

固体粒子を含むビンガム塑性流体の 数値解析手法の提案

COMPUTATIONAL METHOD TO PREDICT
BINGHAM PLASTIC FLUIDS INCLUDING SOLID PARTICLES

藤田 学¹・牛島 省²

Manabu FUJITA and Satoru USHIJIMA

¹ 学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper deals with a computational method to predict Bingham plastic fluids including solid particles. This technique is based on MICS (Multiphase Incompressible flow solver with Collocated grid System). A Bingham model is used to evaluate the average apparent plastic viscosity in each computational cell. To confirm the validity of this method, it is applied to the flows in two parallel plates and around a fixed cylinder in the uniform velocity. In addition, it is also applied to the fluids including a moving cylinder. As a consequence this computational method allows us to predict the effect of the solid particles on the Bingham plastic fluids accurately.

Key Words: MICS, Bingham plastic flow, incompressible flow, collocated grid, FVM

1 はじめに

ビンガム塑性流体とは、速度勾配に起因する応力が、ある降伏応力を超えたときに、ニュートン流体のように流動し始める流体をいう。粘土、泥、フレッシュコンクリート¹⁾²⁾³⁾⁴⁾や溶岩流⁵⁾などがビンガム塑性流体として研究されている。

コンクリート中の粗骨材や細骨材、泥中の岩石など、ビンガム流体中の固形粒子は、流体の流動特性に大きく影響を与えるとされている。このように、固形粒子を含むビンガム流体の流れ場を適切にとらえることができる計算手法を確立する事は、広く流体が関係する問題や水工学上の課題に対して非常に重要である。

このような背景から、本報ではニュートン流体において有用性が示された、多相流場に対する解法であるMICS (Multiphase Incompressible flow solver with Collocated grid System)⁶⁾⁷⁾を拡張し、ビンガム流体を取り扱える手法を提案する。提案した手法を、平行平板間流れ、固定円柱周り流れおよび流体中の円柱の落下運動に適用し、その有用性を確認する。

2 数値解析手法

本報では、固体粒子を含むビンガム塑性流体を計算対象とする。本手法の基本的な計算手順はMICSと同じだが、ビンガムモデルを用いてセル内のせん断依存粘度を設定し、応力項を評価する。

2.1 流体セルに対する物性値の設定

本報の計算手法では、はじめに固相と液相を区別せず領域全体を計算する。その際に、次式を用いてセル毎に異なる物性値を設定する。

$$\psi = (1.0 - \sum_{P_k \in C} \alpha_k) \psi_f + \sum_{P_k \in C} \alpha_k \psi_{pk} \quad (1)$$

ここで、 α_k は、セル C 内の粒子 P_k の体積割合、 ψ_f は流体の物性値、 ψ_{pk} は粒子 P_k の物性値を表す。本報では、セル内密度 ρ とせん断依存粘度 η を式 (1) により定める。粒子は剛体として扱うので、粒子領域の粘性係数は 0 とし、粒子運動の計算の後、粒子領域内の速度を再度決定する。

2.2 支配方程式

密度の空間分布は存在するが、連続相と分散相の体積は不変であるため、次の非圧縮条件が成り立つ。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の流速成分である。運動方程式として、ニュートン流体か、非ニュートン流体であるかに関係なく流体一般に成り立つ Cauchy の運動方程式⁸⁾を用いる。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\rho \delta_{i2} g - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3)$$

上式では、総和の縮約を用いている。ここで、 u_i は x_i 方向の流速成分、 p は圧力、 g は重力加速度、 τ_{ij} は応力テンソル τ の i, j 成分である。また、 x_2 は鉛直上方を正に取っている。

非ニュートン流体においては、 τ_{ij} は次のように表すことができる。

$$\tau_{ij} = \eta(|\dot{\gamma}|) \dot{\gamma}_{ij} \quad (4)$$

ここで、 $\eta(|\dot{\gamma}|)$ は見かけの粘度、またはせん断依存粘度と呼ばれるものである。 $\dot{\gamma}_{ij}$ と D_{ij} はせん断速度 $\dot{\gamma}$ および変形速度テンソル D の i, j 成分である。

$$\dot{\gamma}_{ij} = 2D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (5)$$

