

台形堰上の潜り越流の数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF SUBMERGED OVERFLOW ON TRAPEZOIDAL WEIR

浪平 篤¹・後藤真宏²・常住直人²

Atsushi NAMIHIRA, Masahiro GOTO and Naoto TSUNESUMI

¹正会員 農修 農業工学研究所 水工部水源施設水理研究室 (〒305-8609 つくば市観音台2-1-6)

² 農博 農業工学研究所 水工部水源施設水理研究室 (〒305-8609 つくば市観音台2-1-6)

The hydraulic characteristic of submerged overflow is not fully solved as compared with perfect overflow. Moreover, in the research on a weir, the hydraulic model test is conducted in many cases. However, if the flow over a weir can be reproduced in sufficient accuracy by numerical analysis, it will be able to contribute to the elucidation of its hydraulic characteristic greatly. Then, in this research, numerical analysis of the submerged overflow on trapezoidal weir is performed. Consequently, the flow change by the difference in Ht/Ho is in good agreement with experimental measurements (Ho : water depth at upstream of weir, Ht : water depth at downstream of weir, both from weir crest). Additionally, by not disregarding approaching velocity head and evaluating discharge from the channel floor to the water surface, the possibility of deriving the discharge formula which can be applied when Ht/Ho is close to 100% is shown.

Key Words : Trapezoidal weir, Submerged overflow, Discharge formula, VOF, $k-\epsilon$ turbulence model

1. はじめに

堰の水理特性についてはこれまでに数多くの研究がなされており、流量計測の手段として実用的な流量公式が種々得られている¹⁾。これらのうち広頂堰の公式は、開水路一次元非定常流解析における堰を越える流れ²⁾、汜濫解析における盛土等を越える流れ³⁾、水田からの洪水流出⁴⁾等の推定においても利用されている。

しかし、完全越流と比較して潜り越流の水理特性は、堰高に対する越流水深が大きい場合等について十分に解明されていないとの指摘^{5) 6)}がある。潜り越流にも適用可能な広頂堰の流量公式として本間の公式が一般的であるが、この公式を定めた実験でも、潜り越流のときの越流水深が堰高より大きいケースはない⁷⁾。また、堰下流側水深を最も堰上げした潜り越流のときの越流水深が完全越流のときの2倍を超えるケースは全体の半数しかなく、そのうち3倍を超えるものはない⁷⁾。前述の応用事例では、このような実験範囲を超える条件に対しても流量公式が適用されるが、その際の精度等についての検討はほとんど行われていない。堰を有する河川や水路の流下能力や、汜濫水の挙動等を正確に把握するためにも、潜り越流に対する流量公式の再評価は重要と考えられる。

なお、流量と堰下流側水深が既知のときに、完全越流の流量公式を用いて潜り越流状態の堰上流側水深を求める方法⁸⁾が提案されている。堰を有する河川等において所定の流量に対する水面形を求める不等流計算を行うときには、この方法が有効と考えられる。

堰の水理特性に関する研究では、従来、水理模型実験が行われてきた。水理模型実験では実際の流況を忠実に再現することが可能である。しかし、模型形状の変更には多大な時間と費用を要することや、測定上の問題等から、実験のみにより流況に関する詳細なデータを入手することは困難な場合がある。このような弱点を補完する手段として、近年、数値解析が有力視されている。開水路の断落ち部における流れについては、下流水深の違いによる流況変化やその移行限界を数値解析により良好に再現した事例⁹⁾がある。堰周辺の流れについても、数値解析により十分な精度で再現できれば、その水理特性の解明に大きく貢献できると考えられる。

そこで本研究では、堰を越える流れの数値解析を行う。対象は、Fritz and Hanger¹⁰⁾によって実験が行われ、比較的詳細な流況データが報告されている法面勾配1:2の対称な台形堰とした。この形状は本間の実験⁷⁾では扱われていないが、堤防では1:2が急勾配の限界とされており¹¹⁾、その水理特性を把握することは重要と考えられる。

まずは、台形堰を越える流れに対する解析結果の再現性を、実験結果との比較から検討する。次に、下流水深の違いによる流況変化の詳細を数値解析により明らかにする。最後に、これらの解析結果をもとに、台形堰上の潜り越流に対する流量公式の再評価を行う。

2. 解析方法

(1) 基礎式

流れの基礎式は、時間平均流れを効率よく得るため、渦粘性モデルを用いてレイノルズ平均した連続式と Navier-Stokes 方程式（以下、N-S方程式という）とした。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3} \bar{k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ 2(\nu + \nu_t) \bar{D}_{ij} \right\} + G_i \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\quad}$ はレイノルズ平均を表し、 t は時間、 x_i は流下方向座標、 x_2 は鉛直方向座標、 u_i は x_i 軸方向の流速成分 ($i=1, 2$)、 p は圧力、 ρ は密度、 k は乱流エネルギー、 ν は動粘性係数、 ν_t は渦動粘性係数、 D_{ij} はひずみ速度テンソル、 G_i は x_i 軸方向の外力成分 ($i=1, 2$) である。繰り返し添字は総和規約に従うものとする。 \bar{D}_{ij} は以下のように表記される。

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

乱流モデルとしては、水工学の分野においても解析例が多く、実績のある標準型 $k-\varepsilon$ モデルを適用した。本モデルでは、 ν_t の評価式、 k およびエネルギー散逸率 ε の輸送方程式は、それぞれ以下のように表記される。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{C_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + 2\nu_t \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - \varepsilon \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{C_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} + \frac{\varepsilon}{k} \left\{ C_{\varepsilon 1} (2\nu_t \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right\} \quad (6)$$

