

水路の分岐現象について

ON CHANNEL BIFURCATION

泉 典洋¹
Norihiro IZUMI

¹正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

Channels are commonly observed to develop upstream due to the concentration of flow and the resultant intensification of erosion around their channel heads. In the developing process, a channel head sometimes splits into two or more than two branches. By repeating such bifurcation, simple patterns of channels evolve into complex patterns of channel networks. In this study, a mathematical model of channel bifurcation is presented in terms of the secondary instability of a channel head. Linear stability analysis is performed to study the instability of a hole in a horizontal plane imitating a channel head. It is found that a channel head becomes unstable for perturbation and channel bifurcation is initiated when the critical depth divided by the friction coefficient is reduced compared with the channel radius.

Key Words : *channellization, gully, channel head, channel bifurcation, secondary instability*

1. はじめに

斜面下流端にほぼ等間隔で形成されたガリは、時間の経過とともに斜面上流へと発達して行く。発達の過程で水路は、ときに複数の水路に分岐することがある。このような分岐が繰り返し生じることによって、最初は単純であった水路群は血管網や樹枝に例えられる複雑な幾何形状を持った水路網へと発達していく。

図-1 は、北海道最北端の宗谷岬周辺の丘陵地の空中写真である。ここは明治以降何度も山火事に見舞われ、針葉樹林が姿を消して一面の笹原となったため、眺望が開け詳細な地形がよく観察できる場所である¹⁾。写真でもわかるように丘陵地の表面は無数の水路網に覆われている。水路は上流部に向かうにつれて二つあるいはそれ以上の水路に分岐していることがわかる。

本研究は、このような分岐現象の原因が水路頭部に生じる二次不安定であるとの観点から、水路頭部に対して円周方向に擾乱を与えた線型安定解析を行うことによって、水路分岐が生じる物理機構を理論的に明らかにしたものである。

2. モデル

下流端に段差を有する緩勾配斜面では、流れが下流方向に加速されることによって段差近傍で底面剪断応力が大きくなり活発な侵食が生じる。もし侵食が横断方向に一樣に生じるとすれば、段差は横断方向に一樣な速度で上流側へ後退していく。ところが、このような状況は一般に不安定であり、実現されることはない。一



図-1 発達した水路網。北海道宗谷岬周辺。北海道開発局の厚意による。

旦ある場所が他の場所より大きな侵食を受けると、底面高さの低下によって周辺の流れがさらに集まり、その場所はより大きな侵食を受ける。このような流れと底面形状の相互作用によって斜面上には侵食によって低下した部分、すなわち初期水路（ガリ）が形成される。

Izumi and Parker²⁾は、横断方向に一樣で、表面流侵食によって形状を変化させず一定速度で上流方向に後退する斜面形状を基本状態として、横断方向にサイン型の擾乱を与え、基本状態の安定性を調べている。解析の結果によれば限界水深の数百倍以上の波長を持った擾乱のみが発達でき、約 1000 倍程度の波長を持った擾乱がもっとも早く発達することが明らかとなっている。これは初期水路（ガリ）の形成間隔が限界水深の

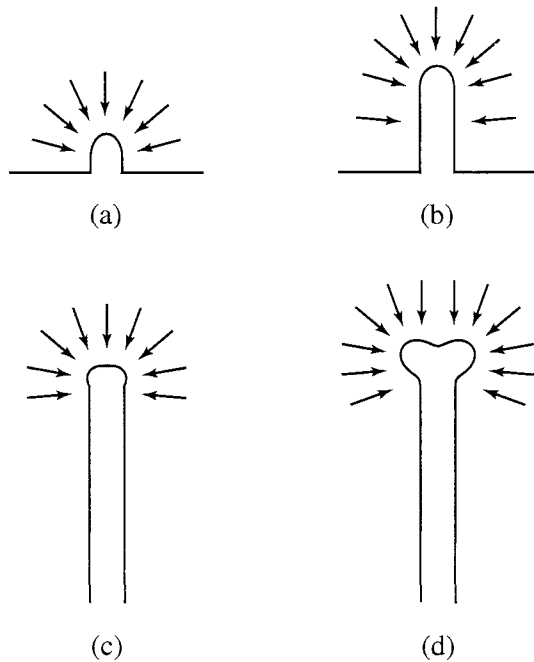


図-2 水路の発達と分岐の過程。(a) 斜面下流端に形成された初期水路(ガリ)。(b) 水路頭部は上流域の水を集め、さらに上流へ発達していく。(c) 水路頭部が二つに分かれ始める。(d) 分岐した二つの水路頭部がさらに発達する。

