

圧力勾配を考慮した流砂量式による デューンの弱非線型安定解析

NONLINEAR STABILITY ANALYSIS OF DUNES BY THE USE OF A SEDIMENT TRANSPORT FORMULA INCLUDING THE EFFECT OF THE PRESSURE GRADIENT

山口 里実¹・泉 典洋²

Satomi YAMAGUCHI and Norihiro IZUMI

¹正会員 工博 独立行政法人港湾空港技術研究所海洋・水工部 (〒 239-0826 横須賀市長瀬 3 丁目 1 - 1)

²正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

In order to enable accurate predictions of the bedform change in rivers, the accurate estimation of the sediment transport rate is important. In this study, we propose a bedload formula taking into account the effect of the pressure gradient in flow caused by the formation of dunes on the basis of Kovacs & Parker's formula including the effect of the local bed inclination. We performed a nonlinear stability analysis by the use of the sediment transport formula derived in this study. It is found that the transition between dune-covered and flat bed transition is characterized by subcritical bifurcation even if the effect of the local bed inclination is large.

Key Words : dunes, bedload transport, local bed inclination, pressure gradient, weakly nonlinear stability analysis

1. はじめに

河床の形態は河川の流れに大きな影響を与えるため、水理量に対応した河床形態を予測することは重要である。河床の変動過程は砂の輸送過程と相互に影響を及ぼしあっており、河床形態の予測には様々な河床形状に応じた砂の輸送過程を把握する必要がある。特にデューンと呼ばれる小規模河床形態の発生や発達を説明する際には、デューンの発生に伴って局所的に大きな河床勾配が生じるため、流砂量に対する局所勾配の影響が重要になる。局所勾配の影響を考慮した流砂量式としては Fredsøe¹⁾の式と Kovacs & Parker²⁾の式がある。Fredsøeの式は、経験式である Meyer-Peter & Müller 式に対し、重力による局所勾配の影響を考慮した式である。一方、Kovacs & Parker の式は、Bagnold 仮説を基に導かれた 芦田・道上の式に対し、重力による局所勾配の影響を物理的に取り入れた理論式である。

著者ら³⁾はデューンに関する弱非線型安定解析を行い、デューンー平坦床の遷移過程に見られる二価性やヒステリシスが解の亜臨界分岐に起因した現象であることを説明している。このとき流砂量式として経験式である Fredsøe の式を適用している。その結果、局所勾配の影響の小さい範囲で亜臨界分岐が現れ、局所勾配の影響が大きくなるにしたがって亜臨界分岐が現れに

くくなることが明らかとなった。さらに著者らは、理論式として Kovacs & Parker 式の適用も試みている。しかし、その場合には局所勾配の影響が大きく効き過ぎるためにデューンー平坦床の遷移過程に亜臨界分岐が現れず、実現現象を説明することができない。

局所勾配の影響を考慮すると、デューンの背後のように流下方向に対して順勾配となる斜面上では、接線方向に働く重力の影響で流砂量は増加することになる。しかし、実際にはデューンの背後では重力の影響はかなり低減されていることが予想される。その要因として、デューンの発生に伴って生じる圧力勾配の影響が考えられる。図-1 に Raudkivi⁴⁾の実験によって測定された模擬リップル上の圧力分布を示す。ここで Raudkivi はリップルとデューンを明確に区別していない。また、大貫ら⁵⁾は正弦波形の固定床実験によって河床波上の圧力を測定し、概ね図-1 と同様の圧力分布を得ている。図をみると、若干の位相差があるものの流下方向に対して河床が局所的に順勾配となる領域において圧力勾配は逆勾配となり、河床が逆勾配となる領域では圧力勾配は順勾配となっているのがわかる。いずれも発達した剥離現象を伴う実験結果ではあるが、このような圧力分布はデューンの形状によって生じるものであり、デューンの発生と同時に同様な圧力分布が現れるもの

