

コロケート格子上の非圧縮性流体計算法に基づく浅水流方程式の数値解法

PREDICTION METHOD FOR SHALLOW WATER EQUATIONS BASED ON THE METHOD FOR INCOMPRESSIBLE FLUIDS WITH COLLOCATED GRID

牛島 省¹・山下 英夫²・藤岡 奨³・禰津 家久⁴

Satoru USHIJIMA, Hideo YAMASHITA, Susumu FUJIOKA and Iehisa NEZU

¹ 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 学生員 京都大学工学部 地球工学科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

³ 学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

⁴ フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper presents a computational method for shallow water equations on the basis of the prediction method proposed for incompressible Navier-Stokes equations on a collocated grid system. In the proposed method, the momentum equations are discretized with a semi-implicit method with respect to the water depth, h . The continuity equation is discretized implicitly and its numerical solutions are obtained by solving simultaneous equations. The unit flow rates, M and N , are corrected with the converged results for h . It has been shown that the proposed method is numerically stable and that higher-order schemes for convection terms, C-HSMAC and C-ISMAC methods, which have been proposed for the computations of incompressible flows, are available for shallow water equations as well.

KeyWords : shallow water flow, collocated grid, incompressible fluid, numerical stability

1. はじめに

静水圧分布を仮定して, 3次元流体の連続式と運動方程式を水深方向に積分して得られる浅水流方程式は, 河川の洪水伝搬や堤内地の氾濫などをはじめ, 水工学に関わる諸現象を記述する基礎式として重要である. この基礎式の解法としては, これまでに多くの検討がなされ, 実現象の予測に役立つ解法が確立されている.

差分法あるいは有限体積法による2次元浅水流方程式の解法に関しては, 運動方程式は基本的には陽的に離散化され, 数値解を代入演算により時間進行的に求めていく手法が多く見られる. 水深積分しない非圧縮性流体の解法として広く用いられているMAC系解法では, 圧力の収束計算が行われ, その結果を用いて流速が修正されるが, 浅水流方程式の計算では多くの場合にこのような手順は取られない.

上記のような2次元浅水流方程式の解法の実例としては, Euler陽解法により離散化された運動方程式の数値解を連続式に代入して, 次の時間ステップの水深を求めるといった解法¹⁾や, 時間方向に3点以上の定義点を用いるマルチ・レベルの陽解法^{2),3)}がある. これらの解法では, 運動方程式の底面摩擦項が陰的に扱われる場合もあるが, 水深 h と x, y 方向の単位幅流量 M, N の変数から構成される方程式系に対しては, 基

本的には陽的な取り扱いがなされている.

一方, 浅水流方程式に対して, 非圧縮性流体計算法に相当する, 水深 h の陰的な取り扱いと流速の修正操作が入る解法は比較的少数であるが, その例としてはCIP法に基づく解法がある^{4),5),6)}. これらの解法では, 基本的にはSMAC法と同様に陰的に解かれた水深を用いて, 推定された流速成分の修正を行うという, 非圧縮性流体計算法と同様の手順を取る. この手法では, 運動方程式に含まれる残差成分が修正されるので, たとえば初期水面形が空間的に不連続に分布する問題などに対しても数値的に安定で, 風上化や人工粘性の導入などが不要になると考えられる.

このように, 浅水流方程式に非圧縮性流体計算法を用いる解法は, 数値的安定性の面から有効であると考えられるが, 既往の解法では変数がスタガード配置されているため, 非構造格子への展開等が容易でなく, また, CIP法では基礎式が非保存形表示されるので, 保存性の問題等が残されていると考えられる.

本報では, コロケート格子上で提案された非圧縮性流体計算法を利用して, 浅水流方程式を安定に計算する手法を考察する. この解法を用いる場合の基礎式の離散化や計算手順を示し, 一部に高次精度解法の導入等を行う. 最後に基本的な例題を取り上げ, 安定性や計算精度などの基本特性を確認する.

