

階段状水路における空気混入射流の特性に対する レイノルズ数の影響

EFFECT OF REYNOLDS NUMBER ON CHARACTERISTICS OF AERATED FLOW IN STEPPED CHANNELS

高橋 正行¹・安田 陽一²・大津 岩夫³

Masayuki TAKAHASHI, Youichi YASUDA, and Iwao OHTSU

¹正会員 博(工) 日本大学助手 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

²正会員 博(工) 日本大学助教授 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

³フェロー会員 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

Stepped channels are effective for dissipating the energy of high-velocity flows on chutes. For hydraulic design of stepped channels, it is important to clarify the effect of Reynolds number on characteristics of skimming flows in stepped channels. This paper presents the effect of Reynolds number on the air-concentration and the mean velocity profiles of skimming flows. The analysis of experimental data reveals that the effect of Reynolds number Re on the air-concentration and the mean velocity profiles is negligible in the range of $4.0 \times 10^4 \leq Re \leq 3.7 \times 10^5$. Also, Froude similarity law of aerated flows in stepped channels has been discussed, and an application to hydraulic design of stepped channels has been explained in accordance with the relation of scale between proto-type and experimental models.

Key Words: Scale effect, Reynolds number, stepped channel, aerated flow, skimming flow, Froude similarity law

1. まえがき

落差を有する構造物を流下する高速流を減勢させる方法として階段状水路の利用が有効である。階段状水路で形成される流れは空気混入を伴う場合が多く(写真 - 1), この空気混入射流の水深や流速を求めることは水工設計上重要である。

階段状水路において形成される流況は Skimming flow (図 - 1(a)), Nappe flow (図 - 1(c)) および Transition flow (図 - 1(b)) である^{1), 2)}。

Boes and Hager は Skimming flow を対象に空気混入率分布形状の変化について実験的検討を行い, レイノルズ数 Re ($Re = q_w / \nu_w$; q_w は単位幅流量 ($q_w = Q_w / B$; Q_w は水のみの流量; B は水路幅), ν_w は水の動粘性係数) が $Re \leq 1.0 \times 10^5$ の場合に空気混入の分布特性に対してレイノルズ数の影響があるとしている³⁾。しかしながら, aerated flow 内の空気混入率の分布特性に対するレイノルズ数 Re の影響を明らかにするためには資料の解析方法に検討の余地がある。また, 階段状水路における空気混入射流(写真 - 1 参照)の aerated flow depth および流速分布に対するレイノルズ数 Re の影響については不明である。

本研究では, Skimming flow の空気混入率の分布, aerated flow depth, および流速分布の実験結果についてフルード



写真 - 1 階段状水路の Skimming flow

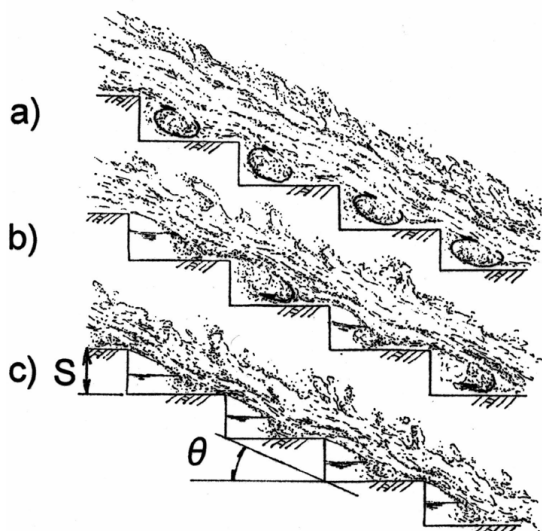


図 - 1 階段状水路の流況

a) Skimming flow, b) Transition flow, c) Nappe flow

表 - 1 実験条件

	θ (deg.)	S (cm)	H_{dam} (cm)	B (cm)	S/d_c	R_e [$\times 10^{-4}$]
Run 1	55	10	249	50	1	8.2
Run 2	55	5	249	50	1	2.9
Run 3	55	2.5	82	40	1	1.3
Run 4	55	1.25	82	40	1	0.4
Run5	55	2.5	153	40	0.8	1.6
Run6	55	5	249	50	0.5	7.8
Run7	55	2.5	249	50	0.5	4.2
Run8	55	1.25	249	50	0.5	1.5
Run9	55	0.63	249	50	0.5	0.5
Run10	55	2.5	249	50	0.25	12
Run11	55	1.25	249	50	0.25	4.3
Run12	55	0.63	249	50	0.25	1.5

