

# 砂礫の運動解析を基礎とした 河床波形成過程シミュレーション

NUMERICAL SIMULATION OF GRAVEL BED DEFORMATION  
ON THE BASIS OF PARTICLE MOTION ANALYSIS

関根正人<sup>1</sup>

Masato SEKINE

1 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部社会環境工学科 (〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1)

Numerical simulation of sediment wave formation was conducted in the present study. Saltation model has been extended in order to analyze the entire motion of particle which starts by being picked-up from a bed and ceases its motion by depositing on it. The procedure in which a mutual collision between moving particles can be explained physically was newly invented here to consider the effect of interaction between them. Based on such models, the multi-particle motion can be analyzed simultaneously. In this paper, the gravel bed deformation which is caused by each particle motions was predicted under the same condition of flume experiment.

*Key Words:* bed deformation, bedforms, sediment transport, gravel bed river, saltation model.

## 1. 序論

河床変動に関するこれまでの解析を見ると、そのほとんどが根底にいわゆる平衡流砂量関数があり、これを援用しつつ土砂の体積保存の関係から河床の変動量を知ろうとするものであるように見受けられる。そして、これまでの数多くの研究を通じて、この予測手法に磨きがかかる、今では工学的に見てある程度十分な精度をもってこれを予測することができるようになった。このことを見方を変えて言うならば、少々短絡的ではあるものの、これ以上の改善を図ることはあまり容易ではないと見ることもできる。著者は、この三年間ほど河川懇談会の共同研究の一環として鬼怒川の石下大橋の橋脚周りの局所洗掘について調べる機会を得たが、このような河川構造物周りの局所洗掘は、流砂の非平衡性の影響が強く現れると言われており、こうした現象を従来の予測手法の枠組みの中で精度よく予測するには限界があるように思われる。こうした観点から、長田・細田・中藤・村本<sup>1)</sup>は、橋脚周りの局所洗掘の予測に、運動方程式に基づく土砂移動に関する計算結果を

加味するといった先駆的な研究を行い、興味深い成果を上げている。著者は、今後ますますこのような試みがなされる必要があると考えており、自らも従来とは異なるアプローチで河床の変動を捉えようとしている<sup>2)</sup>。著者は、これまで掃流砂の運動機構の解明を目的として Saltation Model と呼ばれる解析手法の確立に努めてきており、その成果は Sekine and Kikkawa による論文<sup>3)</sup>に詳しく述べられている。本研究は、河床を構成する個々の土砂粒子の運動の解析と、河床変動計算とをリンクさせながら行おうとするものであり、このような発想に基づく最初の試みについては別論文<sup>2), 4)</sup>にまとめられている。しかし、本研究の雛形でもある当時の解析は、単一の土砂粒子の追跡が終わってから、別の移動可能な粒子の運動を解析するといふいわば直列的な解析であったため、解析に莫大な時間を要するほか、「ある数の土砂粒子が移動完了した時点での河床形状がどのようになるか」は説明できても、それと河床変動の経過時間とを関連づけることができないといった問題を抱えるものであった。なお、参考までに、長田らの解析では、滑動形式の運動のみを想定した

ものであった。こうした試みとは別の流れとして、個別要素法 (Discrete Element Method, 略称 DEM) と呼ばれる粒状体モデルを用いた変動解析が行われている。とりわけ後藤ら<sup>5)</sup>は、このモデルによる数値解析手法の確立に努め、実現象に酷似した土砂運動現象ならびに地形変動を再現し、これをビジュアルに示すなどして興味深い成果を挙げてきている。ここで、個別要素法は、バネやダッシュポット、スライダックなどを模した制御システムによって接触状態にある粒子群を相互に結びつけ、これにより粒子相互間干渉を考慮しようとするものである。しかし、著者は、このモデルを用いることで確かに現実に近い現象が再現されるとはいえ、果たしてこれに依拠した解析で現象の本質であるメカニズムにどこまで迫れるのか、という疑問を持ち続けている。