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

本報では、非圧縮性流体計算法を使用して、浅水流方程式を安定に計算する解法の基本的な枠組みについて考察する。このため、基礎方程式としては x, y 直交座標系上で表される、以下のような簡略な式を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uM) + \frac{\partial}{\partial y}(vM) = -gh \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uN) + \frac{\partial}{\partial y}(vN) = -gh \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3)$$

式 (1) は連続式、式 (2) と式 (3) は運動方程式である。ここに、 $M = uh$ 、 $N = vh$ であり、 h は水深、 u, v はそれぞれ x, y 方向の流速成分である。上記の関係は、水底面が水平で、境界面に摩擦力が作用せず、拡散項が無視できる場合に得られる簡単な基礎式である。境界面での摩擦や拡散項に関しては、Vasiliev の不安定や拡散数の拘束条件などの数値的安定性に関わる問題がある。しかし、ここでは上記の基礎式で表されるような h, M, N の方程式系に対する数値的安定性に問題を絞り、これを以下で考察することとする。

浅水流方程式の解法には種々の手法が提案されている。多くの手法では、基本的には運動方程式を陽解法で離散化し、得られた M^{n+1} と N^{n+1} を連続式に用いて h^{n+1} を求める、という手順が取られている。このような時間発展的な計算法を、本報では簡単に「浅水流方程式の陽的解法」と表現することとする。陽的解法では代入計算により簡単に未知数が計算されるので、計算時間が短いという利点がある。しかし、水面勾配が急峻になる場合など、厳しい条件においては離散化式に含まれる残差が時間とともに蓄積して、数値的な不安定性を引き起こすことがある。このため、いくつかの解法では風上化や人工粘性の導入など、安定化のための操作を取り入れているようである。しかし、これらの操作は、数値的な精度を劣化させることになるので、できれば回避することが望ましい。

本報では、MAC 系解法に分類される、コロケート格子上で提案された、水深積分を行わない非圧縮性流体の基礎式に対する数値解法⁷⁾を用いることで、浅水流方程式を安定に計算する方法を検討する。以下では、この「水深積分を行わない基礎方程式で表される流体」を簡単に「非圧縮性流体」と呼ぶこととする。浅水流方程式の対象となる流体も非圧縮性流体であるが、便宜的にこのように表現する。

(2) コロケート格子上の非圧縮性流体解法の適用

非圧縮性流体の計算法としては、コロケート格子を用いる解法が取り扱いが容易で、領域分割による並列計算法の導入や非構造格子への拡張などを行いやすい。また、同解法に対しては、精度の高い圧力解法や陰的解法、保存系の高次スキームなどが提案されていて、それらを利用できる可能性がある。このため、浅水流方程式に対してもコロケート格子配置上の非圧縮性流体解法の適用を試みる。

図-1 にコロケート格子上的の変数配置を示す。水深 h と流速成分 u, v 、そして単位幅流量 M, N はセル中心で定義される。後述するように、保存形表示された運動方程式の移流項を計算する際には、セル境界上にフラックスを定義する。また、連続式を計算する際に、セル境界で定義される単位幅流量 M_b, N_b を利用する。これらのセル境界で定義される変数は図-1 の f, g のように配置される。

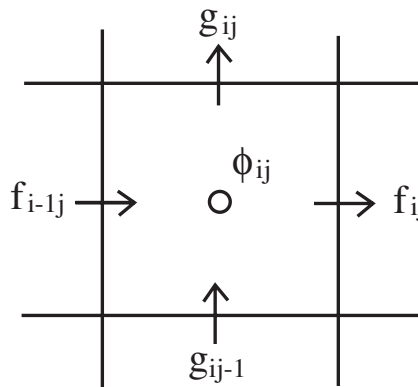


図-1 コロケート格子上的の変数配置

運動方程式の移流項を右辺に移項して、これらをまとめて F, G と表現すると、式 (2) と式 (3) は次のように表される。

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -gh \frac{\partial h}{\partial x} + F \quad (4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -gh \frac{\partial h}{\partial y} + G \quad (5)$$

式 (4) と式 (5) を時間方向にのみ離散化し、次のような関係とする。

$$M^{n+1} = M^n - gh^n \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} \Delta t + F \Delta t \quad (6)$$

$$N^{n+1} = N^n - gh^n \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} \Delta t + G \Delta t \quad (7)$$