S : ステップ高さ, d_c : 限界水深($d_c = (q_w^2/g)^{1/3}$), q_w : 単位幅流量, R_e : レイノルズ数 ($R_e = q_w/\nu_w$), θ : 水路傾斜角度, H_{dam} : ダム高さ

の相似則が適用できるレイノルズ数 R_e の範囲を明らかにした。これによって、水工設計に必要な模型実験の規模が定められるようになった。

2. 実験方法

階段状水路における空気混入率の分布特性を明らかにするため、WES の標準堤頂を有する階段状水路模型を用いて表 - 1 に示す条件のもとで実験を行った (図 - 2 参照)。空気混入率 C [$C = (\text{空気量})/(\text{空気量} + \text{水の量})$] の測定は点電極型ボイド率計を用い、検出部を edge section (図 - 3 参照) に設置して行った (採取間隔 5ms, 採取時間 60sec)。なお、検出部の設置の精度は $\pm 0.5\text{mm}$ 以内である。

3. 空気混入率分布に対するレイノルズ数の影響

擬似等流状態における Skimming flow の aerated flow depth $y_{0.9}$ 内の断面平均された空気混入率 C_m は次の関係で示されるものと考えられる。

$$C_m = F(S, \theta, d, V_w, \mu_w, \rho_w, \sigma_{wa}, g) \quad (1)$$

ここに、 S はステップ高さ、 θ は水路傾斜角度、 d は水のみに換算をした水深^{2), 5)~8)} ($d = \int_0^{y_{0.9}} (1-C) dy = (1-C_m)y_{0.9}$)、

V_w は断面平均流速 ($V_w = q_w/d$)、 μ_w は水の粘性係数、 ρ_w は水の密度、 σ_{wa} は水の表面張力、 g は重力加速度であり、 C_m は次式で定義されている^{2), 5)~8)}。

$$C_m = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} C dy \quad (2)$$

なお、 $y_{0.9}$ は $C = 0.9$ となる y (y は仮想底面からの垂直座標 (図 - 3 参照)) である。

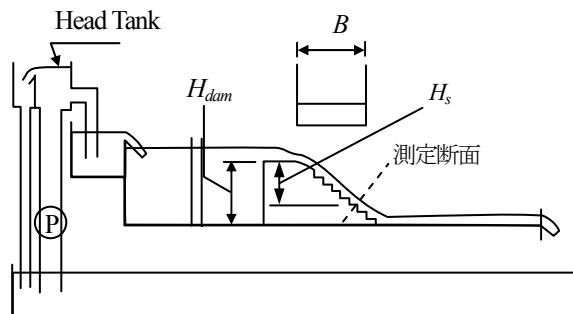


図 - 2 実験水路

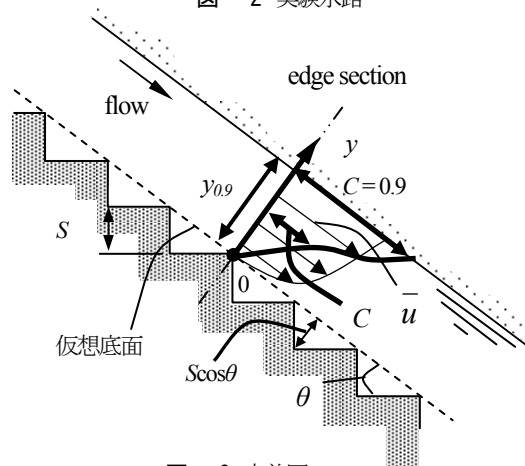


図 - 3 定義図

次元解析的考察から (1) 式の関係は次のように変換される。

$$C_m = F\left(\frac{S \cos \theta}{d}, R_e, F_r, W_e, \theta\right) \quad (3)$$

ここに、 R_e はレイノルズ数 [$R_e = q_w/\nu_w$; ν_w は水の動粘性係数]、 W_e はウェバー数 [$W_e = \rho_w d V_w^2 / \sigma_{wa}$]、 F_r はフルード数 [$F_r = V_w / (g d \cos \theta)^{0.5}$] である。