そこで、本研究では、敢えて DEM のようなモデルを導入することなく、基本的な力学法則に則った解析手法をとる。具体的には、これまでの著者による移動粒子と河床粒子との衝突事象の取り扱い方を一般化し、移動粒子間の相互衝突を合理的に取り扱えるように拡張することを試みた。これは、複数粒子の運動を同時に追跡しつつ河床の変動を行うには、発生頻度は低いものの粒子間の相互衝突の影響が無視し得なくなるとの判断による。ただし、現状のモデル構成では、河床を構成する粒子群の相互干渉を考慮に入れることができないため、ここでの解析対象を、河床表面下第一層分の粒子が移動する程度の掃流力範囲に限った移動床問題とした。なお、粒状体モデルを用いて移動粒子群相互の衝突を取り扱おうとしたモデル<sup>6)</sup>も見られるが、個々の粒子間衝突を取り扱おうとしたものではない。

本論文で説明する具体的な解析は、礫床上の河床波の形成過程に関するものとし、後述する水路実験と同様の条件下でその再現計算を試みた。なお、河床波の形成過程に関する数値解析は、著者の知る限り檜谷・道上らのもの<sup>7)</sup>が最初であり、その後、音田・細田<sup>8)</sup>によるものなどがある。特に後者は流れ場の取り扱いにおいて本解析より進んだ研究と捉えている。

## 2. 数値解析の概要

### (1) 数値解析モデルの骨子と基本的な考え方

ここでは、数値解析手法の概要について説明しておく。本解析が従来の河床変動解析と根本的に異なる点は、流砂量関数を適用する代わりに、河床を構成する土砂粒子が河床を離脱してから再び河床に停止するまでの過程を、質点系の運動方程式に基づいて解析し、その結果に基づき河床の変動を評価している点にある。この際、河床形状の変動は、表層粒

子群の河床からの離脱と河床への堆積の結果として予測される。本計算の流れをまとめると次のようになる。

(a) 初期河床として最大粒径程度の凹凸を正規乱数を用いて生成する。(b) 河床上の x-z 平面内の流れ場を等間隔の計算格子網で覆い、流速の二次元計算を行う。(c) 河床粒子の離脱から停止までの運動を、質点系の運動方程式を基に解析する。ここでは、移動可能な粒子の運動をすべて同時に追跡する点でこれまでの解析と大きく異なる。(d) 土砂の移動過程においては、河床粒子との衝突あるいは移動粒子相互の衝突が生じるが、これについては後述する方法によって合理的に取り扱う。(e) 土砂の河床への停止すなわち堆積は、移動粒子が河床上の凹凸に入り込み、河床粒子と衝突を繰り返すことでエネルギーを失うことで生じる。凹部に入り込んだ粒子が再離脱を起こすことのない粒子エネルギーの限界値については、これを力学的に定めることができる。そこで、これとの関係から移動粒子の停止判定を行っている<sup>3)</sup>。(f) 土砂の河床からの離脱や河床上への堆積が生じたとき、その位置の河床高を一粒径分だけ変化させる。そこで、土砂移動の解析を行う時間毎に計算格子を再構築し、上記のステップ (b) に戻って流れ場の更新を行う。以上は主な計算の流れである。

流れ場の解析に関して簡単に説明を加える。この解析に当たっては、圧力の静水圧分布近似を用いることにし、連続式ならびに運動方程式を一般座標系表示に書き換えた次式を解くことにした。

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial \xi} + W \frac{\partial u}{\partial \eta} = -g \xi_x \frac{\partial H}{\partial \xi} + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\nu_t}{J} \left( q_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + q_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \quad (2)$$

$$+ J \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\nu_t}{J} \left( q_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + q_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right]$$

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_z w; \quad W = \eta_t + \eta_x u + \eta_z w \quad (3)$$