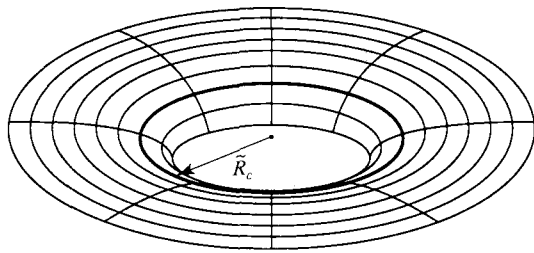


図-3 水平な平坦面に開けられた円形の開口部。

1000 倍程度となることを意味している。この理論を用いれば、斜面下流端において最初に形成されるガリ群の形成間隔を合理的に予測することができる。しかし擾乱の振幅を微小であると仮定する線型安定解析では水路発生のごく初期が再現されるに過ぎない。

図-2 に示したのは水路発生後の発達過程の概念図である。斜面下流端に形成された初期水路は、上流域の流れを集め上流側へと発達して行く(図-2(a), (b))。周辺から水路頭部に集まる流れも、最初はほぼ放射状であり、水路頭部はほぼ形状を保ったまま上流側に発達していく。ところが何かの拍子に水路頭部が擾乱に対して不安定となり、形状の不均一が生じ始める。(図-2(c))。このような不均一が発達して水路頭部は二つに分かれ始める。一旦分かれた頭部は、それぞれが独自に流れを集めるため、分岐はさらに発達して行く(図-2(d))。

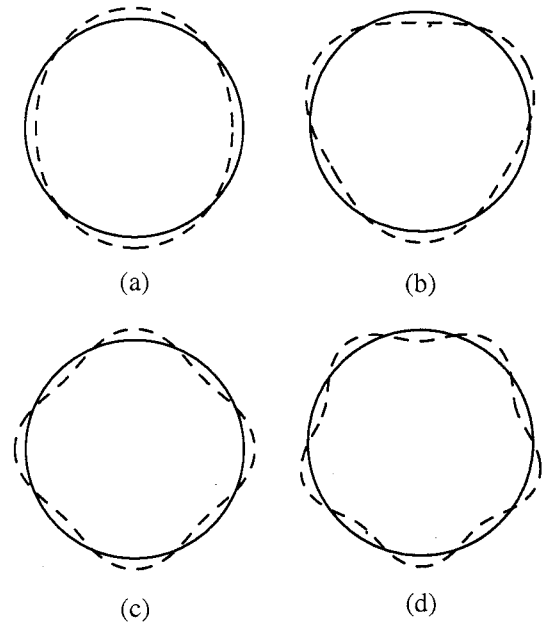


図-4 円形の開口部に与える擾乱の形状。(a) $\kappa = 2$, (b) $\kappa = 3$, (c) $\kappa = 4$, (d) $\kappa = 5$ 。

安定な図-2(b)の水路頭部を図-2(c)および(d)のように突然不安定化させるものは何であろうか。それを調べるためには、(b)を基本状態として水路頭部の周囲に擾乱を与え、頭部形状の安定性を調べればよい。ただし(b)の基本状態を解くのは容易ではない。そこで(b)の流れを図-3に示したような中央に開口部を持つ水平面上における流れで近似的に表す。勾配を持った斜面上の水路頭部周辺の流れを忠実にモデル化したものとは言い難いが、斜面勾配がほぼゼロであるような場合の水路頭部上流域の流れの特徴は十分近似できると考えられる。開口部周辺では流れが加速され底面剪断応力が大きくなるため、侵食が活発となる。もし開口部が完全な円であれば侵食は円周に沿って一様に発生することになる。

完全な円形を持つ開口部を基本状態として、円周方向にサイン型の微小擾乱を与えることを考える。このとき円周方向に含まれる波数 κ によって様々な擾乱が考えられる。図-4(a)に $\kappa = 2$ の場合を示した。この場合、円は縦方向に歪むだけであって分岐は発生しない。ところが図-4(b)や(c), (d)に示すように $\kappa = 3$ 以上となると、一つだった水路頭部は二つ以上に分岐することになる。このように卓越波数が $\kappa = 3$ 以上が増加するとき水路頭部は分岐することが予想される。

