# 細管層流中の物質移流分散に関する一整理 ~多孔体物質輸送との対比~

# A DISCUSSION ON ADVECTION DISPERSION IN LAMINAR PIPE FLOW - COMPARING TO SOLUTE TRANSPORT IN POROUS MEDIA -

# 鷲見哲也<sup>1</sup> Tetsuya SUMI

1正会員 博(工) 名古屋大学大学院 講師 工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

In solute transport through porous media in column experiment, increasing of apparent dispersion coefficient D as distance can be observed. This kind of phenomena has been thought by heterogeneous permeability. But Taylor theoretically explained by Lagrangian correlation function that constant coefficient D requires a time while solute particles go through various velocities. This concept can be used in porous media also.

As a phenomenon to simplify porous media flow, solute transport in laminar pipe flow is studied. Solute transport is simulated by stochastic-Eulerian approach and compared with previous theories from Lagrange or Euler view points. Results show good fitting to the Lagrangian correlation theory and time scale  $t_0$ , in which D changes. Furthermore, they indicate that D is underestimated by using 1-D Eulerian theory in time scale same as  $t_0$ .

*Key Words :* advection-dispersion, correlation time, velocity profile, Markov process, laminar pipe flow, Lagrangian approach, stochastic approach

# 1. はじめに

多孔体中の浸透場における移流分散現象では一般に, 一様な場において、分散係数を一定として扱う.一方、 地下水浸透層の分散係数には距離依存性があることが認 識されており(たとえばBear<sup>1)</sup>),一般にはスケールの 拡大による不均一構造の取り込みにより流速分布が広く なるためであると考えられている. ところがカラム実験 においても、推定される分散係数が溶存物質投入点から の浸透距離に依存し変化する様子が観察され、材料不均 一に伴うものとして考察される事が多い. ところが、 Taylor<sup>2</sup>のLagrange的整理に基づく理論は、ランダムな流 れが繰り返される場合、十分な距離を流下すればみかけ の分散係数は一定となるが、投入点近くでは変化する事 を示している. 我々が知るべきことは、(1) どの程度 の距離(時間)で、みかけの分散係数は一定となるのか、 (2) その距離(時間)よりも観測している現象全体の スケールが小さい場合、分散係数の空間的(時間的)変 化はどの程度で、何によって決まるのか、ということで ある. これらの問題に注意が払われるべきである.

さて、地下水浸透を代表とする多孔体内の流れは一般 に層流で扱われる.本論ではそのもっともPrimitiveな問 題として帰着することの出来る円管内層流での移流分散 現象について考える事とする.円管内層流における移流 分散現象については、古くはTaylorなど<sup>340</sup>が、瞬間面源 注入の条件における移流分散方程式の半理論解を得てい る.一方、一般的な拡散現象の説明として、Taylor<sup>21</sup>など はLagrange相関を用いて整理し、物質粒子が様々な流速 を履歴するに足る程に十分に長い時間(距離)をかけて 初めて、一定の拡散係数として取り扱える事を示した (椿<sup>51</sup>).これを分散現象に拡張して考えると、層流で は流速シアが急でありながら、流線間・異なる流速間に おける物質の混合が分子拡散のみによる事から、様々な 流速を履歴するには長い時間が必要であり、短い区間

(時間)において「分散係数一定」の仮定が成立しにくい.本論ではこの点に着目しつつ,粒子速度のLagrange相関を用いた評価と従来の1次元移流分散理論との比較を行い,多孔体中移流分散の時間依存問題の整理の端緒として,分散係数の挙動の基本特性を整理する.

