傾斜水路の跳水特性に対する気泡混入射流の影響

EFFECT OF AERATED INFLOWS ON CHARASTERISTICS OF HYDRAULIC JUMPS IN SLOPING CHANNELS

小林 純¹ ・安田 陽一² ・大津 岩夫³ Jun KOBAYASHI, Youichi YASUDA, and Iwao OHTSU

1学生会員 修(工) 日本大学大学院 理工学研究科土木工学専攻(〒101-8303 東京都千代田区神田駿河台1-8)
 ²正会員 博(工) 日本大学助教授 理工学部土木工学科(〒101-8303 東京都千代田区神田駿河台1-8)
 ³フェロー会員 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科(〒101-8303 東京都千代田区神田駿河台1-8)

Many researchers have investigated characteristics of the hydraulic jump in sloping channels, but the effect of aerated inflow on flow characteristics of the hydraulic jump has not been shown. This paper presents the effect of aerated inflow on flow characteristics of hydraulic jumps in steep sloping channels (i.e., 30 and 55 degrees). The experimental investigation reveals that the jump length is affected by the air-concentration of the aerated inflow. The length of the jump has been formulated. By considering the air-concentration in the jump, the sequent depth ratio of the jump in sloping channels has been obtained on the basis of the momentum equation.

Key Words: Sloping Channel, Energy Dissipator, Stilling Basin, Hydraulic Jump, Sequent depth, Aerated Inflow

1. まえがき

堰やダムなどの落差を伴う構造物から流下する高速流 のエネルギーを減勢させる方法として、構造物下流側の 減勢池で跳水を形成させることが一般的である.また、 ダムや堰から越流する高速流において多量の気泡混入が 生じている場合が多く見られる.しかしながら、流入射 流の気泡混入による跳水特性への影響、例えば跳水の流 況、跳水内部の流速特性および跳水長への影響について はほとんど解明されていない.これは、従来の跳水現象 の実験的研究^{1)~4}において、模型規模では流入射流に気 泡が混入されないためである.流入射流に気泡が混入さ れた場合の研究についてはRajaratnam¹⁾による水平水路 の自由跳水を対象に、跳水上下流端の水深間の関係を検 討した研究があるにすぎない.気泡混入射流による跳水 特性への影響を知ることは、河川横断構造物の下流側の 減勢池を設計する上で重要である.

最近,著者らは水路傾斜角度 θ =30°,55°の傾斜水路において射流から常流へ遷移する流れを対象に、模型規模でも流入射流に気泡が混入される工夫を行い、遷移部の流況について実験的に検討を行った^{5,6}. その結果、 θ =30°,55°で下流水深 h_d が大きく h_d/h_2 >3.0の場合(h_2)は

水平水路上の自由跳水の対応水深[図-1参照]),流入射流 に気泡が混入されていないとき,顕著な表面渦は形成さ れず,広範囲にわたって循環流(逆流)が形成されるように なる.流入射流に多量の気泡が混入すると,遷移部に多 量の気泡が混入し,気泡の浮力効果によって水路床に沿 って流入した高速流が短区間で水面に向かって上昇し, 常に顕著な表面渦が形成されることを見出した⁹.ここで は射流から常流へ遷移する流れの流況において,顕著な 表面渦が形成される場合と広範囲に循環流が形成される 場合の両者共に跳水と呼ぶことにする.

流入射流の気泡混入の有無によって傾斜水路における 表面渦の形成条件,跳水の流況,あるいは跳水長が大き く変化することから,跳水特性に対する気泡混入射流の 影響を検討することが重要である.

本研究では傾斜水路において射流から常流へ遷移する 流れを対象とし、流入射流の気泡混入量の変化による跳水 長の変化を明らかにした.また、流入射流に十分気泡が混 入された場合を対象に、流入射流および跳水部における気 泡混入の影響を考慮した運動量方程式から、跳水上下流端 の水深間の関係ついて明らかにした.また、跳水上下流端 の水深間の関係について、流入射流に気泡が混入された場 合と気泡が混入されない場合との違いを示した.