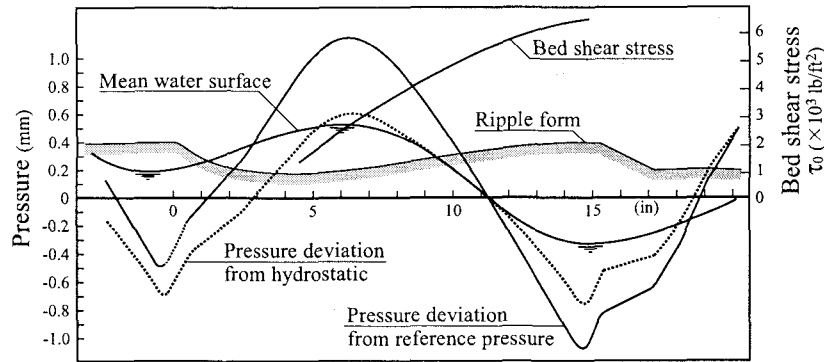


図-1 ripple 上の圧力および底面せん断力の分布⁴⁾

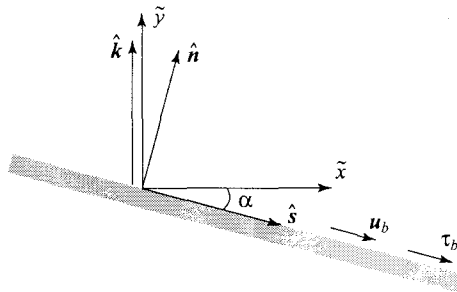


図-2 座標の概念図。

と予想できる。つまり、デューンの発生段階で圧力の逆勾配となる剥離領域が発生すると考えられる。このとき、デューン背後で流速に逆流が生じていないような低波高の段階であっても、掃流砂には圧力による抵抗が生じるため、デューン背後（河床が順勾配の領域）では掃流砂は減少することが予想される。また、河床が逆勾配の領域（デューン前面）では掃流砂が増加することが予想される。これは重力の影響とは逆の傾向を示している。したがって、デューン発生に伴って生じるこのような圧力勾配には、流砂量に対して重力による局所勾配の影響を低減させる効果が期待できる。

Kovacs & Parker 式の導出過程では、圧力は鉛直方向に静水圧分布が仮定されており²⁾、上述のような圧力勾配の影響は取り入れられていない。Kovacs & Parker 式のような理論式をデューンの弱非線型安定解析に適用する場合は特に、圧力勾配の影響を無視すると重力の影響が大きく現れてしまうと考えられる。本研究では、デューンの発生や発達過程において重力による局所勾配の影響を低減させる機構として予想される圧力勾配の影響を Kovacs & Parker 式に加味し、再度デューンの弱非線型安定解析を試みた。

2. 圧力を考慮した掃流砂量式の導出

(1) 座標の定義

Kovacs & Parker は、流下方向および横断方向に河

床勾配が存在する場合の流砂量式を導いている²⁾が、本研究では、流下方向のみに河床勾配を有する場合として、図-2に示すような鉛直および水平方向をそれぞれ $\tilde{y}$ および $\tilde{x}$ とする二次元の流れを考える。河床は $\tilde{x}$ 軸から α だけ傾いており、横断方向の河床勾配および流速は無いものとする。図-2中の $\hat{k}$ は鉛直上向きの単位ベクトルであり、 $\hat{n}$ および $\hat{s}$ はそれぞれ河床底面に対する法線方向および接線方向の単位ベクトルである。底面せん断力 τ_b は河床面に対して接線方向に働いており ($= \tau_b \hat{s}$)、底面での流速ベクトル u_b もこれに平行な方向を向いている ($= u_b \hat{s}$) ものとする。

(2) 土粒子に働く力の釣り合い

底面上の土粒子には図-3に示すような力が働いていると考えられる。ここで F_W は水中における土粒子に働く重力である。

$$F_W = -\frac{4}{3}\rho R g \pi \left(\frac{1}{2}D_s\right)^3 \hat{k} \quad (1)$$

ここで R は砂の水中比重 ($= (\rho_s - \rho)/\rho = 1.65$) である。ここで ρ_s は砂の密度である。また F_D および F_P は土粒子が流体から受ける抗力である。 F_D は形状抵抗による抗力で、次式で表される。

$$F_D = \frac{1}{2}\rho C_D \pi \left(\frac{1}{2}D_s\right)^2 |u_r| u_r \quad (2)$$