# 2. 円管内一様層流における移流分散の理論

# (1) Euler的記述による移流分散の理論

#### a) 基礎方程式と条件

本論では対象を無限遠の一様な円管(細管)とし,長 さ方向にx,半径方向にrの座標をとり,現象はすべて軸 対象とする.円管内流れは層流の定常流 (Poiseuille流 れ)とする.物質の濃度分布も軸対象を仮定し、 #0に 質量mの物質がx=0の断面内に一様に瞬間面源投入され るものとする. また、分子拡散は横断方向のみ考慮し、 縦方向の分子拡散は移流に対して無視する. 以上の条件 から、物質輸送の方程式は次式で表される.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(r)\frac{\partial C}{\partial x} = D_M \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right)$$
(1a)

$$u(r) = 2U_A \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad U_A = \frac{gIa^2}{8\nu}$$
 (1b)

$$C(x,r;t=0) = \frac{m}{\pi a^2} \delta(x), \quad C(x=\pm\infty,r;t) = 0$$
 (1c)

ここに、U<sub>4</sub>: 断面平均流速、a: 円管半径、D<sub>M</sub>: 分子拡 散係数, g:重力加速度, I:動水勾配, v:動粘性係数,  $m: 投入物質総質量, \delta(x): Diracのデルタである.$ 

無次元化を考えると,時間については,物質が断面全 体に横断して分子拡散する時間スケールの時間特性量  $T_a=a^2/D_M$ を用いて表し、 $t^*=t/T_a=a^2t/D_M$ とする. また、x の無次元量は、断面平均流速と横断拡散時間スケールの 積L<sub>x</sub>=U<sub>4</sub>T<sub>a</sub>を用いて次式で表せる.

$$x^{*} = \frac{x}{L_{x}} = \frac{x}{U_{A}T_{a}} = \frac{D_{L}x}{U_{A}a^{2}}$$
(2)

さらに、 $r^* = r/a$ 、 $C^* = C/(m/a^2 L_x)$ として式(1)を無次元化する.  $\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + u^*(r^*)\frac{\partial C^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial C^*}{\partial r^*}, \quad u^* = 2(1 - r^{*2}) \quad (3a)$  $C^*(x^*, x^*; t^* = 0) = \frac{1}{2} S(x^*, 0) = C^*(x^* = \pm \infty, x^*; t^*) = 0$  (21)

ற 際に消去され、上式の解はパラメータによらない.

### b) 係数一定の1次元移流分散の解

一方,1次元の移流分散方程式(無次元)は、断面平 均濃度 $C_m^*(x^*;t^*)$ ,分散係数Dとして,次式で表される.

$$\frac{\partial C_m^*}{\partial t^*} + \frac{\partial C_m^*}{\partial x^*} = D^* \frac{\partial^2 C_m^*}{\partial x^{*2}}$$
(4a)

$$D^* = \frac{D}{U_A L_x} = \frac{1}{U_A^2 T_a} D = \frac{D_L}{U_A^2 a^2} D$$
(4b)

$$C_m^*(x^*;t^*=0) = \delta(x^*), \quad C_m^*(x^*=\pm\infty;t^*) = 0$$
 (4c)

分散係数一定と仮定した上式の解は正規分布となる.

$$C_{m}^{*}(x^{*};t^{*}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D^{*}t^{*}}} \exp\left(-\frac{(x^{*}-t^{*})^{2}}{4D^{*}t^{*}}\right)$$
(5)

次式で得られる式(3)の解の断面平均濃度を,式(5)と比 較する事によって、分散係数を一定として扱ってよいか どうかがわかる.

$$C_{m}^{*}(x^{*};t^{*}) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} C^{*}(x^{*},r^{*};t^{*}) \cdot 2\pi r^{*} dr^{*}$$
(6)

# c) Taylorによる、1次元分散係数に関する整理

式(3)の厳密な解析解は得られていないようだが、

Taylor<sup>3)4)</sup>は式(6)の様に管内濃度分布を関数近似し、流下 方向濃度勾配を断面内で一定と仮定した上で,式(la)を 断面で平均し、分散係数を定数として求め、次式を得た.

$$C = C(r = 0) + A((r/a)^{2} - (r/a)^{4}/2), A : = (7a)$$

$$\partial C/\partial x = \partial C_m/\partial x \tag{7b}$$

$$D = \frac{1}{192} U_0^2 d^2 / D_L = \frac{1}{48} U_0^2 a^2 / D_L = \frac{1}{48} U_0^2 T_a$$
(7c)  
$$D^* = 1/48$$
(7d)

$$=1/48$$
 (7d)

これらは厳密には式(1)の方程式を満たさず、分散係数が 変化する時間帯(区間)における挙動と構造についても 明らかではない.またTaylor<sup>4)</sup>は、その縦分散係数が一定 とみなせるための条件として, 流れのない円筒中拡散の 理論解から得る時間特性は(初期濃度分布1次モードの 振幅がその1/e倍に減衰する時間),

$$t_1 = \frac{1}{3.8^2} \frac{a^2}{D_L} = \frac{1}{14.4} T_a, \quad t_1^* = \frac{t_1}{T_a} = \frac{1}{14.4}$$
(8)

を超える十分な時間が必要であるとした.