式中の Jacobian ならびに metrics に関して紙面の関係で記述を省略する。詳細は別論文<sup>2)</sup>を参照されたい。支配方程式の解法には、計算格子として Staggered 格子を採用し、移流項の解法には CIP 法を、非移流項の解法には Adams-Bashforth Scheme を適用した。また、流速原点に関しては、河床表面の粒子の底部の高さにとっている。

また、個々の粒子の運動の追跡には、以下に示す質点系の運動方程式を適用し、この解法には四次の Runge-Kutta 法を用いている。

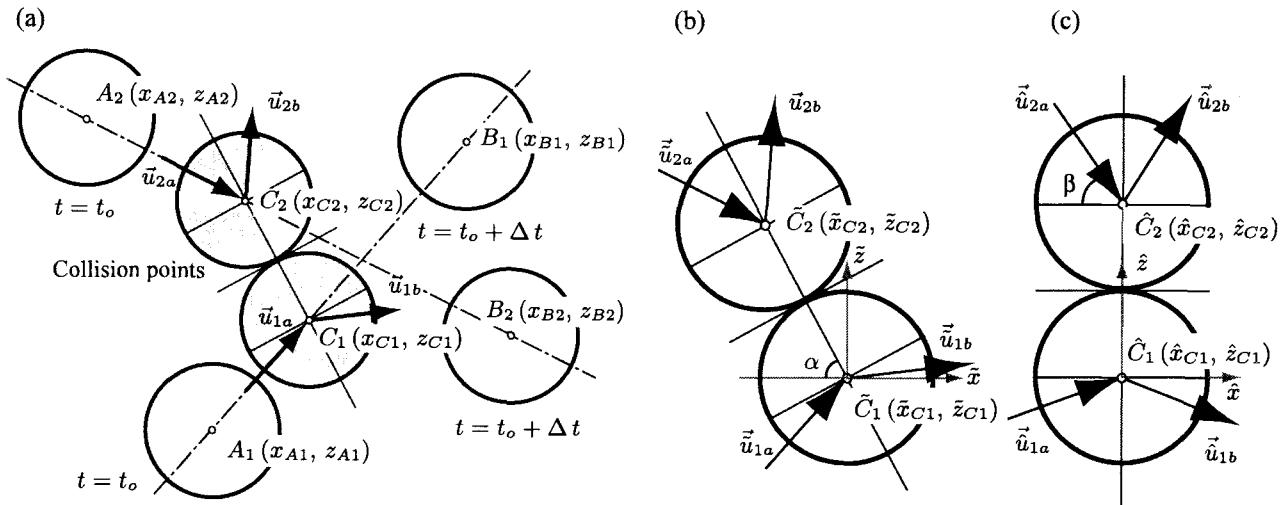


図-1 粒子間衝突の概念図：(a)  $x - z$  座標系における衝突直前・直後の粒子の位置と衝突位置, (b)  $\tilde{x} - \tilde{z}$  座標系における衝突位置, (c)  $\hat{x} - \hat{z}$  座標系における衝突位置

$$\begin{aligned} \rho \sigma_s V \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial t} &= \rho (\sigma_s - 1) V \vec{g} + \rho V \frac{\partial \vec{u}_f}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2} \rho C_D A |\vec{u}_r| \vec{u}_r + \rho V C_M \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2} \rho C_L A ((u_{rx}^2)_T - (u_{rx}^2)_B) \vec{e} \end{aligned} \quad (4)$$

ここに,  $V$  は粒子体積,  $A$  は粒子投影面積,  $\sigma_s$  は土砂の比重 ( $= 2.65$ ),  $C_M$  は付加質量係数 ( $= 0.5$ ) である。添字  $p$  をつけたベクトルは粒子の移動速度ベクトル, 添字  $f$  をつけたベクトルは流体の流速ベクトルであり, 添字  $r$  をつけたベクトルは粒子の流体に対する相対速度ベクトルを表す。また,  $\vec{e}$  は成分 (0, 1) の単位ベクトル,  $\vec{g}$  は重力ベクトルである。