ここで C_D および D_s はそれぞれ抵抗係数および土粒子の粒径である。 u_r は土粒子に対する相対的な流速 ($= u_b - v_p$) である。ここで v_p は土粒子の速度ベクトルである。 F_P は圧力抵抗による抗力であり、 $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向成分はそれぞれ底面での圧力勾配によって次のように表される。

$$F_P = -\frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}D_s\right)^3 (\partial \tilde{p}^* / \partial \tilde{x}, \partial \tilde{p}^* / \partial \tilde{y}) \quad (3)$$

ここで $\tilde{p}^*$ はピエゾ圧力 ($= \tilde{p} + \rho g \tilde{y}$)、 $\tilde{p}$ は圧力である。Kovacs & Parker²⁾は鉛直方向に静水圧分布を仮定しているため、圧力抵抗については考慮していない。本研究では、デューンの発生や発達過程で生じる圧力勾配

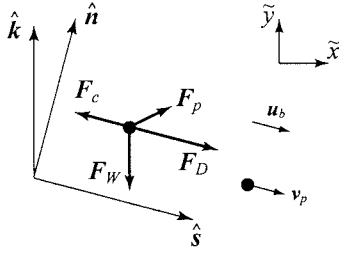


図-3 土粒子に働く力の概念図.

の影響を考慮するために、土粒子に働く抗力に対し上式で表される圧力抵抗を加味する。また、 F_c はクーロン動摩擦力であり、次式で表される。

$$F_c = -(\mathbf{F}_W + \mathbf{F}_P) \cdot (-\hat{n}) \mu_c \hat{t}_{vp} \quad (4)$$

ここで $\hat{t}_{vp}$ は粒子の運動方向を向いた単位ベクトルであり、 μ_c はクーロン動摩擦係数である。Kovacs & Parker は μ_c について、 $\tan^{-1}(\mu_c)$ が砂の安息角に近い値をとるとしており²⁾、砂の安息角は $25^\circ \sim 40^\circ$ 程度⁶⁾ であることから μ_c は $0.47 \sim 0.84$ 程度の値と考えられる。

底面上の土粒子が定常状態で輸送されている場合、底面に対して接線方向に働く力の釣り合いは次式で表される。

$$F_D + W_g + P_t + F_c = 0 \quad (5)$$

ここで W_g および P_t は、それぞれ土粒子の水中重量および底面での圧力勾配によって土粒子に働く力の底面に対する接線方向成分であり、次のように表される。

$$W_g = (\mathbf{F}_W \cdot \hat{s}) \hat{s}, \quad P_t = (\mathbf{F}_P \cdot \hat{s}) \hat{s} \quad (6a, b)$$

式(5)は式(2)、(1)-(4) および (6) を用いて次のように表される。

$$\frac{1}{a} |\mathbf{u}_r^*| \mathbf{u}_r^* = \tau_{co}^* \left\{ \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{n} \right] \hat{t}_{vp} + \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{s} \right] \frac{\hat{s}}{\mu_c} \right\} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{u}_r^*$ および p^* はそれぞれ無次元化された粒子に対する相対的な速度ベクトル ($= \mathbf{u}_r / \sqrt{g D_s R}$) およびピエゾ圧力 ($= \tilde{p}^* / (\rho D_s R g)$) であり、次式で表される。式(7)中の ∇ は $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ で表される。ここで x および y はそれぞれ正規化された $\tilde{x} (= \tilde{x}/D_s)$ および $\tilde{y} (= \tilde{y}/D_s)$ である。また τ_{co}^* は水平床に対応した限界シールズ数であり、次式で表される。

$$\tau_{co}^* = 4\mu_c / (3a C_D) \quad (8)$$

ここで a は底面剪断力と底面付近の流速を関係付ける係数であり、Kovacs & Parker は次式で定義している。

$$\frac{u_b}{u_*} = a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(30 \frac{n}{k_s} \right) \Big|_{n=m_1 D_s} \quad (9)$$