## (2) Lagrange相関を用いた分散係数の変化

一方で、Taylor<sup>2)</sup>は1920年代にLagrange的視点からの一 般的な拡散の理論を示している.瞬間注入後の粒子輸送 をミクロに見ると、一つ一つの粒子が分子拡散のように、 「短い時間」を経過する毎にランダムな運動を行うよう な場合、つまり粒子の流速に時間的相関がない状況では、 その空間分散(濃度分布・粒子の位置の2次モーメン ト)は、式(5)から時間に比例することがわかる.

$$\overline{X^{\prime 2}} = E\left[\left(X - \overline{X}\right)^2\right] = 2Dt, \quad X' = X - \overline{X}, \quad \overline{X} = E\left[X\right]$$
(9)

X1は時刻tの粒子位置で,確率変量である.このとき,D が一定であり、1次元移流分散の理論式(5)の空間分散が 式(9)と一致することから、式(5)は常にランダムな運動、 つまり運動に時間相関がないことを前提としている.

ところで, Lagrange的視点から定義される任意の時刻 での分散係数は、粒子分布(濃度分布)の空間分散の時 間変化率として定義され、次式のように変形される.

$$U'=U-\overline{U}$$
(断面分布では,  $\overline{U}=U_A$ ) (10)

$$D = \frac{1}{2} \frac{d\overline{X'^2}}{dt}$$
(11a)

$$D = \overline{X'\frac{dX'}{dt}} = \overline{X'U'}$$
(11b)

$$D = U'(t) \int_{0}^{t} U'(t_{2}) dt_{2}$$
  
=  $\sigma_{U}^{2} \int_{0}^{t} \frac{\overline{U'(t_{2})U'(t)}}{\sigma_{U}^{2}} dt_{2} = \sigma_{U}^{2} \int_{0}^{t} R_{L}(t-t_{2}) dt_{2}$  (11c)

$$D^* = \frac{1}{2} \frac{d\overline{X^{*+2}}}{dt} = \sigma_{U^*}^2 \int_0^t R_L(t^* - t_2^*) dt_2^*$$
(11d)

分散係数は、粒子速度の偏差U'= dX'/dt と粒子位置の偏 差Xとの共分散で表される. 粒子位置が粒子速度の時間 積分で表せることを利用すると瞬間分散係数は、流速 分散 $\sigma_U^2$ と粒子流速のLagrange相関係数 $R_L$ で表現できる.

$$R_{L}(\tau) = \frac{U'(t)U'(t+\tau)}{\sigma_{U}^{2}}, \qquad \sigma_{U}^{2} = U_{0}^{2}/3 \qquad (12a)$$

$$R_{L}(\tau^{*}) = \frac{\overline{U^{*'}(t^{*})U^{*'}(t^{*}+\tau^{*})}}{\sigma_{U^{*}}^{2}}, \qquad \sigma_{U^{*}}^{2} = 1/3$$
(12b)

ここに、dは時間差で、 $\sigma_0^2$ は粒子流速の確率分布が断面 内流速の統計分布と一致する時の値である. Lagrange相 関は粒子がどの程度の時間まで同様の流速を持つかを 示し、ここでは指数関数型での相関低減を仮定する.

$$R_{L}(\tau) = \exp(-\tau/t_{0}), \quad R_{L}(\tau^{*}) = \exp(-\tau^{*}/t_{0}^{*})$$
 (13)

これを式(11d)に代入すると、分散係数の時間変化を表現できる.この寿命時間と言われる $t_0$ ( $t_0^*$ )が分散係数の時間変化と最終分散係数 $D_\infty$ を決定する.