本研究では, 著者らが現時点で使用可能なコンピュータの演算速度ならびに記憶容量の大きさを考えて, 鉛直二次元の場における河床変動解析に留めたが, この解析手法を三次元の解析に拡張することは容易である。

## (2) 移動粒子間の相互衝突の取り扱い

著者のこれまでの解析では, 移動粒子と河床粒子との衝突については取り扱ってきたものの, 移動粒子相互の衝突に関してはこれまで考慮してこなかった。本研究では, 力学法則に則り, できるだけシンプルにこの移動粒子間の衝突事象を評価することを目指した。ここでは, (a) 移動粒子が頻繁に相互衝突を引き起こすことがないこと, (b) 河床として流動化するのは表面の一層に限定できること, (c) 移動土砂濃度が高くなく, 土砂移動に伴う流れ場へのフィードバックが無視できること,などを前提条件とし, あくまでも限界掃流力を越えた程度の掃流力範囲の流れを対象とする。

さて, 前提条件 (a) に従い, 粒子間の衝突事象を二体問題として取り扱うことにし, 任意の二つの粒

子間の衝突を処理した後に, 必要に応じて第三の粒子との衝突を処理する。二粒子間の衝突の概念図を図-1に示す。ここでは粒子 No. 1 (添字に 1 が付いたもの) と粒子 No. 2 (同じく 2 が付いたもの) とが, 時刻  $t = t_o$  から  $t_o + \Delta t$  の間にグレーに着色した粒子位置で衝突を引き起こすものとする。さて, 図-1(a) のように衝突前の時刻  $t_o$  における座標を点  $A_1$  および  $A_2$ , それより  $\Delta t$  だけ後の時刻の座標を  $B_1$  および  $B_2$  とし, 両者の衝突点での座標を  $C_1$  および  $C_2$  とする。このとき, No.  $i$  の粒子の座標値は媒介変数を  $\chi$  ( $0 \leq \chi \leq 1$ ) とすると

$$(x_{Ci}, z_{Ci}) = (x_{Ai}, z_{Ai}) + \chi (x_{Bi} - x_{Ai}, z_{Bi} - z_{Ai}) \quad (5)$$

と書き表される。そして, 図中の二粒子がすでに接触していることを表す条件 (点接触の状態では等号が成り立つ) は次のように書き表される。

$$(x_{C1} - x_{C2})^2 + (z_{C1} - z_{C2})^2 \leq D^2 \quad (6)$$

いま, 式 (6) の等号が成り立つとして, この式に式 (5) の座標値を代入し, これを  $\chi$  について解くと, 図-1(a) の衝突点の座標を求めることができる。なお, 式 (6) の左辺が  $D^2$  より大きい場合には, 注目する二粒子は互いに接触することなく移動を継続することになる。

次に, 図-1(a) の衝突位置が定まったとして, 衝突後の移動速度ベクトルの求め方について考える。いま, 図-1(b) のように二粒子が点接触の位置関係にあるとし, 衝突直前の速度ベクトルと直後のものとを図のように定義する。このとき, 二つの粒子の質量中心を結ぶ線分が  $x$  軸となす角度を図のように  $\alpha$  とする。そして, 一方の粒子の中心  $C_1$  を原点とした  $\tilde{x} - \tilde{z}$  座標系と, この座標を点  $C_1$  を中心として時計回りに  $\alpha$ だけ回転させた図-1(c) の  $\hat{x} - \hat{z}$  座標系とを考え, 一方から他方への座標変換を以下のように定義する。すなわち, 元の  $x - z$  座標系における座標  $(x_i, z_i)$  は,