ここで u_* は摩擦速度 ($= \sqrt{\tau_b/\rho}$) であり、 κ はカルマン定数、 k_s は相当粗度である。

(3) 限界掃流力

粒子が動き出そうとしている限界状態では粒子の速度はゼロ ($v_p = 0$) であり、次の関係が成立している。

$$\frac{1}{a} |\mathbf{u}_{bc}^*| \mathbf{u}_{bc}^* = \tau_{co}^* \left\{ \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{n} \right] \hat{t}_{vp}^o + \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{s} \right] \frac{\hat{s}}{\mu_c} \right\} \quad (10)$$

ここで $\hat{t}_{vp}^o$ は粒子の初期運動方向を示す単位ベクトル ($= \hat{t}_{vp}|_{v_p=0}$) である。 $\mathbf{u}_{bc}^*$ は限界状態における底面近傍の無次元流速を示しており、次式で定義される。

$$\mathbf{u}_{bc}^* = \mathbf{u}_b^*|_{v_p=0} = u_{bc}^* \hat{s} \quad (11)$$

ここで $\mathbf{u}_b^* = \mathbf{u}_b / \sqrt{R g D_s}$ である。

この限界状態において限界剪断力 τ_{bc} および限界シールズ数 τ_c^* は、次のように定義することができる。

$$\tau_{bc} \equiv \tau_b|_{v_p=0} \hat{s} \equiv \tau_{bc} \hat{s}, \quad \tau_c^* = \frac{\tau_{bc}}{\rho R g D_s} \quad (12a, b)$$

限界シールズ数は限界状態における力の釣り合い式(13)より求められ、次のように表される。

$$\left| \frac{\tau_c^*}{\tau_{co}^*} \hat{s} - \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{s} \right] \frac{\hat{s}}{\mu_c} \right| = (\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{n} \quad (13)$$

ここで $\hat{s}$ は単位ベクトルであるので、上式より限界シールズ数は次のように求められる。

$$\tau_c^* = \tau_{co}^* (\hat{k} + \nabla p^*) \cdot (\hat{n} + \hat{s}/\mu_c) \quad (14)$$

(4) 粒子速度

粒子速度は式(7)を解くことによって求められる。粒子の相対速度 $\mathbf{u}_r^*$ および運動方向の単位ベクトル $\hat{t}_{vp}$ について次の関係が成立する。

$$\mathbf{u}_r^* = (\mathbf{u}_b^* - \mathbf{v}_p^*), \quad \hat{t}_{vp} = \hat{s} \quad (15a, b)$$

ここで、 $\mathbf{v}_p^*$ は無次元粒子速度 ($= \mathbf{v}_p / \sqrt{R g D_s}$) である。また、定義より $\mathbf{v}_b^* = a^{1/2} \tau_b^{1/2} \hat{s}$ であるので、結局、粒子速度は式(7)より次のように求められる。

$$\mathbf{v}_p^* = a^{\frac{1}{2}} \left[\tau_b^{*\frac{1}{2}} - \tau_{co}^{*\frac{1}{2}} \left\{ (\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \left(\hat{n} + \frac{\hat{s}}{\mu_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \hat{s} \quad (16)$$

(5) 掃流砂量

掃流砂量を求めるためには、単位面積当りの掃流砂体積を求める必要がある。底面上の厚さ ζ の薄い掃流層を考えると、掃流砂体積 ξ は次のように表される。

$$\xi = \zeta \eta_s \quad (17)$$

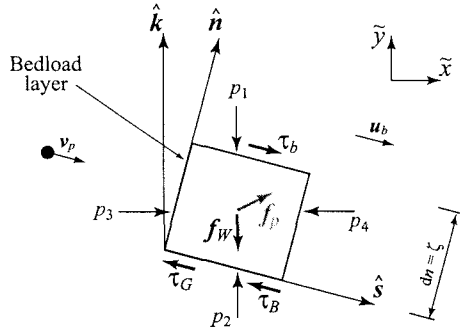


図-4 単位面積当りの掃流層中の砂体積に働く力の概念図。

ここで η_s は掃流層における粒子の体積割合である。単位面積当りの厚さ ζ の掃流層に働く力は図-4 のように表される。ここで τ_b は掃流層の上部に働くせん断力である。 f_W は水中における粒子に働く単位面積当りの重力であり、次式で表される。

$$f_W = -\xi \rho R g \hat{k} \quad (18)$$

底面における圧力によって単位面積当りの掃流層が受ける力は $P_1 \sim P_4$ の総和 f_P として次のように表される。

$$f_P = -\xi (\partial \tilde{p}^* / \partial \tilde{x}, \partial \tilde{p}^* / \partial \tilde{y}) \quad (19)$$