2. 実験

本実験では、水路傾斜角度 $\theta = 30^{\circ}$,55°の長方形断面 傾斜水路における跳水を対象とし(図-1)、表-1 に示す 実験条件のもとで跳水特性について検討を行った.表-1 中の跳水始端での断面平均された気泡混入率 C_{mean} ⁷,流 入射流のフルード数 F_1 および h_2 はそれぞれ(1),(2),(3) 式によって算出される.

$$C_{mean} = \frac{l}{\gamma_{0.9}} \int_0^{\gamma_{0.9}} C dy \tag{1}$$

$$F_{I} = \frac{V_{I}}{\sqrt{gd_{I}\cos\theta}} = \frac{q_{w}}{\sqrt{gd_{I}\cos\theta}d_{I}}$$
(2)

$$h_2 = \frac{d_1}{2} \left(\sqrt{8F_1^2 \cos \theta + 1} - 1 \right) \tag{3}$$

ここに*C*は水路底面からの垂直距離*y*における時間平均 された気泡混入率(=気泡混入量 / (気泡混入量+水の量)), d_1 は水のみに換算した流入射流の水深 $(d_1 = (1 - C_{mean})y_{0g}),$ q_w は水のみの単位幅流量 $(q_w = Q/B; B$ は水路幅, *Q*は 水のみの流量), V_1 は d_1 から求めた断面平均流速 $(V_1 = q_w/d_1), y_{0g}$ は*C*=0.9 となる*y*の値を示している. な お, q_w は水路下流側に設置された全幅堰から測定した流 量*Q*より算定した. また, 跳水始端において気泡混入率 の分布を水路横断方向に5箇所測定し, 各測定断面の平 均された気泡混入率を求め, それらを平均して *C_{mean}*およ び d_1 を定めた.

レイノルズ数 $R_e(R_e = V_1 d_1/\nu = q_w/\nu; \nu$ は水の動粘性 係数)が 30000 $\leq R_e \leq$ 70000 の範囲で実験を行った場合, 滑面傾斜面上の射流には気泡が混入されないため,射流 中に気泡を混入させるために階段状水路^{8,9)}を利用した. また,流入射流の断面平均された気泡混入率 C_{mean} は流量 および階段状水路のステップの高さを変化させて調整し た.ただし,階段状水路の形状が跳水の流況および跳水 内部の流速特性に影響しないように跳水始端直上流側か ら水路接合部までの水路傾斜面を滑面水路とした.**図-2** に示されるように,流入射流の気泡混入率の分布形状は *diffusion model*ⁿによって示された気泡混入率の分 布形状の違いは認められない.

眺水内部の水路底面近傍では気泡がほとんど存在しな かったため、底面圧力の測定はピトー管の静圧管を用い た.なお、水路床に設置した圧力取り出し孔を用いた場 合とピトー管の静圧管を用いた場合とで圧力の測定値は ほとんど同じ値を示すことを実験的に確認している.ま た、流入射流における断面平均された気泡混入率 *C*_{mean}お よび眺水内部における気泡混入率の測定には点電極型ボ イド率計を用いた(採取時間 60s,採取間隔 5ms).

表-1 実験条件

$\theta = 30^{\circ}$	$\theta = 55^{\circ}$
$0 \leq C_{mean} \leq 0.38$	$0 \leq C_{mean} \leq 0.55$
$5.7 \leq F_l \leq 7.4$	$7.1 \leq F_l \leq 13$
$1.0 \lesssim h_d/h_2 \leq 4.2$	$1.0 \lesssim h_d/h_2 \leq 6.0$
4.0 cm $\leq d_c \leq 8.0$ cm	4.0 cm $\leq d_c \leq 8.3$ cm
$B = 40 \mathrm{cm}$	$B = 40 \mathrm{cm}$,50 cm
$H_{dam} = 41.0, 152.5 \text{ cm}$	<i>H_{dam}</i> = 82.0,247.3cm