$$(\tilde{x}_i, \tilde{z}_i) = (x_i - x_{C1}, z_i - z_{C1}) \quad (7)$$

$$(\hat{x}_i, \hat{z}_i) = [M] \cdot (\tilde{x}_i, \tilde{z}_i) \quad (8)$$

によって各々の座標系へと変換される。ここに、 $[M]$ は上記の回転を表す Matrix である。このような変換を用いる理由は、図-1(c)の $\hat{x}-\hat{z}$ 座標系において運動量の関係から粒子間衝突を取り扱うことが、他の座標系においてそれを行うよりも容易であると考えたためである。いま、これまでの取り扱い<sup>3)</sup>に倣って非弾性衝突を想定することとし、二粒子間の運動量保存の関係式を整理すると、各々の粒子の衝突直前の移動速度 $\vec{u}_{1a}$ および $\vec{u}_{2a}$ と衝突直後の移動速度 $\vec{u}_{1b}$ および $\vec{u}_{2b}$ の間には、反発係数を $e$ として次の関係式が成り立つ。

$$\vec{u}_{1a} + \vec{u}_{2a} = \vec{u}_{1b} + \vec{u}_{2b} \quad (9)$$

$$(\Delta \hat{u}_b, \Delta \hat{w}_b) = e \times (\Delta \hat{u}_a, -\Delta \hat{w}_a) \quad (10)$$

ここに、式(10)中の左辺は相対速度ベクトルの成分を表す。相対速度は一般に次のように定義される。

$$(\Delta \hat{u}, \Delta \hat{w}) = (\hat{u}_1 - \hat{u}_2, \hat{w}_1 - \hat{w}_2) \quad (11)$$

以上の準備の下に、衝突直後の移動速度 $\vec{u}_{1b}$ および $\vec{u}_{2b}$ は次のように算定される。すなわち、(a)式(5), (6)を基に二粒子の衝突位置を求める。(b) $x-z$ 座標系における衝突直前の移動速度 $\vec{u}_{1a}$ および $\vec{u}_{2a}$ を、粒子運動の追跡の結果として評価する。(c)式(7), (8)を用いて、 $\hat{x}-\hat{z}$ 座標系における衝突直前の移動速度ベクトル $\vec{u}_{1a}$ および $\vec{u}_{2a}$ を評価する。(d)式(9), (10)を $\vec{u}_{1b}$ および $\vec{u}_{2b}$ について解き、この座標系における衝突直後の移動速度ベクトルを定める。(e)式(7), (8)による逆変換を施すことにより、 $x-z$ 座標系における衝突直後の移動速度ベクトル $\vec{u}_{1b}$ および $\vec{u}_{2b}$ を求める。

以上のようにして、衝突点の座標ならびに衝突直後の移動速度ベクトルを定めることができる。なお、ここでの取り扱いは、移動粒子と河床粒子との間の衝突を三次元的に取り扱った Sekine and Kikkawa<sup>3)</sup> の方法を基礎としており、これを拡張したものと捉えることができる。

### 3. 磯床上に生じる反砂堆の形成過程

#### (1) 解析対象とする現象の概要

本研究では、磯床河川における移動床問題のひとつと位置づけられる河床波の形成について考える。筑波大学の宮本らにより行われた最近の水路実験によれば、後述するような興味深い河床波の形成が確認されている。この実験は、全長 5 m, 水路幅 0.3 m, 路床勾配 1/50 の水路に平均粒径 5 mm の磯を敷き詰め、この上に流量 4.8 l/s の水流を与えることで行われた。水深は概ね 3 cm 程度であり、水深・粒径比は約 6 である。また、この流れのフルード数は 1.1 程度、無次元掃流力は 0.07 程度であった。実験時



