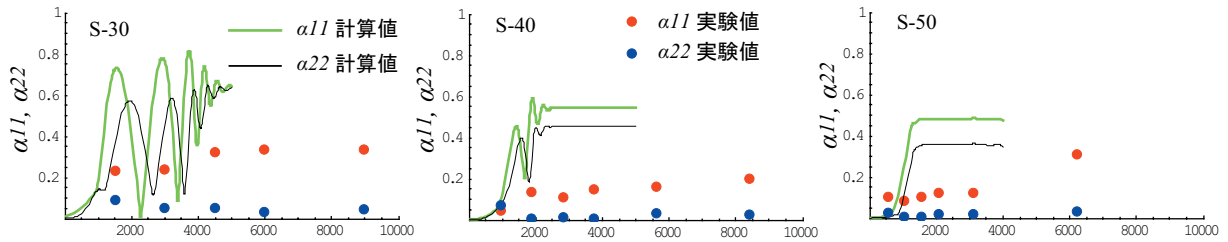


図-5 単列砂州および複列砂州成分の時間変化に関する実験値と(1次オーダー+2次オーダー)の解析解

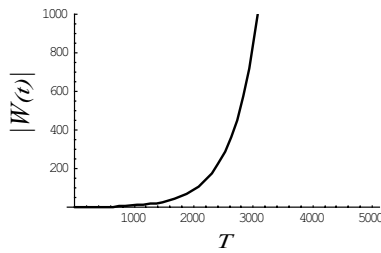


図-6 S-40における線形増幅率 $|W(t)|$

されたもののすぐに単列砂州に移したものである。また、S-50は通水直後から単列砂州が形成された実験である。

解析に用いた流砂量式および河床抵抗はそれぞれ、式(32)、(33)で表される Meyer-Peter & Müller の式および Engelund & Hansen の式とした。

$$\phi = (\theta - \theta_{cr})^{3/2} \quad (32)$$

$$C_f = \frac{1}{\left[6 + 2.5 \ln \left(\frac{1}{2.5d_s} \right)^2\right]} \quad (33)$$

ここで、 ϕ ；無次元の単位幅当たりの流砂量、 C_f ；河床抵抗係数、 $d_s = \tilde{d}_s / \tilde{D}_0$ 、 θ ；無次元掃流力、 θ_{cr} ；限界無次元掃流力である。両式は、実験結果を精度良く表しており、解析に用いることに問題無いと判断される。

図-4は、水理実験で得られた河床形状を波数解析した縦横断方向の波数とともに1の波の振幅 α_{11} および波数2の波の振幅 α_{22} と、弱非線形解析から得られる1次のオーダーの縦横断方向の波数とともに1の波の振幅 $|A_{(T)} W_{(t)} (F_0^2 h_{111} - d_{111})|$ および波数2の波

の振幅 $|B_{(T)} (F_0^2 h_{122} - d_{122})|$ を比較したものである。計算値が実験値に比較して数倍程度大きな値を示し、十分な精度で振幅を算定していない。しかし、川幅水深比が大きくなるに従って全体的な振幅が小さくなるとともに、複列砂州から単列砂州へと遷移する傾向は表現されている。特に波数2の波である複列砂州成分が時間とともに減衰する傾向は、捉えられている。なお、式(30)、(31)を解くにあたって $A_{(T)}$ 、 $B_{(T)}$ の初期値が要求されるが、今回の検討では、計算の安定性から表-1に示す値を用いることとした。また、解析において2次のオーダーにおいても縦横断方向に波数1の波 $|\bar{A}_{(T)} \bar{W}_{(t)} B_{(T)} (F_0^2 h_{211} - d_{211})|$ と波数2の波 $|A_{(T)}^2 W_{(t)}^2 (F_0^2 h_{222} - d_{222})|$ が出現する。これらについても考慮して、河床波の波高を水理実験結果と比較したものが図-5である。摂動パラメータ $\varepsilon^{1/2}$ が大きくなるに従って解が時間的に振動していることがわかる。これは、Pornprommin ら⁶⁾が指摘しているように川幅水深比が大きくなるに従って振幅の不規則性が増すことを表現しているとも考えられる。しかし一方で図-6に示すS-40における $|W_{(t)}|$ の値の時間変化を見ると、時間とともに発散する傾向を持っていることがわかる。この不規則性は、表-1に示すとおり摂動パラメータ $\varepsilon^{1/2}$ が大きくなるに従って計算の安定のため B_0 に対して A_0 を大きくする必要がある点を考えあわせると、本来増幅率が0の近傍での現象を扱うという前提を持つ手法に線形の増幅率 $W_{(t)}$ を導入するとともに、増幅率の比較的大きい領域に当てはめたことによる影響とも考え