ここで、式 (4) と式 (5) の右辺第 1 項は非線形であるので、微分を取らない方の h を n ステップの値で表現することにより、線形化している。また、 F, G は、陽的あるいは陰的に取り扱われるが、ここで扱う解法の基本部分には関係しないので、時間方向の位置を省略している。なお、 F, G を陽的に評価すれば、 Δt の取り方に CFL 条件という制約がつく。移流項を陰的に扱う方法として、C-ISMALC 法⁸⁾ を用いる方法を後述部分で示す。

式 (6) と式 (7) に対して、水面勾配項に h^n を用いて推定される M と N をそれぞれ \hat{M} および \hat{N} と表す。すなわち、

$$\hat{M} = M^n - gh^n \frac{\partial h^n}{\partial x} \Delta t + F \Delta t \quad (8)$$

$$\hat{N} = N^n - gh^n \frac{\partial h^n}{\partial y} \Delta t + G \Delta t \quad (9)$$

式 (8) と式 (9) に対して、コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算法の予測段階の解法⁷⁾ を適用することを考える。同解法では圧力勾配をセル中心で評価する方法 (CCP スキーム) ではなく、セル境界で評価する方法 (CBP スキーム) が有効であり、水面変動や圧力振動を防止するために効果があることが示されている⁷⁾。これと同様の考え方を式 (8) と式 (9) の水面勾配項に用いる。すなわち、最初にセル中心で水面勾配項を除く次式から推定値 M^* および N^* を求める。

$$M^* = M^n + F \Delta t \quad (10)$$

$$N^* = N^n + G \Delta t \quad (11)$$

このようにして得られた推定値 M^* および N^* をセル境界に空間内挿する。内挿されたセル境界の値を \tilde{M} および \tilde{N} とする。CBP スキームでは、セル境界で圧力勾配項を導入するが、それと同様に、ここではセル境界において水面勾配項を考慮する。このようにして得られたセル境界における M と N をそれぞれ M_b および N_b と表すことにすると、次の関係が成り立つことになる。

$$M_b = \tilde{M} - gh^n \frac{\partial h^n}{\partial x} \Delta t \quad (12)$$

$$N_b = \tilde{N} - gh^n \frac{\partial h^n}{\partial y} \Delta t \quad (13)$$

一方、最終的に得られる数値解が満足すべき式 (6) と式 (7) が、セル境界で次のような関係として表されるとする。

$$M^{n+1} = \tilde{M} - gh^{n+1} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} \Delta t \quad (14)$$

$$N^{n+1} = \tilde{N} - gh^{n+1} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} \Delta t \quad (15)$$

式 (14) と式 (15) から、式 (12) と式 (13) をそれぞれ各辺差し引くと、次の関係が得られる。

$$M^{n+1} = M_b - gh^n \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta t \quad (16)$$

$$N^{n+1} = N_b - gh^n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta t \quad (17)$$

ここに、 ϕ は 1 ステップの水深変化分、すなわち $\phi = h^{n+1} - h^n$ である。

次に、連続式である式 (1) は、以下のように時間方向に離散化されるとする。

$$h^{n+1} = h^n - \left[\frac{\partial M^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial N^{n+1}}{\partial y} \right] \Delta t \quad (18)$$

$\phi = h^{n+1} - h^n$ であることを考慮して、式 (18) に式 (16) と式 (17) を代入すると次の関係が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{\Delta t} \phi + \alpha D \quad (19)$$

ここで、 $\alpha = 1/(gh^n \Delta t)$ であり、 D は

$$D = \frac{\partial M_b}{\partial x} + \frac{\partial N_b}{\partial y} \quad (20)$$