ここで、上式は二次以上の微分項を無視している。また、厚さが薄いため、掃流層内における鉛直方向の圧力勾配はほぼ一定であり、その値は河床面上での圧力勾配にほぼ一致するものと仮定している。 τ_G は粒子の受け持つ摩擦力であり、次式で表される。

$$\tau_G = (f_W + f_P) \cdot (-\hat{n}) \mu_c \hat{t}_{vp} \quad (20)$$

また τ_B は掃流層底部において流体の受け持つ剪断力である。

今、掃流層が定常運動しているものと考え、単位面積当りに働く力の底面に対する接線方向の釣り合い式は次のように表される。

$$\tau_b + (f_W \cdot \hat{s}) \hat{s} + p_t = (f_P \cdot \hat{s}) \hat{s} = \tau_G + \tau_B \quad (21)$$

式 (21) を無次元で表示すると次のように表される。

$$\begin{aligned} \tau_b^* - \xi^* \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{s} \right] \hat{s} \\ = \xi^* \left[(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \hat{n} \right] \mu_c \hat{t}_{vp} + \tau_B^* \end{aligned} \quad (22)$$

ここで τ_b^* および τ_B^* はそれぞれ掃流層上部および底部に働くシールズ剪断力であり、次のように表される。

$$\tau_b^* = \frac{\tau_b}{\rho R g D_s} = \tau_b^* s, \quad \tau_B^* = \frac{\tau_B}{\rho R g D_s} \quad (23a, b)$$

また ξ^* は無次元化された $\xi (= \xi / D_s)$ である。

掃流層底部に働くシールズ剪断力 τ_B は Kovacs & Parker に従い、次式によって表されるものとする。

$$\tau_B^* \cdot \hat{s} = \tau_c^* \quad (24)$$

式 (22) より掃流砂体積 ξ は次式のように得られる。

$$\xi^* = (\tau_b^* - \tau_c^*) / \left[\mu_c (\hat{k} + \nabla p^*) \cdot (\hat{n} + \hat{s} / \mu_c) \right] \quad (25)$$

ここで限界シールズ数 τ_c^* は式 (14) で求められている。流砂量ベクトルは次のように表される。

$$q_b^* = \tilde{q}_b / (R g D_s^3)^{1/2} = \xi^* v_p^* \quad (26)$$

ここで $\tilde{q}_b$ は単位幅当りの流砂量ベクトルであり、 ξ^* および v_p^* はそれぞれ式 (25) および (16) で求められる。鉛直方向および底面に対する法線方向および接線方向の単位ベクトルは次式で表される。

$$\hat{k} = (0, 1), \quad \hat{n} = (\tan \alpha, 1) / (\tan^2 \alpha + 1)^{1/2} \quad (27a, b)$$

$$\hat{s} = (1, -\tan \alpha) / (\tan^2 \alpha + 1)^{1/2} \quad (27c)$$

したがって、流砂量ベクトルの x 方向成分 q_b^* は次のように表される。

$$q_b^* = \xi^* u_p^* \quad (28)$$

ここで、 u_p^* は粒子速度ベクトル v_p^* の x 方向成分であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} u_p^* = a^{\frac{1}{2}} \left[\tau_b^{*\frac{1}{2}} - \tau_{co}^{*\frac{1}{2}} \left\{ (\hat{k} + \nabla p^*) \cdot \left(\hat{n} + \frac{\hat{s}}{\mu_c} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ \times (\tan^2 \alpha + 1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