$$B: 水路幅 $d_c: 限界水深$
 $h_d: 下流水深 H_{dam}: ダム高$$$



図-2 流入射流における気泡混入率の分布

3. 流入射流の気泡混入量による跳水長の変化

水路傾斜角度 θ =30°, 55°における C_{mean} / C_M による跳 水長 L_j / h_2 の変化を図-3 に示す. ここで、 C_M はレイノ ルズ数 R_e が 30000 $\leq R_e \leq$ 300000 の範囲における C_{mean} の最大値を示している(本実験において θ =30°の場合、 C_M =0.38、 θ =55°の場合、 C_M =0.55).また、跳水長 L_j は跳 水始端から逆流が常に観察されなくなった断面までの水 平距離として定め、跳水終端では流速が十分減衰してい ることを流速測定の結果から確認している^{3,0}.

図-3 に示されるように、流入射流の断面平均された 気泡混入率が $0 \leq C_{mean}/C_M < 0.6$ の範囲では、相対下流水 深 h_d/h_2 が大きくなるにつれて広範囲に逆流を伴う循環 流が形成され、 L_j/h_2 は大きくなる.この場合、跳水内部 の主流に気泡が混入されにくく、主流の巻き上げに対す る浮力効果が小さくなったものと考えられる.

 $0.6 < C_{mean}/C_M \leq 0.8$ の範囲では、相対下流水深 h_d/h_2 が 大きくなるにつれて、 C_{mean}/C_M の増加に伴う L_j/h_2 の減少 率が大きくなる. この場合、 C_{mean}/C_M が大きくなるにつ れて、跳水内部の主流に気泡が混入されやすくなる. 特 に、下流水深が大きいほど気泡の浮力効果によって、跳 水長が短くなるものと考えられる.

 $0.8 < C_{mean}/C_M \le 1.0$ の範囲では、相対下流水深 h_d/h_2 の 大小によらず $L_j/h_2 = 5.7 \sim 6.0$ となり、自由跳水長²⁾とほぼ 同じ値を示す. この場合、跳水内部の主流に多量の気泡 が常に混入されている. このことから、主流の巻き上げ に対する浮力効果が大きく、下流水深の大小に関わらず 常に表面渦が形成されるようになったものと考えられる.

なお、水路傾斜角度 $\theta=30^\circ$ と 55° との間では C_{mean}/C_M による L_j/h_2 の違いは認められない.

流入射流の断面平均された気泡混入率 C_{mean}/C_M および 相対下流水深 h_d/h_2 の変化を考慮し、 L_j/h_2 の実験式を以 下に提案する.

$$L_{j}/h_{2} = (4.6 - 2.1 C_{mean}/C_{M})(h_{d}/h_{2} - 1) + 5.7$$

$$(0 \le C_{mean}/C_{M} < 0.6)$$

$$L_{j}/h_{2} = 16.8(0.8 - C_{mean}/C_{M})(h_{d}/h_{2} - 1) + 5.7$$

$$(0.6 \le C_{mean}/C_{M} < 0.8)$$

$$L_{j}/h_{2} = 5.7 \sim 6.0 \quad (0.8 \le C_{mean}/C_{M} \le 1.0)$$

$$(4)$$

なお、水路床から $y = y_{09}$ の位置までの眺水始端における気泡混入率Cおよび流速 \overline{u} の測定結果ⁿを次式に代入して単位幅流量 q_w 、が求められる.

$$q_w' = \int_0^{y_{ag}} (1-C)\overline{u} dy \tag{5}$$

(5)式から得られた q_w 'と全幅堰によって測定された q_w と が一致することを確認している. すなわち, y_{09} を気泡混 入流の代表水深とすることによって連続の式 q_w ' = q_w を 満足する.