$$D = \sigma_U^2 t_0 [1 - \exp(t/t_0)], \quad D^* = \sigma_{U^*}^2 t_0^* [1 - \exp(t^*/t_0^*)] \quad (14a)$$

$$D_{\infty} = \sigma_{U}^{2} t_{0} = \frac{U_{A}^{2}}{3} t_{0}, D_{\infty}^{*} = \sigma_{U^{*}}^{2} t_{0}^{*} = \frac{t_{0}}{3} = \frac{t_{0}}{3T_{a}}$$
(14b)

この式は、十分な時間がたてば、粒子が様々な流速を経 る事によって分散係数が一定となる事を示している.円 管層流の様に流速分布が大きく、乱れがなく同様の流速 が流下方向に連続し、流速の異なる流線間の交換が少な い状況では、比較的長い間、粒子速度が時間相関を保ち やすく、見かけの分散係数(瞬間分散係数)は拡大する.

さて、その時間スケールを決める寿命時間6を、式 (14)と式(7)とを比較して評価しよう.

$$t_0^* = \frac{1}{16}, \qquad t_0 = \frac{1}{16}T_a = \frac{1}{16}\frac{a^2}{D_L}$$
 (15)

円管層流に限れば、Taylor<sup>3</sup>は断面内拡散から式(8)の  $t^*=1/14.4$ を示しており、上記とほぼ対応する.また、式 (14b)からわかるように、寿命時間が分散係数と流速の統 計的特性から得られる事も非常に興味深い.以上は、既 往の理論の整理であるが、次の2点を重視する.

1)式(14)から流速のLagrange相関特性と、流速のばら つきが既知となれば、分散係数が得られる.

2)寿命時間(またはそれに対応する距離)が評価でき れば、分散係数の定常性を判断する材料となる.

# 3 確率論的Euler 解法による数値計算と, Lagrange相関法および1次元理論の比較

本節では、粒子輸送の微細構造を確率論的アプローチ によって記述し、数値計算によって濃度分布の時間変化 を表して1次元理論と比較するとともに、上述の流速 Lagrange相関係数に集計して、分散係数の変化特性にど のように影響するのかを議論する.

### (1) 粒子流速の確率遷移

いま,場は軸対象であると仮定する.時刻=0に,x=0の断面に一様な確率で粒子が配置されるものとする.時



図-1 遷移確率密度の計算(r1からr2への移動)

刻t=uに粒子がr=Rに存在する確率密度を $f_i(R,t)$ とし、そこでの流速U=u(R)である確率密度を $f_i(U,t)$ する. x=0の断面に均一に散布する条件では、初期の粒子流速の確率密度は一様で、最大流速は平均流速 $U_A$ の2倍となる.

$$f_r(R,0) = 2/R \qquad (0 \le R \le a)$$

 $f_u(U,0) = 1/2U_A$  (0 ≤  $U \le 2U_A$ ) (16a,b) 参考に水の断面通過fluxの分布に比例して投入した場合,

$$f_r(R,0) = \frac{4R}{a^2} \left( 1 - \frac{R^2}{a^2} \right) \qquad (0 \le r \le a)$$
  

$$f_u(U,0) = U/2U_0^2 \qquad (0 \le u \le 2U_0)$$
(16c,d)

となる. 初期時刻t=tに $R=R_1$ に存在した粒子が,時刻  $t=t+\Delta t$ に $R=R_2$ に移動し存在する確率密度を $g_{R1}(R_2,R_1)$ と表 し,この遷移の確率分布は定常であるとする. そして時 刻 $t=t_0$ に $R=R_0$  ( $U=U_0$ )であった粒子が,kタイムステップ 後の時刻 $t=k\Delta t$ に $R=R_k$  および $U=U_k$ となる遷移確率  $f_{iR,k}(R_k,R_0)$ および $f_{iU,k}(U_k,U_0)$ は,次式の漸化式で書かれる.