で与えられる。式 (19) では、右辺第 1 項に未知数 ϕ が含まれていることが、2 次元非圧縮性流体の圧力変化分に対する関係式と異なる点である。

式 (18) は中央差分法などを用いて空間方向に離散化すれば、離散化式は ϕ の連立 1 次方程式に帰着するので、適当な反復解法を用いて数値解を求めることができる。得られた ϕ を用いて、

$$h^{n+1} = h^n + \phi \quad (21)$$

により $n+1$ ステップの水深 h^{n+1} が得られる。ただし、この水深の計算法については、後述部分で別の計算法を示す。一方、 M^{n+1} と N^{n+1} を求めるには 2 つの方法がある。1 つは得られた ϕ を式 (16) と式 (17) に用いてセル境界の M^{n+1} と N^{n+1} を求め、これを空間内挿してセル中心の値とする方法である。これは、コロケート格子上の非圧縮性流体計算における SI スキーム⁷⁾ に相当する。もう 1 つの方法は、セル中心で成り立つ次式を利用するものである。

$$M^{n+1} = M^* - gh^{n+1} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} \Delta t \quad (22)$$

$$N^{n+1} = N^* - gh^{n+1} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} \Delta t \quad (23)$$

この方法は PG スキーム⁷⁾に相当する．SI スキームは精度を劣化させることが知られているので⁷⁾，ここでは式(22)と式(23)を用いて M^{n+1} と N^{n+1} を求めることとする．

以上のように，本報で用いる解法では，式(1)から式(3)の数値解を時間発展的に求めて行く方法と異なり，運動方程式をセミ・インプリシットに離散化して，連続式を満足する水深を求め，それを使って単位幅流量を修正するという手順を取っている．

(3) C-HSMAC 法の導入

以上のようにして導かれた浅水流方程式の解法は，コロケート格子状における2次元非圧縮性流体計算法と類似の手順を取る．このため，同解法を対象として提案された各種の手法を用いることができると考えられる．ここでは，圧力解法である C-HSMAC 法⁹⁾と同様の計算手順を導入することにより，離散化式に対する数値解の整合性を高める方法を検討する．

この解法では，以下の関係式を用いて反復計算を行う．変数の上添え字の k は C-HSMAC 法の反復回数を表す．最初に，次式により D^k を求める．

$$D^k = \frac{\partial M_b^k}{\partial x} + \frac{\partial N_b^k}{\partial y} \quad (24)$$

M_b^k と N_b^k の初期値には式(12)と式(13)で与えられる M_b と N_b を用いる．この D^k を用いて，式(19)から ϕ を求める． D^k を用いた関係を再記すれば，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{\Delta t} \phi + \alpha D^k \quad (25)$$

次に，得られた ϕ を用いて， M_b^{k+1} と N_b^{k+1} を求める．

$$M_b^{k+1} = M_b - gh^n \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta t \quad (26)$$

$$N_b^{k+1} = N_b - gh^n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta t \quad (27)$$

収束判定は，たとえば M_b^{k+1} と N_b^{k+1} から計算される D^{k+1} を用いた次式の残差 ϵ を用いて，すべての計算セルから得られる ϵ の2乗和がしきい値 ϵ_0 以下となる条件とする．

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\Delta t} \phi + \alpha D^{k+1} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (28)$$

もし，収束解が得られていなければ， D^{k+1} を D^k として，式(25)の手順へ戻る．

(4) 保存性を考慮した h^{n+1} の計算法

新しい時間ステップの水深は，上記のように式(21)から求められる．ただし，この計算法では保存性が厳密には満たされない．このため，C-HSMAC 法により

修正されたセル境界上の単位幅流量 M_b^{k+1} と N_b^{k+1} を用いて，保存形の連続式から h^{n+1} を計算するという方法が考えられる．この場合には，次式により h^{n+1} が求められる．

$$h^{n+1} = h^n - D^{k+1} \Delta t \quad (29)$$

この方法を用いると，計算途中の数値誤差による流体体積の増減は丸め誤差程度に抑制され，流体体積が精度良く保存される．

(5) 予測段階計算への高次精度陰的解法の導入

本報の解法における予測段階の計算，すなわち水面勾配項を除く項をセル中心で計算する過程に，陰的な計算法を使用することで，計算がより安定化すると考えられる．コロケート格子状における非圧縮性流体計算では，高次精度スキームを用いた計算を陰的に行うために，C-ISMAC 法が提案されており⁸⁾，本報の解法にも同手法を用いることが可能である．