Skimming flow における aerated flow の内部特性について検討するためには、aerated flow の代表水深の選定が重要である。ここでは、aerated flow depth を $y_{0.9}$ と定め、連続の式を満

足するか否かに着目し、その妥当性について検討する。

$0 \leq y \leq y_{0.9}$ の範囲で測定された時間平均流速 $\bar{u}$ と空気混入率 C から単位幅流量 q_w' は次のように求められる^{2),4)}。

$$q_w' = \int_0^{y_{0.9}} (1 - C) \bar{u} dy \quad (4)$$

(4) 式で求められた単位幅流量 q_w' は水のみの流量の実測値から求めた単位幅流量 q_w ($q_w = Q_w/B$; Q_w は刃型堰を用いて測定された流量) とほぼ一致する⁴⁾。すなわち、代表水深として aerated flow depth $y_{0.9}$ を用いることで連続の式 ($q_w' = q_w$) を満足する。また、 $y_{0.9}$ を空気混入射流の代表水深とし、空気混入射流の密度 ρ を $\rho = \rho_w(1 - C)$ として表わすことで、空気混入射流のエネルギーと平均流速を算定することができる^{5),6)}。以上より、aerated flow depth として $y_{0.9}$ を用いることとする。

擬似等流状態で断面中央部における aerated flow depth $y_{0.9}$ 内の空気混入率 C は (2) 式と (3) 式の関係から次のように表示されるものと考えられる。

$$C = F\left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{S \cos \theta}{d}, R_e, F_r, W_e, \theta\right) \quad (5)$$

ウェバー数 W_e は liquid parameter ($= \rho_w \sigma_{wa}^3 / g \mu_w$) を用いると次のように示される。

$$W_e = (\rho_w \sigma_{wa}^3 / g \mu_w) (F_r^2 R_e^4)^{1/6} \quad (6)$$

階段状水路の場合、水と空気とが対象となることから、liquid parameter はほぼ一定値を示す。このことから、ウェバー数はレイノルズ数とフルード数とによって示すことができる。

擬似等流状態の Skimming flow における抵抗係数 f は次式で定義されている⁵⁾。

$$f = \frac{4\tau_0}{\rho_w V_w^2 / 2} = 8 \left(\frac{d}{d_c} \right)^3 \sin \theta \quad (7)$$

ここに、 τ_0 は仮想底面に作用しているせん断応力 ($\tau_0 = \rho_w g d \sin \theta$) である。

フルード数 F_r および相対粗度高さ $S \cos \theta / d$ は (7) 式を用いると次のように表すことができる。

$$F_r = \frac{V_w}{\sqrt{g d \cos \theta}} = \left(\frac{d_c}{d} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{8 \tan \theta}{f}} \quad (8)$$

$$\frac{S \cos \theta}{d} = \frac{S}{d_c} \frac{d_c}{d} \cos \theta = \frac{S}{d_c} \sqrt{\frac{8 \sin \theta}{f}} \cos \theta \quad (9)$$

(6)、(8) および (9) 式を用いると、(5) 式の関係は次のように変換される。

$$C = F\left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{S}{d_c} \sqrt{\frac{8 \sin \theta}{f}} \cos \theta, R_e, \sqrt{\frac{8 \tan \theta}{f}}, \left(\frac{8 \tan \theta}{f}\right)^{\frac{1}{6}} R_e^{\frac{2}{3}}, \theta\right) \quad (10)$$