$$f_{tR,k}(R_k, R_0) = \int_{r_{k-1}=0}^{a} g_{R1}(R_k, R_{k-1}) \cdot f_{tR,k-1}(R_{k-1}, R_0) dR_{k-1}$$
(17a)

$$f_{tR,1}(R_1, R_0) = g_{R1}(R_1, R_0)$$
(17b)

$$f_{iU,k}(U_k, U_0) = -f_{iR,k}(R_k, R_0) \cdot \frac{dr}{du}\Big|_{r=R_k} = f_{iR,k}(R_k, R_0) \cdot \frac{a^2}{4U_A R_k}$$
(17c)

これは、単純なMarkov過程であり、fri, fuiの多重積分で記述される. kステップ後の存在確率は次式となる.

$$f_{R}(R_{k},k\Delta t) = \int_{R_{0}=0}^{a} f_{R}(R_{0},0) \cdot f_{tR,k}(R_{k},R_{0})dR_{0}$$
(18a)

$$f_U(U_k, k\Delta t) = \int_{U_0=0}^{2U_k} f_u(U_0, 0) \cdot f_{U,k}(U_k, U_0) dU_0$$
(18b)

式(17)のg<sub>R1</sub>について、1ステップムの間、粒子は分子 拡散により内径aに比べて十分短い距離を横断方向にΔr だけ移動すると考える. 横断移動距離Δrの確率密度は、 壁面に当たる事なく移動した場合、次式となる(図-1).

$$f_{MD}(\Delta r^2, \Delta t) = \frac{1}{4\pi D_M \Delta t} \exp\left(-\frac{\Delta r^2}{4D_M \Delta t}\right)$$
(19)

よって $\Delta t$ の間に $r=R_1$ から $r=R_2$ に遷移する確率密度は,

$$g_{R1}(r_2, r_1) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f_{MD} \Big( R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\theta, \Delta t \Big) R_2 d\theta \quad (20)$$

となる.壁面を超える範囲(*R*<sub>2</sub>>*a*)については壁面を 鏡面として,便宜的に上式の積分結果を*f*<sub>r1</sub>(*a*-(*R*<sub>2</sub>-*a*)),*R*<sub>1</sub>) に加算する(図-1).こうして得た粒子の位置及び流 速の遷移確率密度*g*<sub>R1</sub>(*R*<sub>2</sub>,*R*<sub>1</sub>)及び*g*<sub>U1</sub>(*U*<sub>2</sub>,*U*<sub>1</sub>)を図-2に示す.



式(16~20)により,  $t=k_{\Delta t}$ の粒子速度の確率密度 $f_{U}(U_{k}, k_{\Delta t})$ と,  $t=0 \sim k_{\Delta t}$ 間の粒子速度の遷移確率分布  $f_{U,k}(U_{0}, U_{k})$ を得る(図-3).これは上記において,  $r=0 \sim a \epsilon n = 40$ 個に,  $x \epsilon n = 500$ 個に差分化し,数値積分によっ て算定した.図-3からは, t=0.1に比べt=0.4は分布が 均一となり,初期からの粒子流速のLagrange相関が失わ れていることがわかる.本節では有次元諸量で説明し たが,  $\Delta t=\Delta t/T_{a}$ などの無次元化により,式(3)同様, パ ラメータに依存しない解となる.

 $X_k > U_k$ または $R_k$ の存在確率と濃度分布は次式で得る.

 $f_{XU,k}(X_k, U_k)$ 

 $f_{XR,k}(X_k, R_k)$ 

$$= \int_{0}^{2U_0} g_{U1}(U_k, U_{k-1}) \cdot f_{XU, k-1}(X_k - U_{k-1}t, U_{k-1}) dU_{k-1}$$
(21a)

$$= \int_{a}^{a} g_{R1}(R_{k}, R_{k-1}) \cdot f_{XR|k-1}(X_{k} - u(R_{k-1})t, R_{k-1}) dR_{k-1}$$
(21b)

$$f_{XU,k=0}(X_0, U_0) = f_U(U_0, 0) \cdot \delta(X_0)$$
(21c)

$$f_{XR,k=0}(X_0,R_0) = f_R(R_0,0) \cdot \delta(X_0)$$
(21d)

C(x,r,t=k∆t)=(1/2m)f<sub>xRk</sub>(x=X<sub>k</sub>,r=R<sub>k</sub>) (22)
 上式によって、単位投入質量に対する濃度分布
 C<sup>\*</sup>(x,r,t) (図-4) と式(6)の断面平均濃度C<sub>m</sub><sup>\*</sup>(x,t)が得られ
 る(図-5).初期段階 (t\*=0.1) において流速シアの強







い壁付近と流速勾配の少ない中心軸付近にやや離れて 高濃度域があり、*t\*=*0.4にはこれらが連続している.