本報では，保存形表示された移流項を有限体積法により離散化し，セル境界におけるフラックスを評価する際に，1次風上法と3次の MUSCL スキーム¹⁰⁾を利用する．このような予測段階の解法に C-ISMAC 法を用いる．

3. 計算手法の基本特性の確認

(1) 計算条件

提案された計算手法の特性を把握するための基本的な例題として，Toro¹¹⁾により示されている円形ダムブレイク問題を取り上げた．計算領域は，図-2に示すような $L_x = 40\text{m}$ ， $L_y = 40\text{m}$ の矩形領域である．こ

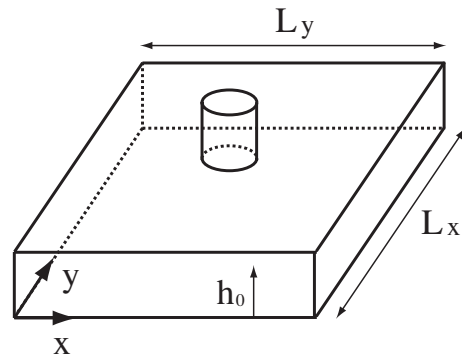


図-2 計算領域と初期水面形

の領域において，領域の中心から半径 2.5m 以内の領域では $h_0 = 2.5\text{m}$ ，それ以外の領域では $h_0 = 0.5\text{m}$ となる初期水深 h_0 を与え，流速の初期値は 0 とする．計算領域の周辺の境界は，水が通過しない固体壁とする．このような条件で，初期の水面形が瞬時的に崩れて波動が伝搬する過程を計算対象とする．