4. 跳水上下流端の水深間の関係

傾斜水路の跳水を対象に、跳水上下流端の水深間の関係に対する流入射流および跳水部における気泡混入の影響を明らかにするために、図−4に示されるⅠ、Ⅱ断面間の跳水部を検査部に選び、水路傾斜方向に運動量方程式



 F_H :水路水平面上の水路底面に作用する全圧力 P_I , P_d : 跳水上下流端断面に作用する全圧力 W_S , W_H : $I \sim J$, $J \sim II$ 断面までの質量力

図-4 記号の定義図

を適用すると(6)式が得られる. なお、流入射流および跳水部の気泡混入率の変化を密度変化に置き換えて解析を行っている. このとき、検査部水路底面での壁面摩擦力、検査面での Reynolds 応力による表面力および水表面での表面張力を無視する. また、跳水部において気泡(気相)と水流(液相)が一体となって運動するものと仮定する. さらに水路横断方向に対し水理量は変化しないものとする. なお、(6)式は単位幅の水理量で示され、記号は図ー4に基づく.

$$\rho_{w}q_{w}(\beta_{d}V_{d} \cos \theta - \beta_{1}V_{1}) = (W_{s})\sin \theta + (W_{H} - F_{H})\sin \theta + P_{1} - P_{d} \cos \theta$$
(6)

ここに、 β₁、 β_dは跳水始端・終端での運動量補正係数 である. (6)式の各項について以下に示す.

(1)質量力

Wsおよび W_Hは検査部において水路傾斜面上および水 平面上の質量力を示し、次式で示される.



$$W_{S} = S_{S} \left(W_{S} \right)_{w} = S_{S} \frac{\rho_{w}g}{2} \left\{ y_{0,9}^{2} \tan\theta + k' \left(y_{0,9} / \cos\theta + h_{j} \right) \ell \right\}$$
(7)

$$W_{H} = S_{H} (W_{H})_{w} = S_{H} \frac{\rho_{w} g}{2} \{ k' (h_{d} + h_{j}) (L_{j} - \ell) \}$$
(8)

$$h_{j} = \left(\ell \tan\theta + \frac{y_{0.9}}{\cos\theta}\right) + \left\{h_{d} - \left(\ell \tan\theta + \frac{y_{0.9}}{\cos\theta}\right)\right\} \frac{\ell}{L_{j}}$$
(9)

ここで、k'は眺水始端から終端までの水面形を直線変化 するものとみなして算定した跳水部の体積と水面形の実 測から求めた跳水部の体積との比を示し、(W.)。および (W_H)_wは検査部において水面までを全て水とした場合の 水路傾斜面上および水平面上の質量力を示している. な お、本研究ではC=0.9となる位置を水面として定めてい る. また, h,は水路接合部の水路床から跳水始端と跳水終 端とを結んだ直線までの高さを示す(図-4 参照). $C_{mem}/C_{M}=1$ の場合における k'の変化を図-5 に示す. なお, 図-5中の破線は $C_{mean}/C_M=0$ の場合の実験式³⁾を示してい る. Cmem /CM=1 の場合, 跳水始端付近に多量の気泡が混 入し水面が上昇するため $C_{mean}/C_M=0$ の場合³⁾に比べk'は 大きい値となる. また, C_{mean} / C_{M} =1 の場合, 相対下流水 深 h_a/h_a の増加に伴いkは小さくなり、水路傾斜角度 θ お よび C_{mean}/C_M によらずk'は1に近づく. $C_{mean}/C_M=1$ にお ける k'の実験式を以下に示す.

$$k' = 1 + 10^{\left[-0.723h_d/h_2 + 0.626\tan\theta - 1.02\right]}$$
(10)

S_sは眺水部における傾斜面上の実際の質量力と傾斜面上の眺水部を全て水とみなして算定した質量力との比であり、S_Hは眺水部における水平面上の実際の質量力と水平面上の眺水部を全て水とみなして算定した質量力との比を示し、次式で定義する.