従来の水路群発生理論では卓越波長は水深のほぼ1000倍であった。円周上に与えられた擾乱の卓越波長も同様に水深によって決定されたとすると、今考えているような円周上の卓越波数は、円周の長さや水深の関係によって決まることが予想される。すなわち水深

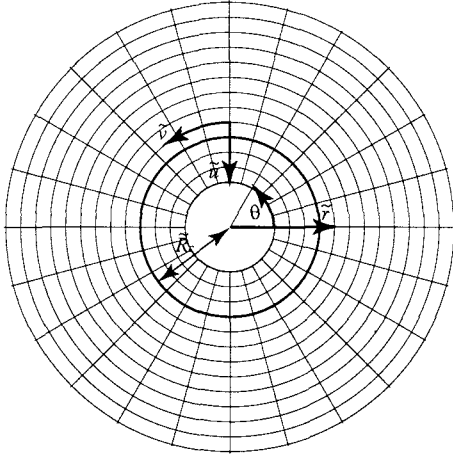


図-5 曲座標系。

が小さくなると卓越波長が小さくなり、円周上に含まれる波数 κ が大きくなる。そして波数 κ が 3 を越えると水路頭部は分岐することになる。

本研究では、上述のような完全な円形の開口部に対して、円周方向に微小な擾乱を与え、線型安定解析の手法を用いることによって開口部周辺の安定性を調べる。

3. 定式化

(1) 支配方程式

図-3のように、水平な平面上に開けられた開口部周辺の流れを考える。開口部から無限に離れたところでは水は静止しており、ある一定の水深 $\tilde{H}_\infty$ を有しているとする。開口部に近づくにしたがって流れは加速され、開口部の縁でフルード数が 1 となるフルード限界状態が実現する。このとき開口部周辺の流れは、極座標系で表した次の St. Venant 浅水流方程式で表される。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{\tau}_r}{\rho \tilde{h}} \quad (1)$$

$$-\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\tau}_\theta}{\rho \tilde{h}} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \tilde{u}\tilde{h}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}\tilde{h}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}\tilde{h}}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

ここで $\tilde{r}$ および θ はそれぞれ半径方向および円周方向の座標、 $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ はそれぞれ流速の $-\tilde{r}$ および θ 方向成分、 $\tilde{h}$ および $\tilde{\eta}$ はそれぞれ水深および底面高さ、 ρ および g はそれぞれ水の密度 (1000 kg/m^3) および重力加速度 ($= 9.8 \text{ m}^2/\text{s}$) である。また $\tilde{\tau}_r$ および $\tilde{\tau}_\theta$ は底面剪断応力のそれぞれ $-\tilde{r}$ および θ 方向成分であり、次式で表されるものとする。

$$(\tilde{\tau}_r, \tilde{\tau}_\theta) = \tilde{\tau} \frac{(\tilde{u}, \tilde{v})}{(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^{1/2}}, \quad \tilde{\tau} = \rho C_f (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \quad (4)$$

ここで C_f は底面摩擦係数である。底面摩擦係数は相対水深 (水深/粗度高さ) の弱い関数であるが、ここでは問題を簡単にするために定数と仮定する。

底面高さ $\tilde{\eta}$ の時間変化は次式で表される。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{E} = 0 \quad (5)$$

ここで λ_p は空隙率、 $\tilde{t}$ は時間である。また $\tilde{E}$ は侵食速度であり、次式で表されるとする。

$$\tilde{E} = \begin{cases} \alpha \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_{th}} - 1 \right)^\gamma, & \tilde{\tau} \geq \tilde{\tau}_{th} \\ 0, & \tilde{\tau} < \tilde{\tau}_{th} \end{cases} \quad (6)$$

ここで $\tilde{\tau}$ は底面剪断応力、また $\tilde{\tau}_{th}$ は限界剪断応力、 α および γ は経験的に決定される定数である。上式は底面剪断応力 $\tilde{\tau}$ が限界剪断応力以下であると侵食が生じないことを意味している。

(2) 無次元化

次の無次元化を導入する。

$$\tilde{r} = \tilde{R}_c r, \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{U}_c (u, v), \quad (7a, b)$$

$$(\tilde{h}, \tilde{\eta}) = \tilde{H}_c (h, \eta), \quad \tilde{t} = \frac{\tilde{H}_c}{\tilde{E}_c} t \quad (7c, d)$$