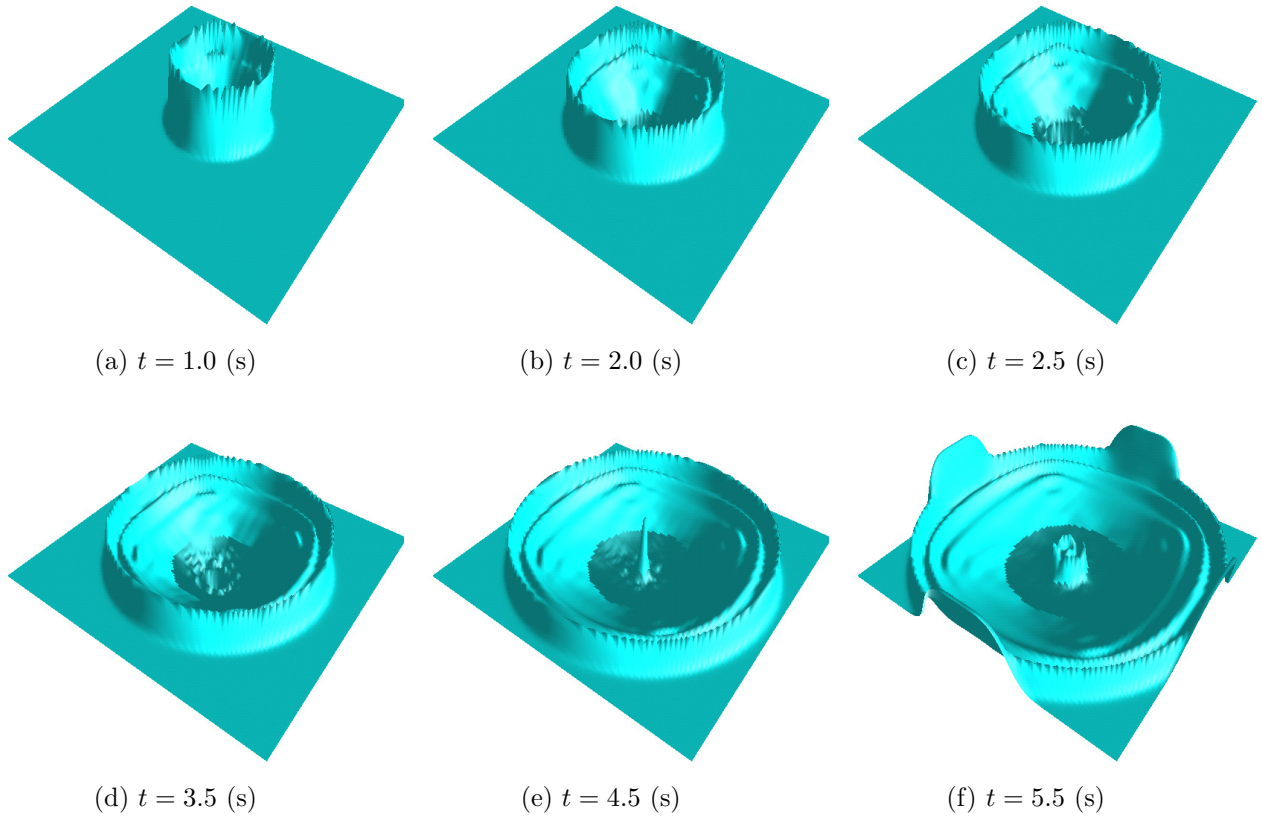


図-3 円形ダムブレイク問題の計算結果 (3次 MUSCL, 100×100 セル, 鉛直方向スケールは 20 倍に表示)

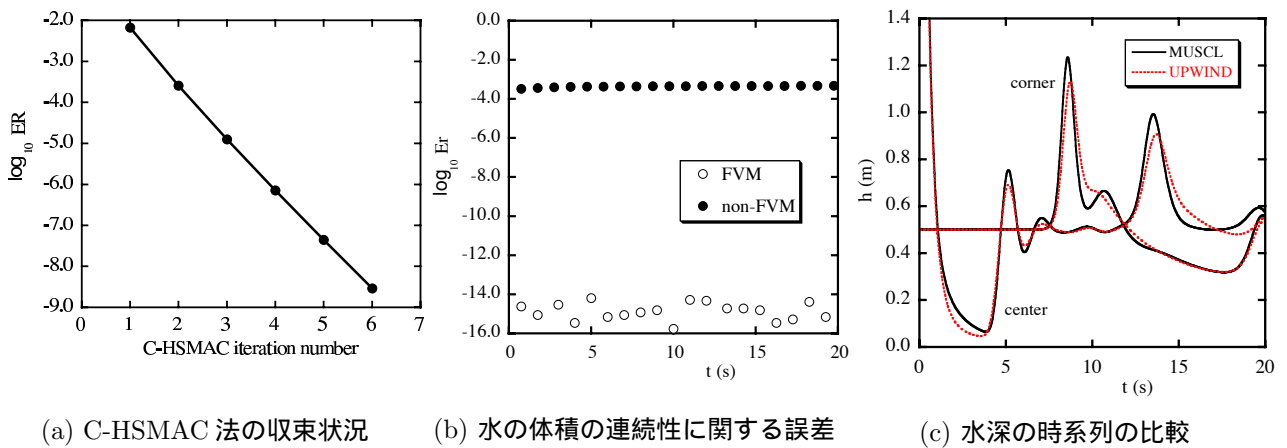


図-4 計算精度に関する結果

(2) 計算結果に関する考察

本報の計算手法を用いた円形ダムブレイク問題の数値計算結果を図-3に示す。この計算例では、計算セル数は 100×100 とした。Toroの計算結果と比較すると、本計算では格子数が約 $1/4$ であるため、やや分解能が粗い結果となっているが、計算は安定に行われ、Toroと同様の水面形の変化が示されている。

以下では、計算精度等を比較しやすい条件とするため、計算セル数はさらに粗い 50×50 とする。また、時間刻み Δt は 2.5×10^{-2} (s)とした。

最初に、C-HSMAC法の収束状況を調べた。その結果、図-4(a)に示すように、C-HSMAC法の反復回数ごとに誤差ERは効率的に低減した。ここで、ERは全計算セルに対して式(28)で表される残差の2乗和を取ったものであり、本報のC-HSMAC法を用いることで、数値解の精度を向上させることが可能であることが示された。

さらに、式(29)による水深の計算法は体積の保存性の観点から有効であった。式(29)の M_b と N_b には、C-HSMAC法の反復演算で得られる修正されたセル境界上の値を用いている。図-4(b)に、式(29)を用いた場合(図中のFVM)と式(21)を用いた場合(non-FVM)における領域全体の正規化された体積の誤差 Er を比較して示す。