式 (28) はピエゾ圧力 p^* を無視すると、流下方向のみに河床勾配を有する場合の Kovacs & Parker ²⁾ の式に一致する。ここで注目したいのは、ピエゾ圧力が接線方向に対して逆勾配 ($\nabla p^* \cdot \hat{s} > 0$) の場合、Kovacs & Parker の式に比べて限界シールズ (式 (14)) は大きく、粒子速度 (式 (16)) および掃流砂体積 (式 (29)) は小さくなり、その結果、式 (28) の示す掃流砂量は減少することがわかる。また、ピエゾ圧力が接線方向に順勾配 ($\nabla p^* \cdot \hat{s} < 0$) の場合はその逆となる。同様にピエゾ圧力が法線方向に正の勾配 ($\nabla p^* \cdot \hat{n} > 0$) の場合、Kovacs & Parker の式に比べて式 (28) の示す掃流砂量は減少し、法線方向に負の勾配 ($\nabla p^* \cdot \hat{n} < 0$) の場合は増加することになる。

結局、式中に度々現れる $(\hat{k} + \nabla p^*) \cdot (\hat{n} + \hat{s} / \mu_c)$ は、勾配を有する河床面上での水中における重力の影響とピエゾ圧力勾配の影響のバランスを示しており、そのバランスによって局所的な流砂量が平坦床に対応した流砂量よりも増加または減少することを表している。

3. デューンの弱非線型安定解析への適用

(1) 河床面上に生じる圧力勾配

前節で導出した流砂量式を、著者らが行ったデューン—平坦床の遷移過程に関する弱非線型安定解析³⁾に適用する。局所勾配 α は河床高さ $\tilde{h}$ を用いて $\tan \alpha = -\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x}$ と表されるので、式 (28) は次式で表される。

$$q_b^* = \frac{a^{1/2}}{\mu_c \left[1 + \tilde{h}_x / \mu_c + \nabla p^* \cdot (n + s / \mu_c) \right]} \times \left[\tau_b^* - \tau_{co}^* \left\{ 1 + \frac{\tilde{h}_x}{\mu_c} + \nabla p^* \cdot \left(n + \frac{s}{\mu_c} \right) \right\} \times \left(1 + \tilde{h}_x^2 \right)^{-1/2} \right] \times \left[\tau_b^{*1/2} - \tau_{co}^{*1/2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{h}_x}{\mu_c} + \nabla p^* \cdot \left(n + \frac{s}{\mu_c} \right) \right\}^{1/2} \right] \quad (30)$$

ここで $\tilde{h}_x = \partial \tilde{h} / \partial \tilde{x}$ である。また、 n および s はそれぞれ $\hat{n}$ および $\hat{s}$ と同じ方向を示すベクトルであり、次式で表される。

$$n = (-\tilde{h}_x, 1), \quad s = (1, \tilde{h}_x) \quad (31a, b)$$

河床高さの時間変化は次の流砂の連続式で表される。

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = -(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{q}_b^*}{\partial \tilde{x}} \quad (32)$$

著者らの弱非線型安定解析では、二次元開水路流れの支配方程式として次式で表される二次元レイノルズ方程式が用いられている³⁾。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}} + gS + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (33)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (34)$$

ここで $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ はそれぞれ $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向の流速であり、 $\tilde{\epsilon}$ は渦動粘性係数、 S は平均河床勾配である。弱非線型安定解析では、平坦床のもとでの等流状態に対し、河床高さ $\tilde{h}$ に $\tilde{x}$ 方向の波状摂動を与えることによって、摂動の振幅の時間発展を求めていく。河床が平坦であり流れが等流状態であれば、式 (33) および (34) においてピエゾ圧力の勾配はゼロ ($\nabla \tilde{p}^* = 0$) となるが、河床形状に与えられた摂動に伴いピエゾ圧力にも摂動が加わることによって、摂動部分においてピエゾ圧力の勾配が生じることになる。そのピエゾ圧力勾配は式 (33) および (34) より導かれる摂動方程式より求められる。また、著者らは底面せん断力を求める際、底面近傍にコンスタントレイヤーを想定したスリップ条件を用いている。コンスタントレイヤーは薄い層であり、ここではこの層内での圧力勾配が法線方向に一定であると仮定し、式 (33) および (34) によって求められる底面ピエゾ圧力勾配を流砂量式 (30) に適用する。