ここで $\tilde{R}_c$ はフルード限界点の $\tilde{r}$ 座標、 $\tilde{U}_c$ および $\tilde{H}_c$ はそれぞれフルード限界点での限界流速および限界水深である。また $\tilde{E}_c$ はフルード限界点における侵食速度であり、そこでは底面剪断応力が限界剪断応力を超えているものと仮定して次式で表される。

$$\tilde{E}_c = \alpha \left(\frac{\tilde{\tau}_c}{\tilde{\tau}_{th}} - 1 \right)^\gamma \quad (8)$$

上述の無次元化を用いると支配方程式は次のように書き直される。

$$\epsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} = 0 \quad (9)$$

$$\epsilon \left(-u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) + \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} = 0 \quad (10)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial r u h}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v h}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + E = 0 \quad (12)$$

$$E = \begin{cases} (u^2 + v^2 - \psi)^\gamma, & u^2 + v^2 \geq \psi \\ 0, & u^2 + v^2 < \psi \end{cases} \quad (13)$$

ここで ϵ は次式で表される。

$$\epsilon = \frac{\tilde{H}_c / C_f}{\tilde{R}_c} \quad (14)$$

上式中の C_f は前述したように抵抗係数であり、0.01 のオーダーを持っている。したがってフルード限界点の $\tilde{r}$ 座標 $\tilde{R}_c$ が、水深の 1000 倍以上のオーダーであれば、 ϵ は 0.1 以下のオーダーとなる。ここでもそのような状況を仮定し、 ϵ を含む項を微小として無視する。そのとき式 (9)–(12) は次のように書き換えられる。

$$\frac{(u^2 + v^2)^{1/2}u}{h} = 0, \quad \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}v}{h} = 0 \quad (15, 16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ruh}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial rvh}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + E = 0 \quad (17, 18)$$

上式を解くと $u = v = 0$ となることが容易にわかる。これは、フルード限界点から半径 $\tilde{R}_c$ のスケールだけ離れたところ（外部領域）では流速はほぼゼロとなることを意味している。そこで、フルード限界点近傍（内部領域）での流れを記述できるように、次のような内部変数を導入する。

$$r = 1 - \epsilon s, \quad \theta = \epsilon n \quad (19a, b)$$

するとフルード限界点近傍における流れは次の方程式によって記述される。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}u}{h} = O(\epsilon) \quad (20)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}v}{h} = O(\epsilon) \quad (21)$$

$$\frac{\partial uh}{\partial s} + \frac{\partial vh}{\partial n} = O(\epsilon) \quad (22)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + E = 0 \quad (23)$$

上式はデカルト座標系で記述した一様平面上の方程式と同じ形をしていることがわかる。これは、流れを特徴付ける長さスケール $\tilde{H}_c/C_f$ に比べて、開口部の大きさ $\tilde{R}_c$ が十分に大きいような場合には、開口部に流入する流れにおける曲率の影響を無視して差し支えないことを意味している。ここでは開口部に集まる流れを式 (20)–(23) で近似的に表すことにする。

(3) 座標変換

フルード限界点では侵食によって単位時間当たり $\tilde{E}_c$ だけ底面高さが低下する。そこでの底面勾配は限界勾配である C_f となるから、底面高さが $\tilde{E}_c$ だけ低下したとき、水平方向には $\tilde{E}_c/C_f$ のスケールだけ移動する。これがフルード限界点が移動する速度 $\tilde{c}$ に相当する。いま考えている代表時間は、式 (7d) に示すように、侵食によって底面が限界水深だけ低下するのに要する時間 $\tilde{H}_c/\tilde{E}_c$ である。したがって代表時間の間に移動する水平方向スケールは $\tilde{H}_c/C_f$ となる。式 (19a) の再無次元化によれば、これは 1 のオーダーを有する。このとき

開口部の大きさ $\tilde{R}_c$ が、 $\tilde{H}_c/C_f$ だけ大きくなるのであるから、開口部の大きさの変化率は $\epsilon = \tilde{H}_c/(\tilde{C}_f \tilde{R}_c)$ となる。すなわち $O(1)$ では開口部の大きさの変化は無視できて、そのとき移動速度は一定値とみなすことができる。そこでフルード限界点とともに一定速度で移動する次のような座標系を導入する。

$$t^* = t, \quad s^* = s + ct \quad (24)$$

ここで c は $\tilde{H}_c/C_f$ で無次元化した移動速度 $\tilde{c}$ である。式 (24) の座標変換を用いると、フルード限界点近傍の内部領域において成立する支配方程式 (20)–(23) は次のように書き直される。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}u}{h} = 0 \quad (25)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}v}{h} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial uh}{\partial s} + \frac{\partial vh}{\partial n} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial s} + E = 0 \quad (28)$$