$$S_{s} = I - \frac{I}{\ell/L_{j}} \int_{0}^{\ell/L_{j}} (C_{o}) d\left(\frac{X}{L_{j}}\right)$$
(11)

$$S_{H} = I - \frac{I}{I - \ell/L_{j}} \int_{\ell/L_{j}}^{I} (C_{o}) d\left(\frac{X}{L_{j}}\right)$$
(12)

ここに、C_oは跳水内部の各鉛直測定断面においてy=0からy=y₀₉までの平均された気泡混入率、Xは跳水始端か



らの水平距離を表している. $C_{mean}/C_M = 1$ における跳水内部の気泡混入率 C_o/C_{mean} の変化⁶を図ー6に示す. 図ー6に示されるように、 C_o/C_{mean} は水路傾斜角度 θ 、相対下流水深 h_d/h_2 によらず X/L_j によって整理される. X/L_j による C_o/C_{mean} の変化を表す実験式を以下に示す.

$$\frac{C_o}{C_{mean}} = e^{0.0353 - 2.18\frac{X}{L_j}} \qquad \left(\frac{C_{mean}}{C_M} = I\right)$$
(13)

(2)水路水平部における跳水中の底面に作用する全圧力

*F_H*は水路水平部における跳水中の水路底面に作用する 全圧力を示し、次式で表される.

$$F_H = r W_H \tag{14}$$

ここで,rは水路水平部の検査部内の底面に作用する実際 の全圧力と静水圧と仮定した場合の全圧力との比である. $C_{mean}/C_M=1$ の場合におけるrの変化を図-7示す.なお, 図-7中の破線は $C_{mean}/C_M=0$ の場合の実験式^{3,10)}を示し ている. $C_{mean}/C_M=1$ の場合, $C_{mean}/C_M=0$ の場合に比べrは大きい値となる.また, $C_{mean}/C_M=0$ および1の場合と もに h_d/h_2 の増加に伴いrは減少し1に近づく. C_{mean}/C_M =1におけるrの実験式を以下に示す.

$$r = 1 + 10^{\left[-0.446 \, h_d / h_2 + \left\{\ln\left(\tan \theta - 0.3\right) - 1.28\right\}/2.25\right]} \tag{15}$$

(3) 跳水始端・終端での全圧力

*P*₁, *P*_dは跳水始端断面および終端断面での単位幅当たりの全圧力を示し、次式で表される.

$$P_{I} = \rho_{w}g \cos \theta \int_{0}^{y_{0.9}} \int_{y}^{y_{0.9}} (1 - C) dy dy$$
$$= \lambda_{I} \frac{\rho_{w}g}{2} d_{I}^{2} \cos \theta \qquad (16)$$



ここに、 λ_1 は眺水始端での水のみに換算した水深 d_1 およ び水の密度 ρ_w で表示したときの全圧力の補正係数であ る. C_{mean} による λ_1 の変化を図-8に示す. 図に示される ように、 C_{mean} が増加するにつれて λ_1 は増加する.

 λ_d は跳水終端断面における全圧力の補正係数を示している. 跳水終端断面では気泡混入されず静水圧分布していることから λ_d =1.0 である.

(4) 跳水始端・終端での運動量

跳水始端での運動量に示される β_1 は跳水始端での水 のみに換算した水深 d_1 ,水のみの単位幅流量 q_w ,水の 密度 ρ_w で表示したときの運動量補正係数であり,次式で 示される.

$$\beta_{1} = \frac{\int_{0}^{y_{0.9}} \rho \overline{u}^{2} dy}{\rho_{w} q_{w} V_{w}} = \frac{\int_{0}^{y_{0.9}} (1 - C) \left(\frac{\overline{u}}{V_{0.9}}\right)^{2} dy}{\left[\int_{0}^{y_{0.9}} (1 - C) \left(\frac{\overline{u}}{V_{0.9}}\right) dy\right]^{2}} d_{1}$$
(18)

ここで ρ , V_w はそれぞれ $\rho = (1 - C) \rho_w$, $V_w = q_w/d_1$ を示す.