また、テンソル $\dot{\gamma}$ の大きさ $|\dot{\gamma}|$ は次式で定義される。

$$|\dot{\gamma}| = \left[\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq dim} \dot{\gamma}_{ij}^2 \right]^{1/2} \quad (6)$$

ここで dim は次元数を表す。 η を一定の値とすると、ニュートン流体と同等の取り扱いとなる。

2.3 ビンガムモデル

τ_{ij} をビンガムモデルを用いて表した場合、次式のようになる。

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma}_{ij} & |\tau| \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0 & |\tau| < \tau_0 \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 τ_0 はビンガム降伏値、 η_p は塑性粘度、 $|\tau|$ は応力テンソルの大きさである。式 (7) は、応力がビンガム降伏値 τ_0 以下では、流動に抵抗する構造ができ、 τ_0 を超えるとその構造が壊れてニュートン流体のように流れることを意味する。式 (7) は関数が不連続であるため、セル毎の $\eta(|\dot{\gamma}|)$ を求めるのが難しい。そのため本報では、Papanastasiou⁹⁾ が近似した次式を用いた。

$$\tau_{ij} = \left[\eta_p + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}) \right] \dot{\gamma}_{ij} \quad (8)$$

m は、応力成長指数 (stress growth exponent) と呼ばれるもので、時間の次元を持つ。図-1 は、 $\eta_p/\tau_0 = 1(s)$ とした際の式 (7) と式 (8) を比較したものである。図-1 からわかるように、 m が大きくなるにつれて近似精度が上がっているのがわかる。しかし、数値計算をする際に、 m に過大な値を用いると、時間刻み Δt を小さくしなければ、計算が不安定¹⁰⁾ になる。本報では、このため $m = 1000(s)$ を計算に用いた。

式 (4) と式 (8) を比較すると次式の関係を導くことができる。

$$\eta(|\dot{\gamma}|) = \eta_p + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}) \quad (9)$$

セル内にビンガム流体と粒子が混在する場合において、セル内でのせん断依存粘度は、この値を用いて式 (1) から求める。

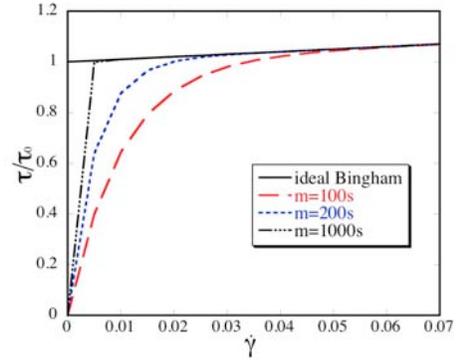


図-1 $\dot{\gamma}$ と τ/τ_0 の関係

2.4 離散化手法

有限体積法に基づき、式 (3) を空間方向に離散化する。変数配置は、コロケート格子に従うものとする。移流項には 1 次精度風上差分を用いるものとする。

応力項の評価をするために、式 (5) の右辺第 1 項と第 2 項をそれぞれセル境界で以下のように離散化する¹¹⁾。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Big|_e \approx \frac{u_i(E) - u_i(C)}{\Delta x_1} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \Big|_e \approx \frac{u_i(ne) - u_i(se)}{\Delta x_2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Big|_n \approx \frac{u_i(ne) - u_i(nw)}{\Delta x_1} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \Big|_n \approx \frac{u_i(N) - u_i(C)}{\Delta x_2} \quad (13)$$