写真-1 磯を用いた移動床水路実験により形成された反砂堆（筑波大学宮本邦明教授より提供）

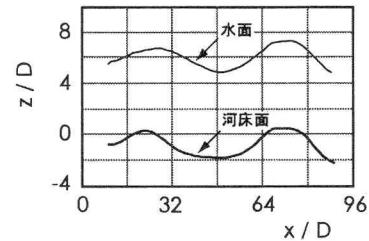


図-2 実測された河床と水面の形状の一例

に撮影された写真を写真-1に、実測された河床と水面の概形（移動平均をとって平滑化したもの）の一例を図-2に示す。実験時の観察ならびに水路床高の計測結果などから、波長が粒径の 20 ~ 40 倍程度、波高が粒径規模の反砂堆が形成されたと報告されている。

本研究では、このような比較的勾配が大きく、水深・粒径比が小さな磯床流れにおいて発生・発達する河床波（反砂堆）を検討の対象として、その再現計算を試みる。

#### (2) 数値解析結果

まず最初に、解析条件について説明する。まず、水理条件に関しては前述の実験条件とほぼ同一とする。解析対象範囲は、形成される河床波の波長を考慮に入れて、粒径の 256 倍（すなわち 126 cm）とし、この上下流端において周期境界条件を適用した。水路床構成材料には、実験と同様に粒径 5 mm を用いた。ただし、解析に簡便性を考えて、ここではこれを球形粒子とする。流れ場の解析を行う上で必要になる計算格子は、流れ方向に粒径の 2 倍、水深方向

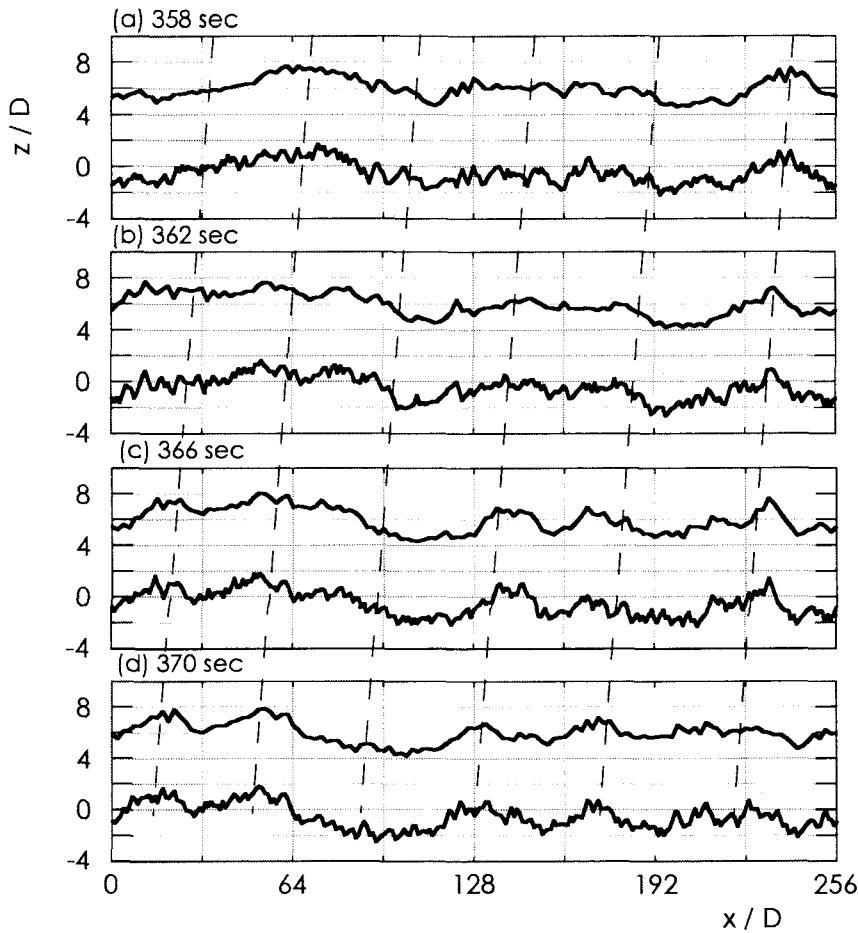


図-3 河床面高と水位の時間変化の一例（通水開始後 358 ~ 370 秒後）：縦軸は初期河床の平均高さを原点とする。図中の点線は主たる波の発達を説明する上でのガイドラインである。