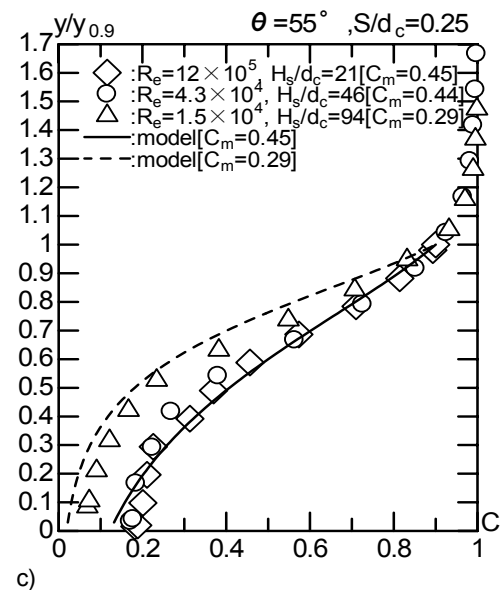
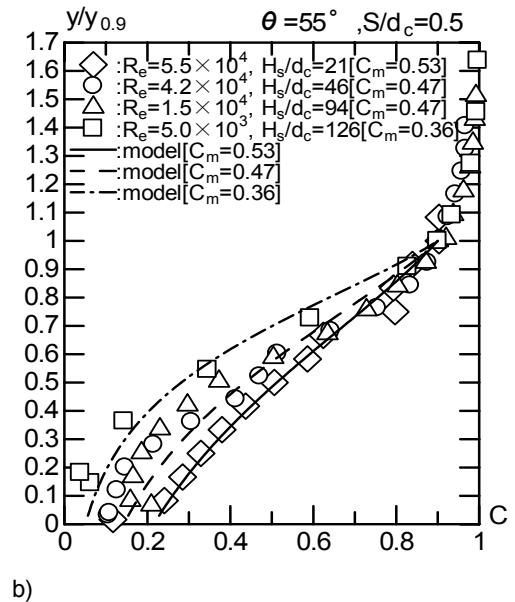
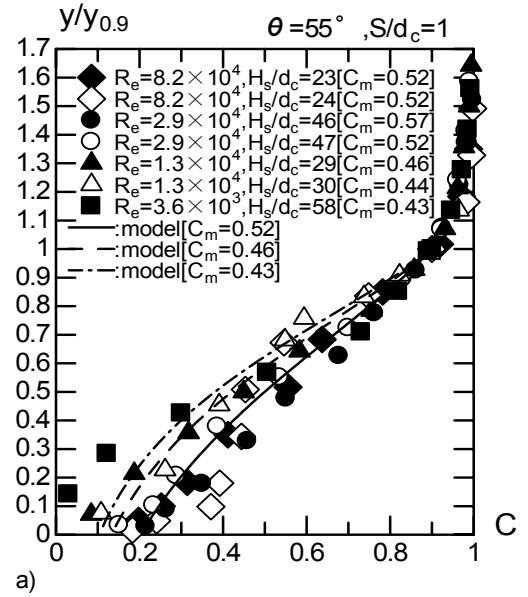