下添字は、それぞれ図-2 に従うものとする。また格子点上 se, ne, sw での値は、周りを囲むセルの中心で定義された値から、単純平均をして求める。

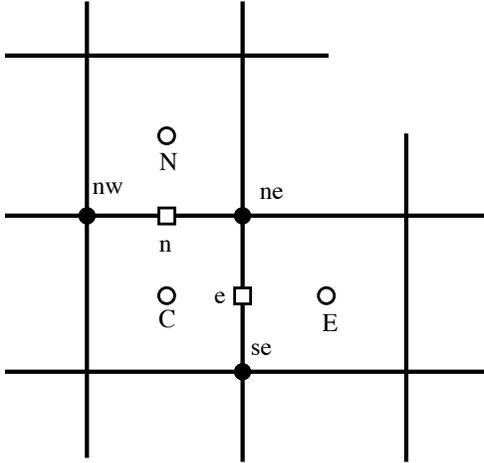


図-2 格子配置

3 計算手法の検証

3.1 平行平板間流れ

まず、式(8)の近似精度や応力項の離散化精度を確認するため、平行平板間流れの解析を行う。計算領域と座標系を図-3 に示す。

$H = 0.5(\text{m})$, $L = 3.0(\text{m})$ である。計算条件は、時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}(\text{s})$ 流体の密度 $\rho = 1.0 \times 10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$, 塑性粘度 $\eta_p = 10.0(\text{kg}/\text{ms})$ とし, $t = 60(\text{s})$ まで計算を行った。境界条件は、入り口では $p_{in} = 600(\text{Pa})$ を与え、出口は自由流出条件、上壁と下壁はノンスリップ条件である。

この流れ場での理論解⁸⁾は、次式のようになる。

$$0 \leq y \leq y_0 : \quad u = \frac{1}{2\eta_y} \frac{dp}{dx} (L - y_0)^2 \quad (14)$$

$$y_0 < y \leq H : \quad u = \frac{1}{2\eta_y} \frac{dp}{dx} \{L^2 - y^2 - 2y_0(L - y)\} \quad (15)$$

この理論解は、 $y \geq 0$ の場合についてのみ論じられている。 $y < 0$ の場合の理論解は、 $y \geq 0$ の場合の理論解を x 軸に対して対称に移動させたものである。

式(14)と式(15)の y_0 は、せん断応力と降伏応力が釣り合う点であり、次式で与えられる。

$$\tau_0 = y_0 \frac{dp}{dx} \quad (16)$$

本計算条件では、 $y_0 = 0.2(\text{m})$ となった。

図-4 は、降伏応力 $\tau_0 = 0.0(\text{Pa})$ と $\tau_0 = 20.0(\text{Pa})$ の流下方向の流速分布について、計算結果を理論解と比較したものである。計算結果は、理論解とよく一致しており、応力項は適切に評価されているといえる。

次に、計算の安定性についての考察を行う。図-5 は、時間刻み Δt と、計算結果と理論解の差の最大値の関係を示したものである。 $\tau_0 = 0.0(\text{Pa})$ としてニュートン流体と同等として扱った場合、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-1}(\text{s})$ まで計算が行えた。また、 Δt の値にかかわらず、誤差は $3.0 \times 10^{-3}(\text{m}/\text{s})$ 程度であった。一方 $\tau_0 = 20.0(\text{Pa})$ の場合は、図-5 からもわかるとおり、非常に誤差が大きくなっている。これは、図-1 からわかるように、せん断依存粘度が、非常に大きな値を取る場合があり、応力項に起因して計算が不安定になっているためと考えられる。