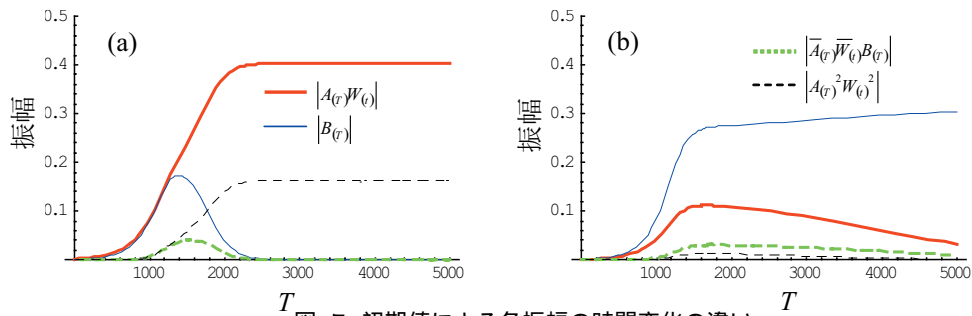


図-7 初期値による各振幅の時間変化の違い

られる．なお， $W(t)$ がかなり大きな値を示しているにもかかわらず，各振幅は発散せず一定値を保つ傾向も示している．この不規則性に関しては今後の課題である．このような課題は残るものの，図-4 および図-5 の結果を比較すると，1 次のオーダーにおける波数 1 の波の振幅 $|A(T)W(t)| (F_0^2 h_{111} - d_{111})$ が卓越して 1 次のオーダーにおける波数 2 の波の振幅 $|B(T)| (F_0^2 h_{122} - d_{122})$ が小さくなっても 2 次のオーダーにおける波数 2 の波の振幅 $|A(T)^2 W(t)^2 (F_0^2 h_{222} - d_{222})|$ の成長により複列砂州の形状特性が維持されることを表しており，実験結果による考察⁴⁾と一致する結果を得た．

4. モード減少過程に関する考察

水理実験結果の河床形状を定量的に十分表現できておらず，どこまで現象を表現しているかは不明であるが，複列砂州から単列砂州への遷移過程についての特性はある程度表現できていることから，今回の弱非線形解析結果を利用して，複列砂州から単列砂州への遷移過程に与えるモード間の相互干渉について考察を行うこととする．なお，用いる条件は，複列砂州から単列砂州へのモード減少が明確に生じ，摂動パラメータ $\varepsilon^{1/2}$ が出来るだけ小さいケースとして，水理実験の S-40 を対象とすることとした．図-7(a) は，S-40 の解析にあたり初期値 $A(0)$ ， $B(0)$ の値をそれぞれ，0.002，0.001 としたときの $|A(T)W(t)|$ ， $|B(T)|$ ， $|\overline{A(T)}\overline{W(t)}B(T)|$ および $|A(T)^2 W(t)^2|$ の時間変化を見たものである．すなわち， $A(T)$ が $B(T)$ に対して卓越するという条件である． $|B(T)|$ は通水初期において $|A(T)W(t)|$ と同様に発達する傾向を示すものの， $|A(T)W(t)|$ がある程度大きくなると減衰に転ずる結果となっている．この結果は，水理実験結果と同様の結果となる．一方，初期値 $A(0)$ ， $B(0)$ の値をそれぞれ，0.001，0.001 としたときすなわち，どちらも同じ初期値をとった場合の結果を図-7(b) に示す．この場合は，水理実験の現象と異なる傾向を示し， $|A(T)W(t)|$ が減衰する一方で $|B(T)|$ が発達する結果を示している．このように初期値を変化させた場合傾向が異なる結果が得られるが，1 次のオーダーにおいては，どちらの場合もどちらか一方のモードのみが発

達できることを示している．このことは，モード間の干渉が強く，どちらか一方の影響により他方が発達できないことを表しているとも考えられる．このことにより，モード干渉を考慮せずに行った非線形解析手法⁵⁾においても，モードの減少過程をある程度表現できたのではないかと考えられる．なお，初期値の違いによりこのような現象の違いを引き起こすことについては，さらに検討を要する．

5. おわりに

複列砂州からモード減少が生じ単列砂州へ移行する過程の現象把握のため，モード間の干渉を表現できる弱非線形解析を実施した．定量的な評価には問題が残るものの，モード減少過程の定性的な特性は再現できているものと考えられる．また，両方のモードが同一のオーダーでは，両者がともに発達することができない結果を得た．今回解析に導入した線形増幅率の発散の影響および初期値によって現象が異なる結果が得られたことについては，今後の課題である．

謝辞:本研究は，国土交通省北海道開発局の受託業務，河川環境管理財団の河川整備基金助成ならびに日本学術振興会科学研究費（基盤研究 (B)(1)16360242）による補助を受けた．記して謝意を表す．

参考文献

- 1) 藤田裕一郎，永田順宏，村本嘉雄：多列砂州の形成・変化過程と細砂河床の影響，土木学会水工学論文集第 36 巻，pp23-28，1992.
- 2) 藤田裕一郎，赤松英樹，村本嘉雄：網状流路の形成過程，土木学会第 31 回水理講演会論文集，pp695-700，1987.
- 3) 竹林洋史，江頭進治：自己形成流路の形成過程と形成水理条件，土木学会論文集，Vol.677，pp75-86，2001.
- 4) 渡邊康玄，桑村貴志：複列砂州のモード減少過程に関する水理実験，土木学会水工学論文集，第 48 巻，pp997-1002，2004.
- 5) 渡邊康玄，桑村貴志：砂州のモード減少過程水理実験への安定解析の適用，土木学会水工学論文集，第 49 巻，pp997-1002，2005.
- 6) Pornprommin, A., N. Izumi and T. Tsujimoto: WEAKLY NONLINEAR ANALYSIS OF MULTIMODAL FLUVIAL BARS, Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE, Vol.48, pp1009-1014, 2004.

(2005. 9. 30 受付)