ここで * は表記を簡単にするために落としてある。今後省略して表記することにする。

4. 一次元基本状態

一次元基本状態では、 n 微分項および v を含む項はすべてゼロとなる。したがって内部領域における支配方程式 (25)–(28) は次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{u^2}{h} = 0 \quad (29)$$

$$uh = 1 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial s} + E(u^2) = 0 \quad (31)$$

$$E(u^2) = \begin{cases} (u^2 - \psi)^\gamma, & u^2 \geq \psi \\ 0, & u^2 < \psi \end{cases} \quad (32)$$

上式は従来の水路群形成の線型安定解析の際に出てくる方程式と同じ形をしており、準定常な斜面形状を解に持つ。ここではこの準定常解を安定解析の基本状態とする。斜面形状が定常であるとき、式 (29) および (31) の偏微分は常微分となり、式 (31) は次のようになる。

$$c \frac{d\eta}{ds} + E(u^2) = 0 \quad (33)$$

上式および式 (30) を式 (29) に代入して次式が得られる。

$$\frac{du}{ds} = \frac{u^5 - c^{-1}E(u^2)u^2}{1 - u^3} \quad (34)$$

フルード限界点では $u = 1$ となり、上式の右辺分母はゼロとなる。このとき du/ds が有限となるためにはフ

ルード限界点で分母と同時に分子もゼロとならなければならない。したがって次式が要請される。

$$c = E(1) \quad (35)$$

上式を式 (34) に代入して積分すると、 u の分布形は次のように得られる。

$$\int_1^u \frac{1-u^3}{u^5 - E(u^2)u^2/E(1)} du = s \quad (36)$$

5. 二次元摂動問題

(1) 摂動展開

基本状態に対し次のような摂動展開を導入する。

$$u = u_0 + au_1 e^{\Omega t} \cos \kappa \theta = u_0 + au_1 e^{\Omega t} \cos kn \quad (37)$$

$$v = av_1 e^{\Omega t} \sin \kappa \theta = av_1 e^{\Omega t} \sin kn \quad (38)$$

$$h = h_0 + ah_1 e^{\Omega t} \cos \kappa \theta = h_0 + ah_1 e^{\Omega t} \cos kn \quad (39)$$

$$\eta = \eta_0 + a\eta_1 e^{\Omega t} \cos \kappa \theta = \eta_0 + a\eta_1 e^{\Omega t} \cos kn \quad (40)$$

ここで Ω は擾乱の成長率であり、この値が正の値をとるとき開口部は擾乱に対して不安定であることを意味する。 κ は外部変数に対応する波数であり、開口部の円周上に何個の擾乱が存在するかを示している。一方 k は座標変換後の波数であり、次の関係が存在する。

$$k = \epsilon \kappa \quad (41)$$

上式を支配方程式 (25)–(28) に代入すると $O(a)$ のオーダーで次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} = & \frac{u_0^6 + u_0^{-1}u_0' + u_0^2u_0' - c^{-1}E_u(u_0^2)u_0^2}{1 - u_0^3} u_1 \\ & - \frac{k}{1 - u_0^3} v_1 - \frac{u_0^6 + u_0 u_0'}{1 - u_0^3} h_1 - \frac{\Omega c^{-1} u_0^2}{1 - u_0^3} \eta_1 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{dv_1}{ds} = -u_0 v_1 + \frac{k}{u_0} h_1 + \frac{k}{u_0} \eta_1 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{ds} = & -\frac{2u_0' + 2u_0 - c^{-1}E_u(u_0^2)}{1 - u_0^3} u_1 + \frac{ku_0}{1 - u_0^3} v_1 \\ & - \frac{u_0^4 + u_0^2 u_0'}{1 - u_0^3} h_1 - \frac{\Omega c^{-1}}{1 - u_0^3} \eta_1 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{d\eta_1}{ds} = -c^{-1}E_u(u_0^2)u_1 - \Omega c^{-1}\eta_1 \quad (45)$$