実験的に求められた気泡混入率*C*および流速 \overline{u} を(18) 式に代入して β_1 を求めると、*C*_{mean}の変化に関わらず $\beta_1=1.03\sim1.05$ となり(図-8)、 $\beta_1=1.0$ とみなせる. な お、眺水始端の流速分布は指数則⁷ $\overline{u}/V_{09}=(y/y_{09})^{16}(V_{09})$ は $y=y_{09}$ のときの \overline{u})で近似できるものとしている. 跳水 終端断面での運動量補正係数 β_d については、流速分布の 実測値から、 $\beta_d = 1.0$ とみなせることを確認している.

(7), (8), (14), (16), (17)を(6)式に代入し整理すると, 次式のように無次元表示される.



なお、 ℓ/d_1 , F_1 , θ および $C_{mean} \epsilon(19)$ 式に代入して h_d/d_1 を算出する際に、 λ_1 の値を1と仮定して計算した場合と 実験値の λ_1 の値を用いて計算した場合との差は h_d/d_1 の 計算値の1%以内であるため λ_1 =1.0 としている.

 S_S , S_H , k', rの実験式および $L_j/h_2 \approx 5.7$ を (19)式に代入することによって $C_{mean}/C_M = 1$ における跳水上下流端の水深間の関係(20)式が得られる.

$$\ell / d_l = f(h_d / d_l , F_l , \theta, C_{mean} / C_M)$$
(20)

(19)式から算出された $h_d/d_l c(h_d/d_l)_{cal}$ とし、実験的に得られた $h_d/d_l c(h_d/d_l)_{ep}$ として比較すると、誤差[$|(h_d/d_l)_{ep}$ - $(h_d/d_l)_{cal}$ |/ $(h_d/d_l)_{ep}$ ×100(%)]は5%以内となる(**図**-9).

 $\theta=30^{\circ},55^{\circ}$ を対象に $C_{mean}/C_{M}=0$ および1 における跳 水上下流端の水深間の関係の比較を図-10 に示す. 図中 破線は $C_{mean}/C_{M}=0$ の場合³,実線は $C_{mean}/C_{M}=1$ の場合 における水深間の関係を示している. ただし, $C_{mean}/C_{M}=0$ のでかつ水路傾斜角度 $\theta>23^{\circ}$ の場合, $h_{d}/h_{2}>3.0$ の範囲 で表面渦の形成が認められないので³, $C_{mean}/C_{M}=0$ の 場合, $1.0 \leq h_{d}/h_{2} \leq 3.0$ の範囲の計算値を示している.

図-10に示されるように与えられた θ , F_1 , および h_d/d_1 に対して $C_{mean}/C_M = 1$ の ℓ/d_1 の値は $C_{mean}/C_M = 0$ の ℓ/d_1 の 値に比べて最大 9.5%大きくなる. これは跳水部に気泡が 混入されたことによって、跳水始端近くで体積が増加す るため、 $C_{mean}/C_M = 0$ の場合よりも跳水始端位置が上流側 に位置したためと考えられる.

また, θ =55°の場合,計算結果から $0 \leq \ell/d_1 \leq 2$ の範囲で一つの相対下流水深 h_d/d_1 に対して二つの ℓ/d_1 が存在する. 跳水始端が水路接合部近くになると,跳水の位置が変動することが実験的に確かめられている. 与えら



れた h_d/d_l に対する二つの ℓ/d_l の存在からこの現象を説 明することができる.同一の相対下流水深 h_d/d_l に対して ℓ/d_l の値が一つの解をもつ範囲では($\ell/d_l > 2$)水路傾斜面 上に眺水始端が位置し、始端の位置は安定していること が確認されている.