には粒径の半分程度の大きさのものを採用し、河床面が変化するたびに更新するものとした。なお、流れ場の計算を行う上での底面は、格子点上の河床粒子高さとの関係で定まる流速原点位置として、格子点間では線形に変化するものとした。計算時間刻みは粒子運動の追跡に対して 0.01 秒とし、流れ場の更新計算に関しては 0.001 秒間隔で行った。

本数値解析における初期河床は、粒子を平坦に敷き詰めた上に、粒径の 1/6 を標準偏差とする正規乱数を用いて微小擾乱を与えたものとした。通水開始後、河床表層の粒子のうち離脱可能なものが河床から抜け出し移動を開始する。しかし、これらが直ちに運動を停止して河床に堆積するわけではないため、解析区間全体で見たときに離脱と堆積とがほぼ釣り合った状態に到るまでには 1 分程度の時間を要した。そして、その後の移動粒子数は、個々の粒子の運動状態によってばらつくものの時間によらずほぼ一定となり、ここで解析条件の下での平均値は 100 個程度と判断された。このことは、計算区域内の河床の平均高さが初期河床より粒径の半分程度下になることを意味する。言い換えれば、河床の不動層の上方に粒径の半分程度の厚さにわたって土砂が

流動していると言うこともできる。

それでは、解析結果について見ていくことにしよう。まず最初に、計算区域全体にわたって見たときの流砂特性について説明する。ここでの土砂移動は言うまでもなく掃流砂であるため、土砂粒子の河床からの離脱率 pick-up rate と平均移動距離 step length について調べた。まず、離脱率に関しては、ある時間間隔  $\Delta t$  にわたって河床から離脱した粒子個数を  $N$  とすると、無次元 pick-up rate  $P_s^*$  は、

$$P_s^* = \sqrt{\frac{k_D}{R_s g}} \cdot \left( \frac{N}{256} \right) \cdot \left( \frac{1}{t} \right) \quad (12)$$

により評価することができる。一方、step length  $\Lambda$  に関しては、土砂の移動開始から停止までの運動を追跡しているため、この運動の解析の結果としてその値を求めることができる。検討の結果、本解析例の場合には  $P_s^*$  が 0.003 程度、 $\Lambda$  が概ね粒径の 33 倍であることがわかった。また、無次元掃流砂量  $q_B^*$  は次のように定義される。