ここで E_u は E の u に関する偏微分である ($= \partial E / \partial u$)。上式は次の境界条件を用いて解かれる。フルード限界点から無限遠点ではすべての摂動は消滅するはずである。したがって次式が成立する。

$$u_1 = v_1 = h_1 = \eta_1 = 0 \quad \text{as } s \rightarrow -\infty \quad (46)$$

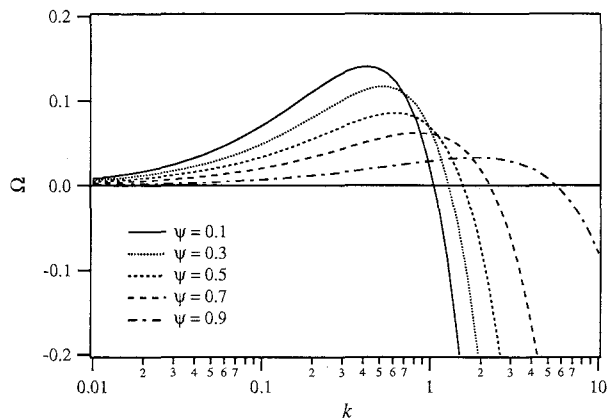


図-6 擾乱の成長率 Ω の波数 k および無次元限界剪断応力 ψ による変化。

フルード限界点は $O(a)$ の方程式においても特異性を有する。したがってフルード限界点で流速勾配が無限大とならないために、次の正則条件が要求される。

$$\begin{aligned} [2u_0'(0) + 2 - c^{-1}E_u(1)] u_1 - kv_1 - [u_0'(0) + 1] h_1 \\ - \Omega c^{-1} \eta_1 = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

(2) 解法

常微分方程式系 (42)–(45) は境界条件 (46) および (47) とともに、Strum-Liouville 型の固有値問題を構成している。ただしここでは緩和法を使って解き易くするため、次のような正規化条件を使って、非線形微分方程式の二点境界値問題に帰着させることにする。

$$\eta_1 = 1 \quad \text{at } s = 0 \quad (48)$$

上式を 5 番目の条件として、五つの未知数 $u_1, v_1, h_1, \eta_1, \Omega$ について式 (42)–(45) を緩和法を用いて解く³⁾。

6. 結果と考察

(1) 卓越波数、臨界波数と分岐の発生

本解析によって得られた擾乱の発達速度と波数 k および正規化された限界剪断応力 ψ の関係を図-6 に示す。図中実線で示した $\psi = 0.1$ の場合を例にとると Ω の k による変化は次のようになる。 Ω は $k \rightarrow 0$ でゼロに漸近し、 k が増加するにつれて徐々に大きくなる。 k がさらに増加すると $k = 0.4$ で最大値を取り（卓越波数）、ほぼ $k = 1$ で負の値を取るようになる（臨界波数）。このような k の変化に伴う Ω の変化の特徴はいずれの ψ の場合も定性的には共通であるが、 ψ が大きくなると卓越波数、臨界波数ともに高波数側へずれるようになり、 Ω の最大値も小さくなる傾向にある。

前述したように分岐が発生するのは擾乱の成長率 Ω が $\kappa \geq 3$ あるいは $k \geq 3\epsilon$ の領域において最大となる

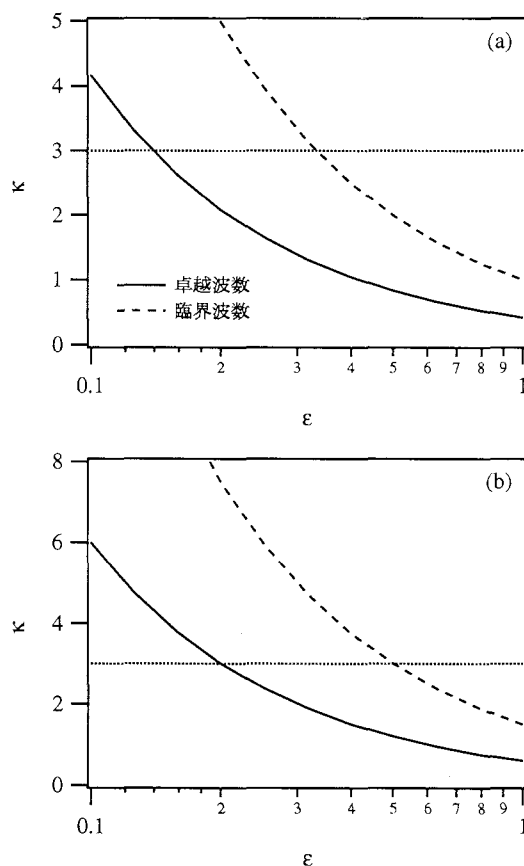


図-7 卓越波数および臨界波数の ϵ による変化. (a) $\psi = 0.1$, (b) $\psi = 0.5$.