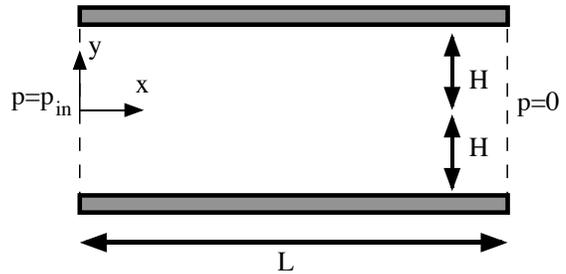


図-3 平行平板間流れの計算領域

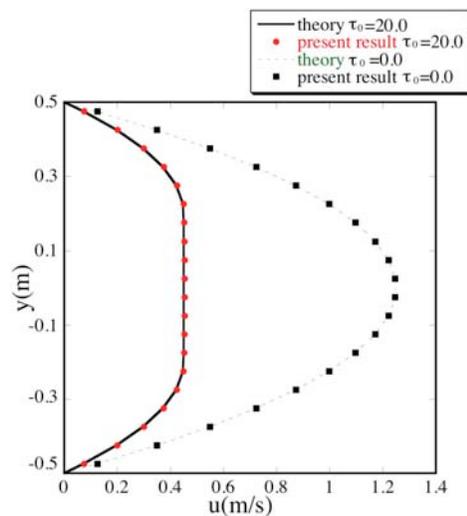


図-4 理論解との比較

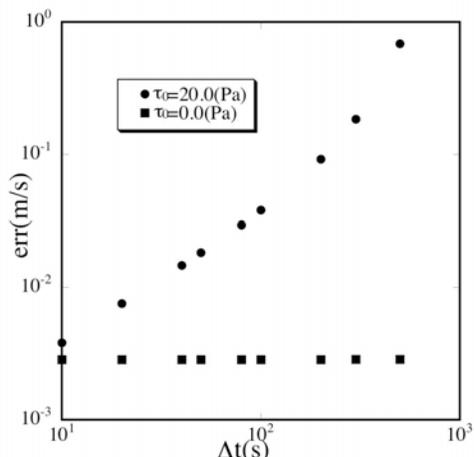


図-5 時間刻み Δt と誤差の関係

3.2 固定円柱周りの流れ

セル内のせん断依存粘度が適切に評価されていることを示すため、一様な流速 $U = 1.0 \times 10^{-1}(\text{m/s})$ の流体中に固定した円柱周りの流れを本手法を用いて解析した。図-6に計算領域を示す。計算領域中での L と B は、それぞれ 3.0m , 2.4m である。セル数は、 90×70 である。また、粒子は $(L_c, B/2) = (1.2\text{m}, 1.2\text{m})$ に固定されており、その粒子径と密度は、 $D = 0.2(\text{m})$ である。粒子、流体の密度 ρ_l は、どちらも $1.0 \times 10^3(\text{kg/m}^3)$ 、流体の塑性粘度 η_p は、 $1.0(\text{kg/ms})$ とした。本検証では、粒子レイノルズ数 $Rep = DU\rho_l/\eta_p = 20$ と固定し、 τ_0 を変化させたときの流況の違いを確認した。なお、以下の説明で用いるビンガム数とは、次式で定義される無次元量である。

$$Bn = \frac{D\tau_0}{U\eta_p} \quad (17)$$

図-7は、 $Bn = 10$ での降伏領域と非降伏領域を示したものである。降伏領域、非降伏領域は次のように判断する。

$$\text{非降伏領域} : |\tau| = \left[\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq dim} \tau_{ij}^2 \right]^{1/2} \leq \tau_0 \quad (18)$$

$$\text{降伏領域} : |\tau| > \tau_0 \quad (19)$$

この図から、粒子の前後で、流動に抵抗する組織構造が破壊されることがわかる。また、ビンガム数が増加すると、降伏領域が小さくなる。

図-8は、流れ場が定常になった時の粒子背後の流線の様子を示している。ビンガム数が大きくなるにつれて、粒子背後の渦が小さくなり、 $Bn = 1.0$ で粒子背後の渦が確認できなくなっている。

図-9は、抗力係数 C_d とビンガム数 $Bn = D\tau_0/U\eta_p$ の関係を示したものである。図中では、本計算手法で得られた結果と、変分法 (variational approach)、すべり線解析 (slip-line analysis)、最大原理 (maximum principle) により Adachi and Yoshioka¹²⁾ が示した近似解と比較している。本計算手法で求めた結果は、すべり線解法による近似解と、特に $Bn \geq 10$ の領域で非常によく一致している。このことから、セル内のせん断依存粘度を用いて評価した応力項は、妥当に取り扱われていると考えられる。