### (2)Lagrange相関とそれを用いた分散係数の挙動

が経過の前後での粒子速度のLagrange相関係数は、上記計算結果を次式によって数値的に積分して得られる.

$$R_{L}(k\Delta t) = \frac{1}{\sigma_{U}^{2}} \overline{\left(U_{0} - \overline{U_{0}}\right)} \overline{\left(U_{k} - \overline{U_{k}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sigma_{U}^{2}} \int_{U_{0}=0}^{2U_{A}} f_{u}(U_{0}, 0) \overline{\left(U_{0} - \overline{U_{0}}\right)} \overline{\left(\int_{U_{k}=0}^{2U_{A}} f_{tU,k}(U_{k}, k\Delta t)\right)} \overline{\left(U_{k} - \overline{U_{k}}\right)} dU_{k} dU_{0}$$
(23)

その結果, 無次元流速u<sup>\*</sup>=u/U<sub>0</sub>のLagrange相関は図-6 のプロットの様になった.式(13)と比較した結果, t<sub>0</sub><sup>\*</sup>は 1/16.2となり式(15)の1/16にほぼ一致し,式(7a)の最終分 散係数の評価はほぼ妥当である.

以上から、例えば、a=0.2mm、 $U_A=0.49$ cm/sの条件では、 $T_a=a^2/D_M=66.7$ sec、 $t_0=T_a/16=4.17$ sec、 $D_{\infty}=0.33$ cm<sup>2</sup>/s



である. 図-7が示す様に、相関の解消は $T_a$ の1/3の20秒 程度、 $t_0$ の5倍程度必要であり、上記の条件では、長さ 20cm程度まで分散係数の変化があると見る.

上述の計算結果から、いくつかの評価方法による分 散係数の時間変化を図-7の凡例①~③に示している.

凡例①:図-6 (式23)の結果を式(11c)で積分した結果.

- 凡例②:各時刻の濃度(確率密度)分布の分散の時 間変化である式(11a)による結果.
- 凡例③:式(21)により各時刻のX,U平面での存在確率 密度f<sub>XU,k</sub>(X,U)を計算し,式(11b)および次式 (24)により位置と流速の相関を得た結果.

$$D = X'U'$$
  
=  $\int_{X_k=0}^{\infty} \int_{U_k=0}^{2U_A} (X_k - \overline{X_k}) (U_k - \overline{U_k}) f_{XU,k} (X_k, U_k) dU_k dX_k$  (24)

これら3つの方法は互いに同じ挙動をしていること から、Lagrange相関による分散係数の変化は、濃度分布 の広がりの時間変化を表現している.

## (3) 初期投入条件の違いによる影響

図-7中, ②'および②''は, 式(16c,d)に従って初期の粒子流速の確率密度をフラックス依存として, ②と同様に計算した結果である. ②'において分散は, 各時刻の濃度の平均位置からとったものを用い, ②''は, 平均流速による位置U<sub>0</sub>からの分散によって計算したものである. ②に比べ, ②''は早く上昇している. 図-8(a)は,物質ベースの平均速度・速度分散であり,同図(b)は濃度の重心と分散の時間変化であるが, 凡例に"-Q"の付されたものは, フラックス依存の初期条件によるものである.

 $t^*=0.2$ 頃まで平均速度が高く、図-7②"に用いられた分散 (図中varX-Q'の凡例)が早く上昇している.よって、 この初期の分散の増大は、実際の濃度重心と平均流速に よる位置 $U_0t$ との不一致が原因である.