図 - 4 空気混入率分布に対するレイノルズ数の影響

H_s : 図 - 2 参照, model: 気泡の拡散モデル²⁾

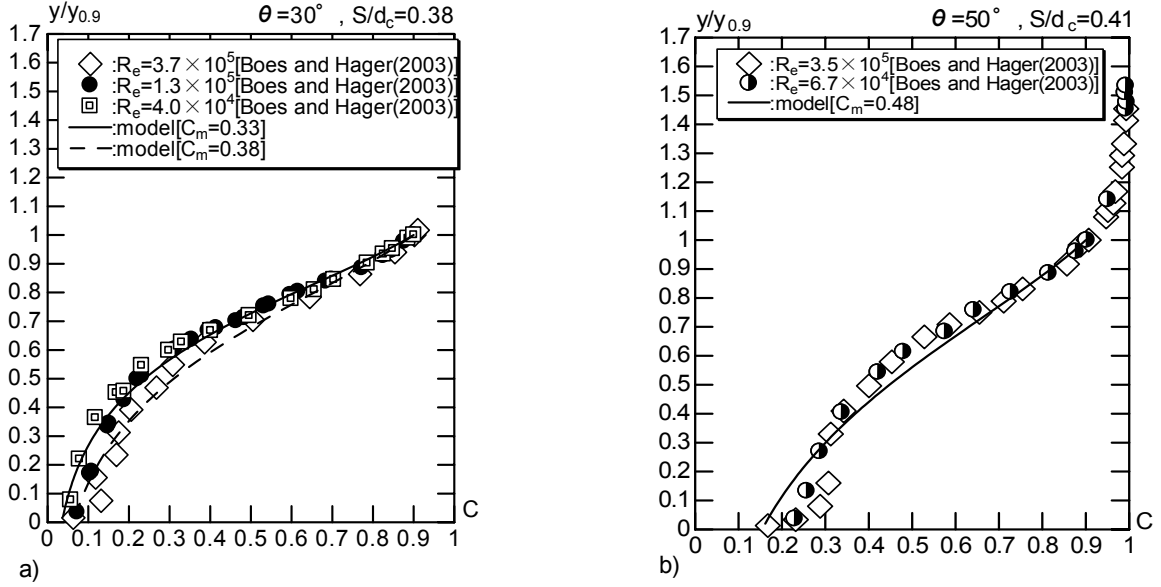


図 - 5 Boes and Hager による空気混入率分布の測定結果

一方、擬似等流状態の Skimming flow における抵抗係数 f は次元解析的考察から一般に次の関係で示されるものと考えられる⁵⁾。

$$f = F\left(\frac{S \cos \theta}{d}, F_r, \theta, R_e\right) \quad (11)$$

(8), (9)式を用いると、 f は次の関係で示される⁵⁾。

$$f = \left(\frac{S}{d_c}, \theta, R_e\right) \quad (12)$$

(10)式は(12)式の関係を用いると次のように整理される。

$$C = F\left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{S}{d_c}, R_e, \theta\right) \quad (13)$$

なお、 S/d_c は $S/d_c = V/(gS)^{0.5}$ と表すことができ、Step Froude Number と解釈⁵⁾することもできる。

与えられた水路傾斜角度 θ 、相対ステップ高さ S/d_c に対して空気混入率 C を(13)式の関係で整理したものを図 - 4 に示す。なお、図中の各線は空気混入率の分布形状に関して Chanson が提案した気泡の拡散モデル²⁾に基づいて描かれている。図 - 4 に示されるように、水路傾斜角度 $\theta = 55^\circ$ の場合、レイノルズ数 R_e が $3.6 \times 10^3 \leq R_e < 3.0 \times 10^4$ では、空気混入率 C の分布はレイノルズ数 R_e によって変化する。特に、レイノルズ数 R_e が小さくなるにつれて空気混入率 C が小さくなっている。これは、レイノルズ数が小さくなるにつれて、粘性の影響が大きくなり、かつ乱れ強さが小さくなったために、水面から取込まれた気泡が仮想底面近くまで到達しにくくなったものと推論される。

レイノルズ数 R_e が $3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$ 以上になると、本実験範囲ではレイノルズ数 R_e の変化による空気混入率 C

の分布の変化は認められない。

Boes and Hager の実験値³⁾を(13)式の関係で整理したものを図 - 5 に示す。図に示されるように、空気混入率 C の測定精度を勘案すると彼らの実験範囲($4.0 \times 10^4 < R_e \leq 3.7 \times 10^5$)においては C の分布形状に対するレイノルズ数 R_e の影響は認められない。

すなわち、(13)式の関係で空気混入率 C の分布を整理した場合、Boes and Hager の実験結果($\theta = 30^\circ$ および 50°)を含め $3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4 < R_e \leq 3.7 \times 10^5$ においては空気混入率 C の分布に対するレイノルズ数 R_e の影響が認められない。

4. aerated flow depth $y_{0.9} / d_c$ に対するレイノルズ数 R_e の影響

擬似等流状態の aerated flow depth $y_{0.9} / d_c$ に対するレイノルズ数 R_e の影響を図 - 6(a) に示す。また、図 - 6(b) には Boes による実験結果⁸⁾を示す。

図に示されるように、 $3.6 \times 10^3 \leq R_e < 3.0 \times 10^4$ の範囲では、aerated flow depth の無次元量 $y_{0.9} / d_c$ はレイノルズ数 R_e によって変化する。すなわち、 R_e が小さくなると、 $y_{0.9} / d_c$ の値は小さくなる。また、 $3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4 \leq R_e \leq 3.0 \times 10^5$ になると、 $y_{0.9} / d_c$ に対する R_e の影響は認められない。