なお、ビンガム数が大きくなるにつれ、抗力係数が大きくなっているが、これはせん断依存粘度が大きくなっているために、速度勾配に起因する応力が大きくなっているためであると考えられる。

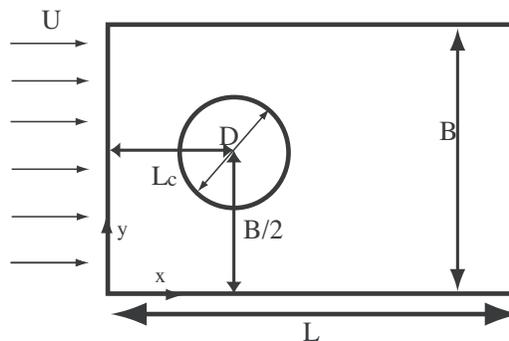


図-6 固定円柱周り流れの計算領域

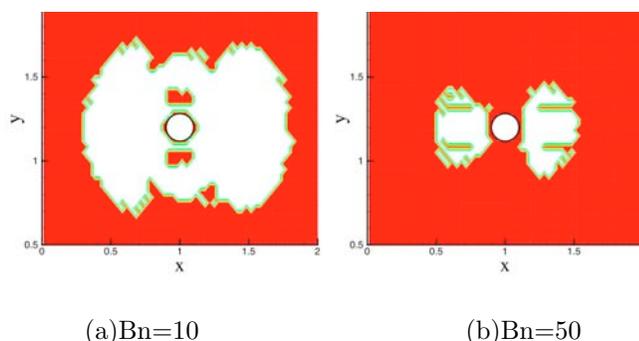


図-7 降伏領域 (赤) と非降伏領域 (白)

3.3 円柱の落下運動

ニュートン流体とビンガム流体内での、固体粒子の挙動の違いを確認するために、図-10に示すような容器の中で、円柱を自由落下させた。図中の H 、 B はそれぞれ 1.0m 、 0.4m である。計算格子数は、 30×80 である。直径 $D = 0.2(\text{m})$ の円柱を、 $(B, Lc) = (0.2\text{m}, 0.85\text{m})$ から落下させた。円柱の密度 ρ_p は、 $1.2\text{kg}/\text{m}^3$ とし、流体の密度 ρ_l と塑性粘度 η_p は、それぞれ $1.0\text{kg}/\text{m}^3$ 、 $1.0\text{kg}/\text{ms}$ とする。

図-11は、 $\tau_0 = 0.0(\text{Pa})$ として、ニュートン流体として扱った場合と、 $\tau_0 = 1.0(\text{Pa})$ としてビンガム流体とした場合の、流速ベクトル及び渦度のコンター図を示したものである。図から $\tau_0 = 1.0(\text{Pa})$ の場合は、ニュートン流体の場合と比べて円柱の落下速度が明らかに遅く、また渦の発達抑制されていることがわかる。これは、ニュートン流体の場合と比較すると、ビンガム流体の応力項が卓越しているためであると考えられる。