次に、図-4(c)に計算領域中央と境界頂点における水深の時系列を示す。この結果では、移流項に1次風上法と3次MUSCLスキームを用いた結果を合わせて示している。後者では、水深のピーク値がより明瞭に計算されており、高次精度解法を用いることで解が改善される可能性があることが示されている。

(3) 数値的安定性

本報で提案された解法に対して、その数値的な安定性を確認する。比較対象となる浅水流方程式の陽的解法として、次の2つの方法を設定した。

- ・陽解法A: CCPスキームを用いて予測段階を陽的に計算する。水面勾配項には h^n を用いて、セル中心で水面勾配項を評価し、運動方程式は陽的に計算される。この計算方法は、スタガード配置しない陽的解法に相当する。
- ・陽解法B: CBPスキームを用いて予測段階を陽的に計算する。運動方程式は陽的に計算され、 M 、 N と h はスタガード配置されることになる。

上記の陽的解法を、初期の水面形が次式のように空間的に滑らかに変化する条件に用いた。初期水面形以外の条件は円形ダムブレイク問題と同様である。

$$h_0(r) = 0.5 + 0.1 \exp\left(-\frac{r^2}{20.0}\right) \quad (30)$$

ここに、 r は領域中心からの距離を表す。この条件では、陽解法A、Bともに安定な計算が行えることが確認された。

一方、上記の円形ダムブレイク問題では、初期水面形が不連続に分布するため、陽解法Bでは安定に計算が行えたが、陽解法Aでは計算開始から数秒後に発散し、安定な数値解は得られなかった。

次に、円形ダムブレイク問題における初期水柱の高さを2.5mから5.0mとした計算では、陽解法Bでは計算が途中で破綻した。これに対して、C-ISMALC法を用いる本研究の解法では、移流項に3次MUSCLスキームを用いた状態でも安定に計算を行うことができ、解法は数値的に安定であることが示された。

4. おわりに

本報では、浅水流方程式にコロケート格子上で提案された非圧縮性流体計算法を適用する方法について考察し、簡単な検証を行ってその基本特性を確認した。今後は、非圧縮性流体計算法で用いられる各種の高次解法、あるいは高速解法などを適用し、それらの有効性を検討する予定である。

参考文献

- 1) 木村一郎. 開水路流れにおける大規模渦運動の数値解析法とその水工学への応用に関する研究. 京都大学学位論文, 1997.
- 2) 岩佐義朗, 井上和也, 水鳥雅文. 氾濫水の水利の数値解析法. 京都大学防災研究所年報, Vol. 23B2, pp. 305-317, 1980.
- 3) 岩佐 義朗編著. 数値水理学. 丸善株式会社, 1995.
- 4) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志. CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発. 水工学論文集, Vol. 42, pp. 1159-1164, 1998.
- 5) 横山洋, 清水康行. CIP法を用いた急勾配複断面蛇行水路の数値計算. 水工学論文集, Vol. 45, pp. 601-606, 2001.
- 6) 川崎浩司, 小野稔和, Napaporn Piamsa-Nga, 熱田浩史, 中辻啓二. CIP法とSMAC法に基づく平面2次元氾濫流モデルの構築. 水工学論文集, Vol. 48, pp. 565-570, 2004.
- 7) 牛島省, 竹村雅樹, 禰津家久. コロケート格子配置を用いたMAC系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 8) 牛島 省, 禰津 家久. 陰解法を用いたコロケート格子による高次精度の流体解析手法の提案. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 21-30, 2002.
- 9) 牛島省, 奥山洋平. 非圧縮性流体計算におけるC-HSMAC法とSOLA法の収束特性. 土木学会論文集, No. 747/II-65, pp. 197-202, 2003.
- 10) S. Yamamoto and H. Daiguji. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computers Fluids*, Vol. 22, No. 2/3, pp. 259-270, 1993.
- 11) E. F. Toro. *Shock-Capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley & Sons, Ltd, 2001.

(2005.9.30 受付)