(卓越波数が現れる)ときである。図-6 中に実線で示した $\psi = 0.1$ の場合について、 κ で表した卓越波数と臨界波数の ϵ による変化を示したのが図-7(a) である。 ϵ が大きく、0.4 を越えるようなとき、臨界波数、卓越波数ともに 3 以下となり、分岐は生じ得ない。 ϵ が 0.3 より小さくなると臨界波数が 3 を超え、 ϵ が 0.14 を下回ると卓越波数も 3 を超える。図-7(b) は同様の図を $\psi = 0.5$ の場合について示したものである。傾向は同じであるが、卓越波数および臨界波数が 3 を越えるのは、それぞれ $\epsilon = 0.2$ および 0.5 と、 $\psi = 0.1$ の場合に比べて大きくなることがわかる。

(2) 理論の適用限界

前述したように、本解析では ϵ は微小であると仮定した。したがって ϵ は 1 より十分小さくなくてはならない。図-7(b) に示したように、 ψ が 0.5 より小さいときはこの条件を満たしている。ところが、 $\psi = 0.9$ の場合、臨界波数および卓越波数が 3 を超えるのはそれぞれ $\epsilon = 1.7$ および 0.8 のときとなる。このように ϵ が 1 より十分小さくない場合の結果の精度については保障されていないことに注意する必要がある。

(3) 分岐発生のメカニズム

ϵ は次のように表すことができる。

$$\epsilon = \tilde{H}_c / \tilde{R}_c C_f \quad (49)$$

上式より明らかなように、開口部（あるいは水路頭部）の半径 $\tilde{R}_c$ に比較して限界水深 $\tilde{H}_c$ が小さくなると ϵ も小さくなる。また図-7(a) および (b) によれば ϵ が減少すると卓越波数は大きくなる。すなわち、流量の減少によって水路頭部周辺の水深および ϵ が減少すると、水路頭部は波数 κ が 3 以上の擾乱に対して不安定となって水路は分岐をはじめると考えられる。

水深減少の原因としては次のようなことが考えられる。斜面が非常に長く、一様な降雨が生じているとする。そのような状況下では上流に行くにしたがって流量は徐々に減少し、水路頭部周辺の水深も減少する。また水路群が発達すると、他の水路に流域の一部を奪われる流域争奪が起こることがある。流域の一部を奪われた水路ではその頭部における流量が減少し、水深が小さくなる。これらの原因によって水深が減少すると、卓越波長は小さく、卓越波数 κ は大きくなり、水路頭部は分岐するものと考えられる。

分岐の原因となるのは水深の減少ばかりではない。式 (49) によれば、抵抗係数 C_f が増加すると ϵ は減少する。斜面上流域で粗度が増加し抵抗係数が大きくなると ϵ はやはり減少し、水路頭部は不安定となる。

7. 結論

本研究では、水路頭部を平面上に存在する円形の開口部でモデル化し、開口部の円周方向擾乱に対する安定性を調べることによって水路頭部に生じる分岐現象の物理機構を理論的に説明した。それによって限界水深/抵抗係数 ($\tilde{H}_c / C_f$) と水路頭部半径 ($\tilde{R}_c$) の比 (ϵ) が 0.1–0.2 より小さくなると、水路頭部は擾乱に対して不安定となり、分岐が生じ始めることが明らかとなった。

謝辞: 本研究の基本的アイディアは、著者の米国留学中 Prof. Parker との議論を通して得られたものである。また本研究は北海道河川防災研究センターの研究助成を受けて行われた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 貝塚爽平他: 写真と図でみる地形学, 東京大学出版会, p. 241, 1985.
- 2) Izumi, N. and G. Parker: Linear stability analysis of channel inception: downstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 419, pp. 239–262, 2000.
- 3) Press, H. P. et al.: *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd ed, Cambridge, 1992.

(2004. 9. 30 受付)