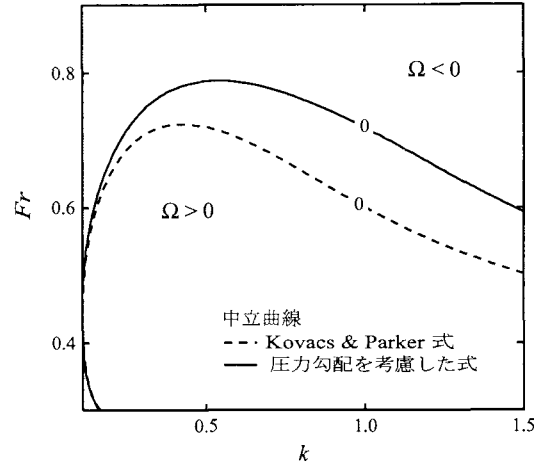


図-5 線形安定解析より求められた中立曲線 ($\mu_c = 0.84$, $S = 0.003$, $\theta = 0.3$).

(2) 適用結果および考察

デューンの遷移過程に関する弱非線型安定解析では、線形増幅率ゼロの中立曲線上でフルード数を展開することによって、次の非線型振幅方程式が導かれる。

$$dA/dT = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A \quad (35)$$

ここで A は摂動の振幅、右辺第一項の係数 α_0 は線形増幅率に相当し、第二項の係数 α_1 はランダウ定数である。この α_1 の値が正の場合、解は中立点において亜臨界分岐形態を示し、この時デューン—平坦床遷移過程に二価性やヒステリシスの現れることが説明される³⁾。

図-5 に線形安定解析より求めた中立曲線を示す。ここで Ω は摂動の線形増幅率、 Fr は平坦床に対応したフルード数であり、 k は摂動の無次元波数 ($= 2\pi D / \tilde{\lambda}$) である (ここで D は等流水深、 $\tilde{\lambda}$ は波長)。図には $\mu_c = 0.84$, $S = 0.003$ および $\theta (= \tau_{co}^* / \tau_0^*) = 0.3$ とした場合を示す (ここで τ_0^* は平坦床等流状態に対応したシールズストレス)。破線および実線はそれぞれ流砂量式に Kovacs & Parker 式および圧力勾配を考慮した式 (30) を用いた場合の中立曲線である。図を見ると、圧力勾配を考慮した場合、デューン発生を示す $\Omega > 0$ の不安定領域が Kovacs & Parker 式を用いた場合と比べて、波数およびフルード数のより大きい領域へ広がっているのがわかる。また、デューン発生の限界フルード数 Fr_c に対応する卓越波数の値が大きくなっているのもわかる。

表-1 および表-2 に、それぞれ Kovacs & Parker 式および圧力勾配を考慮した式 (30) を適用した各ケースの結果を示す。表には、線形安定解析より求められた限界フルード数 Fr_c および Fr_c に対応する卓越波数 k と弱非線型安定解析より求められた α_0 および α_1 の値を示した。表を見ると、Kovacs & Parker 式を用いた場合 (表-1) は求められた α_1 の値が全ケースで負の値であるのに対して、圧力勾配を考慮した式を用いた場合

表-1 Kovacs & Parker 式を用いた場合の α_0 およびランダウ定数 α_1 .

S	θ	μ_c	k	F_c	$\text{Re}(\alpha_0)$	$\text{Re}(\alpha_1)$
0.005	0.3	0.84	0.22	0.757	0.315	-1818
0.005	0.3	0.47	0.15	0.688	0.149	-958
0.003	0.3	0.84	0.43	0.724	1.08	-437
0.003	0.3	0.47	0.33	0.637	0.426	-557
0.001	0.3	0.84	0.60	0.684	1.73	-42.1
0.001	0.3	0.47	0.48	0.530	0.226	-108
0.003	0.1	0.84	0.45	0.732	1.75	-321
0.003	0.1	0.47	0.34	0.657	0.711	-641

(表-2) はほとんどのケースで α_1 が正の値となっている。このことは、Kovacs & Parker 式を用いると遷移過程に亜臨界分岐が現れにいが、圧力勾配を考慮すると亜臨界分岐が現れやすくなることを示している。