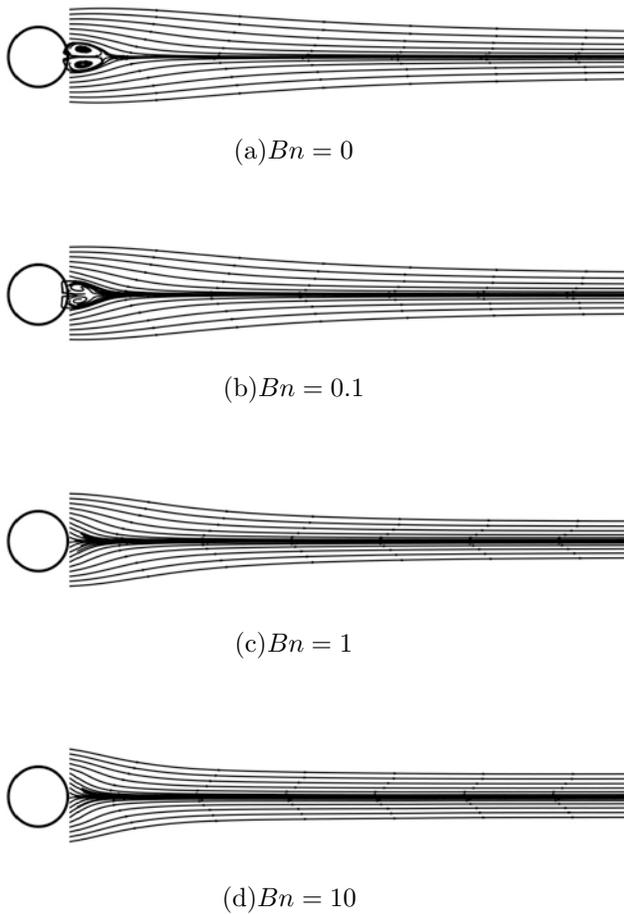


図-8 粒子背後の流線

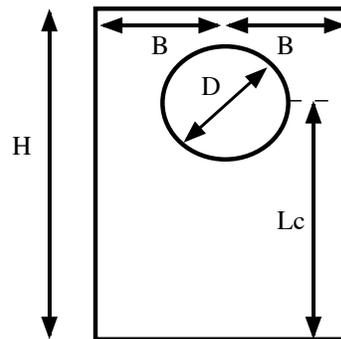


図-10 流体中の円柱落下計算領域

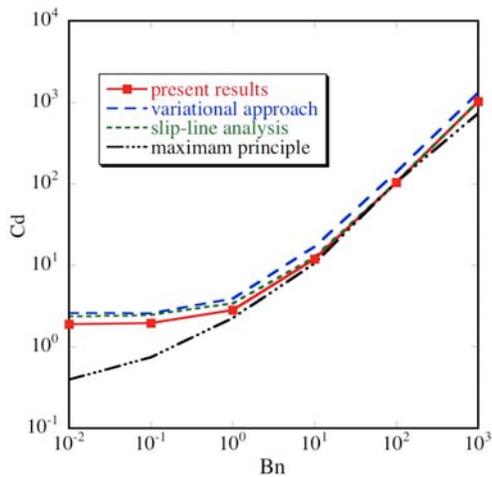


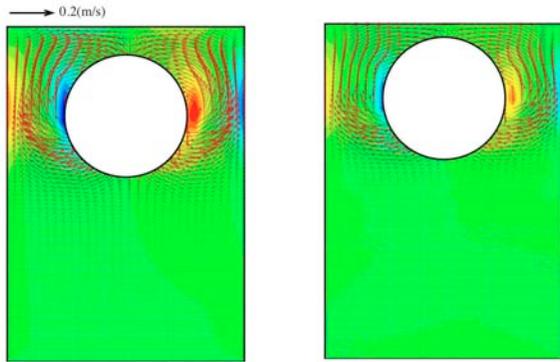
図-9 抗力係数 C_d とビンガム数 B_n の関係

4 終わりに

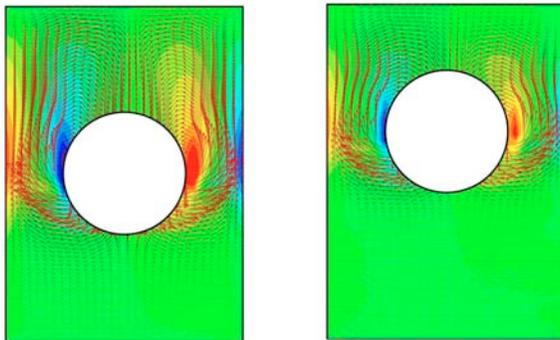
本報では、ニュートン流体で有用性が示されていた MICS に基づき、ビンガム塑性流体の計算を可能とする手法を提案した。ビンガムモデルに Papanastasiou が提案した近似を用いてセル内でのせん断依存粘度を計算することにより、運動方程式の応力項を評価した。