$$q_B^* = \frac{k_3}{k_2} \times P_s^* \times \lambda \quad (13)$$

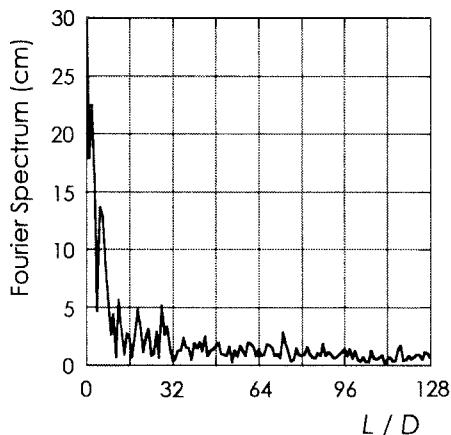


図-4 河床高データのフーリエ・スペクトル：370秒後

ここに、 $k_2 = \pi/4$ 、 $k_3 = \pi/6$ で表される係数である。そこで、上記の値を代入して $q_B^*$ を評価すると0.0645となった。比較のためにMeyer-Peter Muller式からこの値を試算すると0.032となる。ここでは、礫床上の射流の流れを取り扱っており、水深・粒径比が6程度とかなり小さいため、従来の知見をそのまま当てはめることに疑問がないわけではない。しかし、敢えて比較を試みると、pick-up rateに関しては実験データのばらつきの範囲を考えても少し過大評価、step lengthに関しては過小評価の傾向にあること、流砂量に関しても2倍程度であること、などが理解された。しかし、これを基に精度あるいは妥当性の議論を行うことは難しく、今後、上記のような「水深・粒径比が小さい射流の条件下の流砂過程」に関する実験的な検討が不可欠であると考える。ここでは、本論文における目的である現象の再現という観点から本質的な問題はないと判断している。なお、参考までに本解析モデルを用いてこの礫の無次元限界掃流力を求めると0.05程度となることがわかり、この点においても問題はないようである。しかし、今後は、流速原点の位置を少し上方に設定することなどした検討を行う予定である。

次に、解析結果の一例を図-3および図-4に示す。図-3には、河床縦断形状の時間変化を、その上の水面形状とともに示してある。数値解析は通水開始から1時間にわたって行われたが、ここに示したのは通水開始後358～370秒間の結果である。なお、この時間帯には土砂の移動が定常な状態に達している。図の両軸には座標を粒径で除した無次元値をとっており、縦軸の原点については初期河床の平均高さとした。図-3により、次のことが見て取れる。すなわち、(a) 河床面上には実験と同様に粒径規模の波高をもつ河床波が形成される、(b) 河床形状と水面形状の位相差から、この河床波はAntiduneに相当すると考えられる、(c) この河床波は緩やかに上流に遡上していく様子が窺われる。図中の点線

は、河床波の伝播の仕方を判断する上での補助線である。また、河床波の波長を調べるために、河床データのスペクトル解析を行った。図-4は、図-3(d)に示した河床形状データのフーリエ・スペクトルであり、横軸は無次元波長 $L/D$ をとっている。この結果から、粒径規模の凹凸に加えて、粒径の30倍程度の波長をもつ優位な波の存在が窺える。この値は、前述の実験結果ともよく一致するものである。

#### 4. 結論

本研究では、土砂粒子の運動の解析を基礎とした新たな河床変動の予測手法について論じた。また、この手法を用いて礫床上に形成される河床波について検討し、実験とほぼ一致する結果を得ることができた。今後は、流れ場の解析方法を精緻化するなど解析手法の確立に努めていく予定である。

謝辞：筑波大学の宮本邦明教授には、この礫床に形成される反砂堆の形成に関して、このデータの提供のみならず数度にわたり議論の機会を戴きました。ここに記して心より感謝致します。

#### 参考文献

- 1) 長田信寿・細田 尚・中藤達昭・村本嘉雄：円柱周りの流れと局所洗掘現象の3次元数値解析、水工学論文集、第45巻、427-432、2001。
- 2) 関根正人：土砂粒子の運動の解析を基礎とした河床波の形成過程シミュレーションの試み、土木学会論文集、No.692 / II-57, 85-92, 2001。
- 3) M. Sekine and H. Kikkawa : Mechanics of Saltating Grains, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.118, No.4, 536-558, 1992.
- 4) 関根正人・浅田 宗：土砂粒子スケールの運動から見た河床上微地形の形成過程に関する研究、土木学会第51回年次学術講演会概要集、552-553、1996。
- 5) H. Gotoh, E. Harada and T. Sakai : Role of interparticle collision on instability of sand bed, 2nd IAHR Symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics, 111-120, 2001.
- 6) 中川博次・辻本哲郎・後藤仁志、渡邊幹広：粒子間干渉を考慮した掃流層の数値シミュレーション、水工学論文集、第37巻、605-610、1993。
- 7) 榎谷 治・道上正規・島 大尚：砂堆の発生・発達に関する数値解析、第51回年次学術講演会概要集、pp. 630-631, 1996。
- 8) 音田慎一郎・細田 尚：水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析、水工学論文集、第48巻、973-978、2004。

(2004.9.30 受付)