5. まとめ

水路傾斜角度 θ=30° および 55° の傾斜水路において射 流から常流へ遷移する流れを対象とし、流入射流の気泡 混入量による跳水長の変化について実験的に検討した. また、流入射流および跳水部の気泡混入の影響を考慮し た運動量方程式を用いて跳水上下流端の水深間の関係に ついて検討した.得られた結果を以下にまとめる.

- ① 流入射流の断面平均された気泡混入率 C_{mean}/C_M による跳水長 L_j/h_2 の変化について広範囲な実験条件のもとで検討した結果、 $0 \le C_{mean}/C_M < 0.6$ の場合、下流水深の増加に伴い跳水長が長くなり、 C_{mean}/C_M による変化が小さいことを示した.また、 $0.6 < C_{mean}/C_M \le 0.8$ では C_{mean}/C_M の影響を受けて L_j/h_2 は大きく減少し、 $0.8 < C_{mean}/C_M \le 1.0$ では $L_j/h_2 = 5.7 \sim 6.0$ となり自由跳水長とほぼ同じ値を示すことを明らかにした.さらに、 C_{mean}/C_M および h_d/h_2 の変化による L_j/h_2 の実験式を提案した.
- ② 傾斜水路における跳水を対象に運動量方程式を適用し、質量力、底面圧力、跳水始端・終端での全圧力および運動量の各項に対して気泡混入の影響を考慮した跳水上下流端の水深間の関係を示した.また、与えられた θ、F₁、および ℓ/d₁に対して、相対下流水深h_d/d₁が予測されることを明らかにした.
- ③ 与えられた θ , F_1 , および h_d/d_1 に対して C_{mean}/C_M =1 の場合, 跳水部に気泡が混入されたことによって跳 水始端近くで体積が増加するため, C_{mean}/C_M =0の場 合よりも跳水始端位置が上流側に位置することを明 らかにした.



以上のことから,傾斜水路における跳水長および跳水上 下流端の水深間の関係に対する気泡混入射流の影響を明 確にし,順傾斜式水叩きにおいて流入射流の気泡混入を 考慮した減勢工の水工設計が可能であることを見出した.

参考文献

- Rajaratnam, N.: Hydraulic Jumps, *Advances in Hydroscience Vol.4*, Chow, V.T. ed., Academic Press, New York, pp.197-280, 1967.
- Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Awazu, S.: Free and Submerged Hydraulic Jump in Rectangular Channels, Report 35, *Research Institute of Science and Technology*, Nihon University, pp.1-50, 1990.
- Ohtsu, I. and Yasuda, Y.: Hydraulic Jump in Sloping Channels, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.117, No.7, pp.905-921, 1991.
- W. H., Hager. : *Energy Dissipators and Hydraulic Jump*, Water Science and Technology Library, Vol.8, KLUWER, Dordrecht, 1992.
- 5) 安田、高橋、小林、大津: 傾斜水路の眺水特性に対する空気 混入射流の影響,水工学論文集,土木学会,第46巻, pp.601-605,2002.
- 小林,安田,大津: (傾斜水路の跳水特性に対する気泡混入 射流の影響,水工学論文集,土木学会,第49巻, pp.823-828, 2005.
- Chanson, H.: Air Bubble Entrainment in Free surface Turbulent Shear Flows, Academic Press, New York, 1996.
- Yasuda, Y. and Ohtsu, I.: Flow Resistance of Skimming Flows in Stepped Channels, *Proceeding of 28th IAHR Congress*, Graz, Austria, Session of B14 (CD-ROM), 1999.
- Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.,: Flow Characteristics of Skimming Flows in Stepped Channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.30, No.9, pp.860-869, 2004.
- Ohtsu, I. and Yasuda, Y.: Discussion of B-Jump in Sloping Channel, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol.28, No.1, pp.105-119, 1990.