5. 流速分布に対するレイノルズ数 R_e の影響

次元解析的考察から、Skimming flow の擬似等流状態における edge section での流下方向の時間平均流速 $\bar{u}$ は次の関係で示される。

$$\frac{\bar{u}}{U_{0.9}} = F\left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{S \cos \theta}{d}, \theta, F_r, R_e, W_e\right) \quad (14)$$

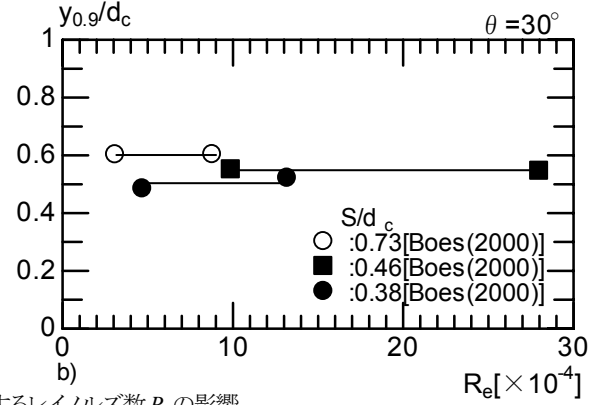
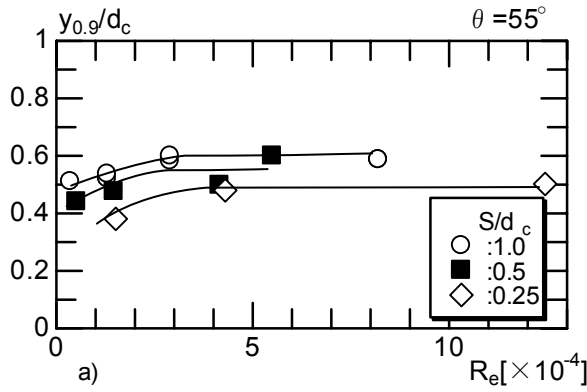


図 - 6 $y_{0.9}/d_c$ に対するレイノルズ数 Re の影響

ここに, $U_{0.9}$ は $y=y_{0.9}$ での $\bar{u}$ である.

(6), (7), (8), および (9) 式の関係を用いると (14) 式の関係は次のように示される.

$$\frac{\bar{u}}{U_{0.9}} = F\left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{S}{d_c}, \theta, Re\right) \quad (15)$$

Skimming flow における流速 $\bar{u}$ について Boes and Hager の実験値³⁾を(15)の関係で整理したものを図 - 7 に示す. 図に示されるように, $4.0 \times 10^4 \leq Re \leq 3.7 \times 10^5$ において, Re の変化による流速分布の変化はほとんど認められず, 流速分布は $1/6$ 乗則で近似される. なお, $30^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ でかつ $4.0 \times 10^4 \leq Re \leq 3.7 \times 10^5$ では, (15) 式の関係で整理された流速分布は $1/6$ 乗則によって近似される⁶⁾.

6. 空気混入射流の平均流速 V_{ave} に対するレイノルズ数 Re の影響

空気混入射流中の aerated flow depth 内の平均流速 V_{ave} を次のように定義する⁶⁾.

$$V_{ave} = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} \bar{u} dy \quad (16)$$

空気混入射流の平均流速 V_{ave} と水のみに換算された水深 d から求められる断面平均流速 $V_w (=q_w/d)$ との比は $y^+ = y/y_{0.9}$ および $u^+ = \bar{u}/U_{0.9}$ を用いると次式で示される⁶⁾.

$$\frac{V_{ave}}{V_w} = \frac{\left(1 - \int_0^1 C dy^+\right) \int_0^1 u^+ dy^+}{\int_0^1 (1 - C) u^+ dy^+} \quad (17)$$

(17) 式より, V_{ave}/V_w の値は aerated flow depth $y_{0.9}$ 内の流速 u^+ および空気混入率 C の分布形状から求められる.

$4.0 \times 10^4 \leq Re \leq 3.7 \times 10^5$ において空気混入率分布および流速分布に対する Re の影響が認められないことから, V_{ave}/V_w に対する Re の影響も $4.0 \times 10^4 \leq Re \leq 3.7 \times 10^5$ については認められない.