多孔体カラム実験等に置き換えて考えると、カラム上



図-9 Breakthrough Curve ((I)は式(5)でD\*=1/48.6を仮定)

端からの溶液の切り替えは流量ベースであるから,図-8(a)の様に初期,あるいは投入点付近においての見かけ の移流速度が速く観測される場合には、このような問題 を抱えている可能性があり、カラム全体の解析には注意 が必要である.

## 4 多孔体移流分散への応用

#### (1)相関スケールと多孔体分散現象

Lagrange相関法のメリットは、図-6および7の様に、分 散係数の時間的挙動を把握できることである.つまり、 比較的一様な場であれば、移流分散方程式を領域に渡っ て高解像度で解く必要がなく、粒子流速の相関特性さえ 得られればよい.このことは、どの流れ場であっても共 通のことであり、代表的なスケール(REV)での流れ場 の情報があればよいのである.よって、カラム実験など で分散係数が拡大・安定するスケールの予測は、流速の 相関の概要を把握する方法があればよい.

最終分散係数を用いた現象の説明には、粒子速度相関 が解消する $t^*5t_0^*$ , つまり円管層流では $t^*=1/3$ 程度以上、 距離でも $x^*>1/3$  ( $x> L_x/3=U_0T_d/3$ )程度が必要であること がわかる. 図-9は濃度の破過曲線であるが、 $x^*=0.1$ は2 つのピークを持ってゆがんだ濃度時間波形が、 $x^*=0.4$ で は理論式(5)とほぼ一致するのと対応する.

上述の時間特性の逆向きの応用を考えてみる。例えば、 Devkotaら<sup>6</sup>のデータに見られる一様粒径での分散長 $\alpha_{D}$ が 粒径の2倍程度である事実と、式(14b)とを比較する。

$$D_{\infty} = \alpha_{U}^{2} U_{0}^{2} t_{0} = \alpha_{U}^{2} L_{0} U_{0}$$
  
$$\equiv \alpha_{D} U_{0} = 2 d_{s} U_{0}$$
(25)  
$$\alpha_{D} = 2 d_{s} \equiv \alpha_{U}^{2} L_{0}, \quad L_{0} = U_{0} t_{0}$$

ここに、 $\alpha_U = \sigma_U / U_0$ は実流速の変動係数、 $d_s$ は粒径、 $L_0$ は 粒子が流速の相関を失う相関距離(流下距離)である. いま、変動係数の自乗を $\alpha_U^2 = 1/3$ と仮定すると、  $L_0 = 3\alpha_D = 6d_s$ 程度となる.上述の様に、ほぼ完全に相関を 失うにはその5倍程度を要する.現象として分散係数が 安定するには、30d。(相関距離の1.7倍程度)の流下距離 が必要であり、さらに、後述の様に理論解からフィッ ティングによりそれを抽出するにはさらに数倍の距離 (90d,程度以上)が必要となることを意味する.流れ場

が団粒的に不均一になる場合にはその距離がさらに大き くなる事から注意が必要である.

中川<sup>7</sup>は不均一媒体中の輸送について局所相関を持つ 透水係数の空間分布における数値計算を行い,横断積分 した濃度分布のx方向分散の時間変化から,式(1)により 分散係数の時間変化を得た結果,分散長は透水係数相関 距離の0.9倍程度であり,分散係数変化の落ち着くまで の距離は3.37倍との計算結果を示している.この評価方 法と上記手法の結果は似たものである.式(23)には流速 の分散(変動係数)と場の相関距離の両方が分散長に含 まれた記述となっていることと,透水性ではなく流速の 空間分布を考慮する点において,合理的に分散係数の挙 動を予測できる.変動係数は通常大きくても数倍程度の 範囲で変化すると考えられるから,本論の手法や粒子ト レーサによる局所シミュレーションを用いて分散係数の 時空間変化を推定できる.

また,カラム実験において,濃度分布の分散の時間変化(または空間分布)を得ることで,流速のばらつき,時間特性の両者を推定することも可能と考える.