検証例として、平行平板間流れと一様流中に固定した粒子周辺の流れ場、および落下する円柱の運動を解析した。平行平板間流れでは、Papanastasiou の提案した近似および離散化の精度と数値安定性を確認した。固定した粒子周辺の流れ場の解析では、セル内のせん断依存粘度の妥当性が示された。落下する円柱の運動の検証では、ニュートン流体とビンガム流体を比較し、円柱の落下運動の過程において異なる流況が生ずるこ

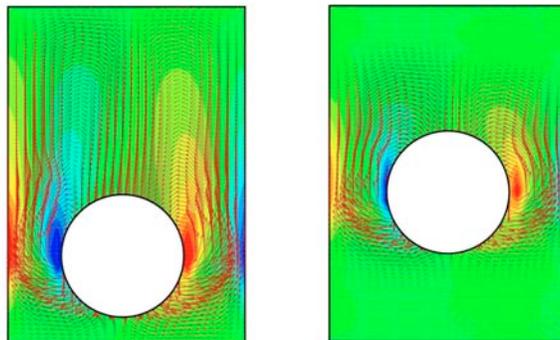
とが解析できた。この結果、応力項は適切に評価されていることが示され、ビンガム流体を計算対象とした本手法の有用性が確認された。



(a) $t = 1.0(\text{s})$



(b) $t = 2.0(\text{s})$



(c) $t = 3.0(\text{s})$

図- 11 流速ベクトルと渦度 (左 $\tau_0 = 0.0(\text{Pa})$, 右 $\tau_0 = 1.0(\text{Pa})$)

参考文献

- 1) 山田義智, 富山潤, 伊良波繁雄. 圧力依存性を考慮したフレッシュコンクリートの流動解析に関する研究. コンクリート工学年次論文集, Vol. 26, No. 1, pp. 1155-1160, 2004.
- 2) 山田義智, 富山潤. 履歴現象を考慮した粘塑性流動の構成式に関する研究. コンクリート工学年次論文集, Vol. 25, No. 1, pp. 899-904, 2003.
- 3) T.Kokado, T.Hosoda, T.Miyagawa, and M.Fujii. Study on a method of obtaining yield values of fresh concrete from slump flow test. *Concrete Library of JSCE*, Vol. 32, pp. 29-42, 12 1998.
- 4) T.Kokado, T.Hosoda, and T.Miyagawa. Methods for evaluating rheological coefficients of self-compaction concrete by numerical analysis. *Concrete Library of JSCE*, Vol. 38, pp. 51-70, 12 2001.
- 5) 中谷健, 由比政年, 石田啓. ビンガム流体モデルを用いた溶岩流の流動・体積過程の数値計算. 水工学論文集, Vol. 49, pp. 733-738, 2005.
- 6) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 禰津家久. 非圧縮性流体解析に基づく粒子-流体混合系の計算法 (MICS) の提案. 土木学会論文集, 2003.
- 7) 山田修三, 牛島省, 禰津家久. 遮蔽効果を伴う物体初期移動過程に対する MICS による数値計算. 水工学論文集, Vol. 49, pp. 757-762, 2005.
- 8) 中村喜代治. 非ニュートン力学. コロナ社, 1997.
- 9) T. C. Papanastasiou. Flows of materials with yield. *J. Rheol.*, Vol. 31, pp. 385-404, 1986.
- 10) G.R.Burgos and A.N.Alexandrou. Flow development of Herschel-Bulkley fluids in a sudden three-dimensional square expansion. *J.Rheol*, Vol. 43, pp. 485-493, 1999.
- 11) Panagiotis Neofytou. A 3rd order upwind finite volume method for generalised newtonian fluid flows. *Advances in Engineering Software*, Vol. 36, pp. 664-680, 2005.
- 12) K.Adachi and N.Yoshioka. On creeping flow of a visco-plastic fluid past a circular cylinder. *Chem.Eng.Sci.*, Vol. 28, pp. 215-226, 1973.

(2005.9.30 受付)