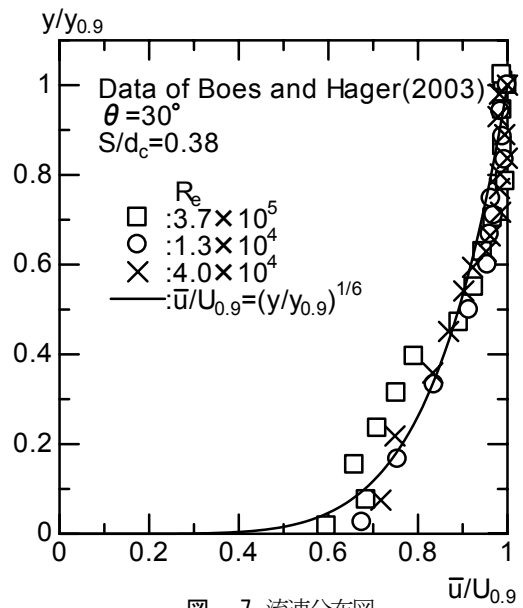


図 - 7 流速分布図

なお, 著者らは $30^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ の Skimming flow を対象に, 空気混入率の分布形状を気泡の拡散モデルを用い, 流速分布は $1/6$ 乗則で近似することによって, V_{ave} が V_w とほぼ等しい値 $[V_{ave} = (1.02 \sim 1.09)V_w]$ になることを示している⁶⁾.

7. Skimming flow におけるフルードの相似則の適用範囲

階段状水路の水工設計において, 与えられた水路幅 B , 落差 H_{dam} , 水路傾斜角度 θ および水のみの流量 Q_w に対して, Skimming flow が形成されるステップ高さ S を設定したとき, 階段状水路終端での流速, 水深がどの程度の大きさになるのかを推定する必要がある.

Skimming flow の抵抗係数 f および aerated flow の流速分布に対してレイノルズ数 Re の影響を無視できる場合にフルードの相似則を適用できる.

抵抗係数 f については (7) 式より次のように変換することができる.

$$f = \frac{4\tau_0}{\frac{1}{2}\rho_w V_w^2} = \frac{8 \int_0^{y_{0.9}} \rho g dy \sin \theta}{\rho_w (q_w/d)^2} \quad (18)$$

$$= 8 \left(\frac{y_{0.9}}{d_c} \int_0^1 (1-C) dy^+ \right)^3 \sin \theta$$

$R_e \geq 3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$ の場合、空気混入率 C の分布および相対 aerated flow depth $y_{0.9}/d_c$ に対して R_e の影響が認められない(3, 4 章参照)ことから、(18)式より f に対する R_e の影響も認められない。 f に対する R_e の影響が認められない場合には、(7)式より d/d_c に対する R_e の影響も認められない。また、 $d/d_c = V_d/V_w$ であることから、 V_d/V_w に対する R_e の影響も認められない。ここに、 V_c は限界流速である($V_c = q_w/d_c$)。なお、 $R_e \geq 4.0 \times 10^4$ の場合に R_e の影響を受けない V_{ave}/V_w の値を知ることができる。すなわち、抵抗係数 f と単位幅流量 q_w から d , V_w および V_c を算定し、 V_{ave}/V_w の値から V_{ave} を求め、フルードの相似則を用いて原型の d , $y_{0.9}$, V_w , V_{ave} が得られる。

著者らは最近、Skimming flow の流況区分、擬似等流状態が形成されるための水理条件、擬似等流状態における抵抗係数、擬似等流区間と不等流区間のエネルギーおよび断面平均された空気混入率 C_m を実験的に明らかにした⁵⁾。また、 V_{ave}/V_w の値を明確に示した⁶⁾。これらの結果は $R_e \geq 3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$ の実験に基づいて得られていることから、フルードの相似則に基づき、原型の水のみに換算された水深 d , aerated flow depth $y_{0.9}$ 、および空気混入射流の平均流速 V_{ave} が予測できる。