### (2) 理論解のパラメータフィッティングにおける問題

本手法の結果によってもう一つ重要な指摘をしたい. それは、初期時刻からみた分散係数についてである. 粒 子流速の相関がある時間帯において、理論解(式(5))を 用いたパラメータフィッティングによる分散係数(図-7 中④)や、空間分散を用いた式(9)( $D=\overline{X^2}/2t$ )によって 評価される分散係数(図-7中⑤)は、その時刻までの分 散係数の平均すら表せない(過小評価する)という事実 である.これは、十分な時間を経ないと、流速の時間相 関がある時間帯での濃度分布の歪みが残る事を意味して いる.このことから、理論解を用いたフィッティング法 は、上記の時間のさらに3倍程度以上( $t_0$ の15倍程度以 上)の時間、あるいはそれに相当する距離だけ離れた場 所でないと、一定した分散係数を推定できない.多孔体 カラムなどにおける推定においては誤差をもたらす.

そこで、フィッティング法によるみかけの分散係数の 変化から、実際の時間変化に戻す方法について考えよう. いま、1次元分散現象が、粒子流速のLagrange相関にお いて、式(13)(14)に従うと仮定する.この場合、フィッ ティング法によるみかけの分散係数DFTFは、原理的には 式(5)に基づいて式(9)から得られる.しかし、実際には、 瞬間分散係数は変化し、それが積分された形で空間分布 の分散は現れているのであるから、式(9)(11d)および(14) から、見かけの分散係数は次式のように表される.

$$D_{FIT} = D_{\infty} \left[ 1 - \frac{t_0}{t} \{ 1 - \exp(t/t_0) \} \right]$$
(26)

図-7中の⑤は、 $t_0=T_d/16.2$ として、上式を描いたものであり、④の1次元理論解フィッティングに相当する式(9)によるプロットをほぼ説明している.

たとえばカラム実験において分散が移流に対して小さければ、投入点からその点までの平均到達時間*t*と*D*<sub>FIT</sub>の組を式(26)において最適化することでtoおよび最終分散係数*D*<sub>∞</sub>を得ることができる.3点以上の計測で、図-7上で上に凸の傾向が見られれば、よい精度での予測が期待できよう.

## 5 おわりに

本論では,以下の点を示した.

- 1)円管層流で既往の定常分散の理論と、一般性を持つ Lagrange相関による非定常の分散挙動の理論とを組み 合わせ、相関の継続時間を代表する「寿命時間」が分 散時間特性と最終分散係数とを直接定める事を改めて 示し、寿命時間を推定する事の有用性を指摘した.
- 2)円管層流を例として、流速の場を分析し確率的表記によって粒子流速の履歴を記述し、粒子のLagrange相関の時間特性を得ることによって、分散特性の時間的特性を得た.これを既往の2つの理論と比較した結果、 3者はほぼ一致することが明らかになった.
- 3) 通常行われる1次元理論解へのフィッティングによる 分散係数の推定法は、寿命時間の15倍程度の時間帯に おいては、最終分散係数、過渡的な分散係数のいずれ をも表し得ないことを示した.

多孔体については、多孔体構造の諸量の分布特性(巨 視的には透水性の空間分布、微視的には間隙径の不均一 分布など)と流速分布との間の相関性を捉え、さらに本 研究の手法を応用して粒子流速のLagrange相関係数を計 算する簡易な方法を考案すれば、分散係数の挙動の合理 的な推定が可能となろう.

## 参考文献

- Bear, J.: Dynamics of Fluid in Porous Media, Dover, pp.606-607, 1972.
- Taylor, G. I.: Diffusion by continuous movements, *Proc. London Math Soc.*, Ser. 2, Vol. 20, 1921.
- Taylor, G. I.: Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A 219, pp.186-203, 1953.
- Taylor, G. I.: Conditions for measuring molecular diffusion by dispersion, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A 225, pp. 473-477, 1954.
- 5) 椿東一郎:水理学II, 森北出版, pp.173-195, 1974.
- 6) Devkota, L. P., Matsubayashi, U. and Takagi, F.: Mixing length approach to dispersion through saturated porous media and its relation to grain sizes, *J. Japan Soc. Hydrol. and Water Res.*, Vol.9, pp.551-558, 1996.
- 7) 中川啓: 不均一場における物質輸送,地下水中の物質輸送数 値解析,九州大学出版会, pp.47-72, 2001.

(2005.9.30受付)