局所勾配の影響を表すパラメータは μ_c であり、この値が大きいと局所勾配の影響は小さくなる。Kovacs & Parker 式を用いた場合、表-1 をみるとわかるように、 μ_c の値が大きい(局所勾配の影響が小さい)と線形解析より求められる限界フルード数および対応する卓越波数の値はそれぞれ大きくなる。このとき(スペースの都合で図示は省略するが)、不安定領域がフルード数および波数のより大きい領域まで広がっており、前出の圧力勾配を考慮することによって得られた中立曲線(線形解析の結果)は、Kovacs & Parker 式において局所勾配の影響を小さくした場合と類似した傾向を示している。また、前述したとおり μ_c の値は 0.47~0.84 程度であるが、著者らは μ_c にさらに大きい値($\mu_c = 1 \sim 5$)を用いて弱非線型解析を行うことによって、Kovacs & Parker 式を用いても局所勾配の影響が非常に小さいと想定した場合には亜臨界分岐の現れることを示している³⁾。

Kovacs & Parker 式では局所勾配の影響として重力のみが考慮されており、ここでこの重力の影響と本研究で考慮した圧力勾配の影響の関係を調べてみる。底面に対して接線方向の重力による項(式(28)では $\hat{k} \cdot \hat{s}$ または式(30)では $\hat{h}_x$)と圧力勾配による項($\nabla p^* \cdot \hat{s}$ または $\nabla p^* \cdot \hat{s}$)について、線形の摂動解に現れる位相差を求めてみた。図-5 のケースにおいて中立点上での位相差を調べると、重力による項は(直感的にもわかるように)河床形状との位相差が 0.500π であるのに対し、圧力勾配による項は河床形状との位相差が -0.562π となり、両者はほぼ逆位相の関係にあることがわかる。したがって、式(28)または(30)の摂動解において、圧力

表-2 圧力勾配の影響を考慮した掃流砂量式(30)を用いた場合の α_0 およびランダウ定数 α_1 .

S	θ	μ_c	k	F_c	$\text{Re}(\alpha_0)$	$\text{Re}(\alpha_1)$
0.005	0.3	0.84	0.65	0.734	2.85	255
0.005	0.3	0.60	0.63	0.715	1.75	18.8
0.005	0.3	0.47	0.61	0.676	0.84	-140
0.003	0.3	0.84	0.54	0.788	2.43	331
0.003	0.3	0.60	0.56	0.786	1.91	278
0.003	0.3	0.47	0.55	0.781	1.22	86.9
0.001	0.3	0.84	0.48	0.875	3.98	5240
0.001	0.3	0.60	0.47	0.892	7.47	15500
0.001	0.3	0.47	0.45	0.905	12.0	31300
0.003	0.1	0.84	0.54	0.789	3.63	512
0.003	0.1	0.60	0.56	0.787	2.99	463
0.003	0.1	0.47	0.55	0.783	2.12	239

勾配は底面に対し接線方向へ働く重力の影響を低減させる効果があり、これによって、圧力勾配を考慮した流砂量式を用いると不安定領域が拡大し、また、デューンの遷移過程に亜臨界分岐が現れやすくなると考えられる。

4. 結論

本研究では、Kovacs & Parker の流砂量式に対して、デューン発生に伴って生じる圧力勾配の影響を考慮した式を導出し、その式をデューン-平坦床遷移過程に関する弱非線型安定解析に適用した。その結果、 μ_c の値が適当な範囲においても、遷移過程に亜臨界分岐の現れることが示された。これは摂動解において、圧力勾配には底面接線方向への重力の影響を低減させる働きがあるためと考えられる。

参考文献

- 1) Fredsøe, J., On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, 1-16, 1974.
- 2) Kovacs, A., Parker, G., A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, 153-183, 1994.
- 3) 山口里実, 泉典洋, デューン-平坦床遷移過程に見られる亜臨界分岐, 土木学会論文集, No.740/II-64, 75-94, 2003.
- 4) Raudkivi, A.J., Study of sediment ripple foamation, *J. Hydraul. Div.*, ASCE, 89, No.HY6, 15-33, 1963.
- 5) 大貫博史, 森田英男, 吉川秀夫, 河床波上の流れについて, 水理講演会論文集, 第 28 巻, 729-734, 1984.
- 6) 久宝保, 土砂の水中傾斜角について, 土木技術, 第 6 巻, 第 5 号, 2-4, 1951.

(2004. 9. 30 受付)