レイノルズ数 $R_e (= q_w / \nu_w)$ が $R_e < 3.0 \times 10^4$ の場合、Skimming flow の空気混入率分布および aerated flow depth に対するレイノルズ数の影響が無視できない。景観に配慮して、階段状水路を用いた流水美デザインを行う場合、 R_e が 3.0×10^4 以下となる場合もある。このような場合、レイノルズ数が小さくなるにつれて、white water の状態から徐々に透明感のある流れへと変化する。このような流れの流況特性を知り、流水美デザインに用いるためには模型と原型とを同寸法にした水理実験が必要である。

8. まとめ

階段状水路における Skimming flow の空気混入率分布、aerated flow depth、および流速分布に対するレイノルズ数 R_e の影響について検討した。得られた結果を以下に要約して述べる。

- ① 擬似等流状態における空気混入率 C は $C = F(y/y_{0.9}, S/d_c, R_e, \theta)$ の関係で表示されることを明らかにした。
- ② 擬似等流状態の Skimming flow の空気混入率 C の分布は $R_e < 3 \times 10^4$ の範囲ではレイノルズ数 R_e によって変化することを示した(図 - 4)。また、 $3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4 \leq R_e \leq 3.7 \times 10^5$ の範囲では空気混入率 C の分布に対する R_e の

影響が無視できることを明らかにした(図 - 4, 図 - 5)。

- ③ 擬似等流状態の aerated flow depth $y_{0.9}/d_c$ に対するレイノルズ数 R_e の影響について示した。すなわち、 $R_e < 3.0 \times 10^4$ の範囲では、 R_e が小さくなると、 $y_{0.9}/d_c$ は小さくなり、 $R_e \geq 3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$ になると、 $y_{0.9}/d_c$ に対する R_e の影響が無視できることを示した(図 - 6)。
- ④ 擬似等流状態における aerated flow の流下方向の流速分布について、Boes and Hager の実験値を用いて(15)の関係で整理すると、 $4.0 \times 10^4 \leq R_e \leq 3.7 \times 10^5$ の範囲では $\bar{u}/U_{0.9}$ に対するレイノルズ数の影響は認められないことを示した(図 - 7)。
- ⑤ 空気混入射流の平均流速 V_{ave} と水に換算した水深から求められる断面平均流速 V_w の比 V_{ave}/V_w が(17)式で示され、 V_{ave}/V_w に対する R_e の影響は $4.0 \times 10^4 \leq R_e \leq 3.7 \times 10^5$ では認められないことを説明した。
- ⑥ 階段状水路流れにおいて $R_e (= q_w / \nu_w) \geq 3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$ の実験結果はフルードの相似則を満足することを説明した。また、流量規模が小さく $R_e < 3.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$ の場合、水工設計に必要な水深・流速を得るためには原型と模型とが同寸法の水理模型実験が必要であることを説明した。

参考文献

- 1) Ohtsu, I., and Yasuda, Y.: "Characteristics of Flow Conditions on Stepped Channels.", *Proc. of the 27th Cong. IAHR*, Theme D, Water for a Changing Global Community, San Francisco, USA, pp.583-588, 1997.
- 2) Chanson, H.: *The Hydraulics of stepped chutes and spillways*, Balkema, Lisse, 2001.
- 3) Boes, R.M., and Hager, W.H.: "Two-Phase flow Characteristics of Stepped Spillways.", *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol.129, No.9, pp.661-670, 2003.
- 4) Boes, R.M.: Discussion of "Characteristics of Skimming Flow over Stepped Spillways.", *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol.125, No.4, pp.860-862, 2000.
- 5) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: "Flow Characteristics of Skimming Flows in Stepped Channels.", *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol.130, No.9, pp.860-869, 2004.
- 6) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: "Energy Head of Aerated Flows in Stepped Channels.", *Proc. of the 31th Cong. IAHR*, Theme D, IAHR, Seoul, Korea, pp.2890-2899, 2005.
- 7) Wood, I. R.: *Air Entrainment in Free-Surface Flows*, Balkema, Rotterdam, 1991.
- 8) Boes, R.M.: *Zweiphasenströmung und Energieumsetzung auf Grosskaskaden*, Ph.D thesis, ETH, Zürich, Switzerland, 2000. (In German.)

(2005. 9. 30. 受付)