式(4)～(6)の係数には、標準的な値である $C_\mu = 0.09$ 、 $C_k = 1.00$ 、 $C_\varepsilon = 1.30$ 、 $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ 、 $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ を与えた。

また、自由水面の変動を表現するため、再現の精度が高く解析例も多いVOF法 (Volume of Fluid Method)¹²⁾ を適用した。VOF法では、水面形状を各差分セルにおけ

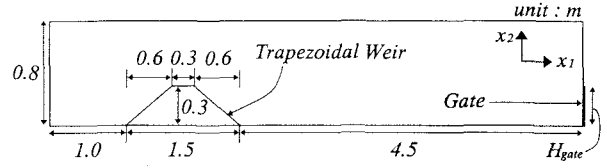


図-1 右岸側から見た解析モデルの縦断面図

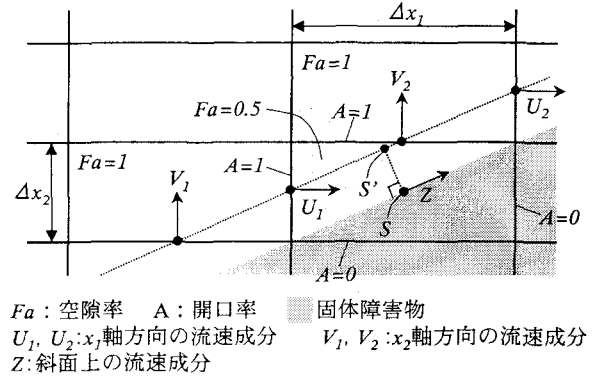


図-2 斜面の扱いの概念図
 Fa: 空隙率 A: 開口率 〇: 固体障害物
 U₁, U₂: x₁軸方向の流速成分 V₁, V₂: x₂軸方向の流速成分
 Z: 斜面上の流速成分

図-2 斜面の扱いの概念図

る流体の存在比率 F ($0 \leq F \leq 1$) によって表現し、差分セル間の F 値の輸送を次の移流方程式に基づいて行う。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

(2) 解析モデル

解析の対象とした水理模型実験¹⁰⁾ では、幅0.499m、高さ0.7m、長さ7mの長方形断面水平水路に、高さ0.3m、天端長さ0.3m、上下流法面勾配1:2の台形堰を設置し、水路上流端から一定流量を与え、水路下流端のゲート調整により堰下流側水深を変化させている。

この実験に対し、 x_1 および x_2 軸方向の格子間隔 Δx_1 、 Δx_2 をそれぞれ0.02m、0.01mで一定とした鉛直2次元デカルト格子上に、図-1の解析モデルを作成した。堰の斜面部分は、榊山ら¹³⁾ に倣い、図-2に示すように、各差分セルの空隙率 F_a およびセル界面の開口率 A により表現した。堰下流側水深は、水路下流端に設置したゲートの高さ H_{gate} の調整により変化させた。

(3) 計算条件

基礎式の各変数はスタッガード配置し、基礎式は有限差分法によって離散化した。時間差分スキームは4次精度Runge-Kutta法、空間差分スキームは2次精度中心差分とした。但し、N-S方程式の対流項にはQUICK法、 k および ε の輸送方程式の対流項には一次精度上流差分を適用し、 F 値の移流方程式の離散化にはドナー・アクセプタ法¹²⁾ を用いた。圧力場と連続式のカップリング手法にはSMAC法¹⁴⁾ を使い、前処理付BiCGStab法¹⁵⁾ により圧力方程式を解いた。

壁面境界条件には対数則を適用した。堰の斜面部分に

対しては、図-2を例にすると、まず点S'における斜面上に平行な流速成分を U_1, U_2, V_1, V_2 の線形補間により求め、その流速から対数則により点Sにおける斜面上の流速成分 Z を求めた。そして、この Z を用いて U_1, V_2 等のコントロールボリューム上の流速を補間した。

初期条件として、流速は全てゼロ、水深は水路全体で0.4m一定とした。これは、堰高0.3mに後述の越流水深0.1mを加えた値である。境界条件として、上流端では、初期条件でゼロとした流速をその後5秒間に一定速度で増加させ、それ以降は単位幅流量が一定となるように水深と流速を与えた。このとき、完全越流となるときに台形堰の越流水深が実験結果¹⁰⁾の0.1mと合致するように単位幅流量を定めた（以下、このときの値を Q_0 とする）。下流端では、堰下流側水深の調整のためのゲート（図-1）からのオーバーフローを自由流出として扱った。

解析は、水面形状がほぼ安定するのを確認して終了させた。この結果、解析時間は30~40秒であった。水面形状が安定しなかった場合については後述する。

軸等の基準位置については、 x_1 軸は堰頂の下流端位置を基準に流下方向を正、 x_2 軸は水路底を基準に鉛直上向を正とした。そして、堰頂を基準とする堰上流側水深および堰下流側水深をそれぞれ H_0, H_t とし、実験結果を参考にその評価位置をそれぞれ $x_1 = -1.2\text{m}, x_1 = 2.5\text{m}$ とした。また、潜り越流に関する指標として、Fritz and Hanger¹⁰⁾に倣い H_t/H_0 を用いることとした。

3. 解析結果および考察

(1) 解析結果の再現性の検討

解析結果の再現性を検討するため、水面形状および流速分布の実験結果¹⁰⁾が報告されている $H_t/H_0=1\%$ 、 $H_t/H_0=56\%$ 、 $H_t/H_0=98\%$ について解析結果を実験結果と比較した（図-3）。なお、数値解析では H_{gate} （図-1）を $\Delta x_2 = 0.01\text{m}$ 刻みで変化させて H_t/H_0 を制御したため、解析結果の H_t/H_0 が上記の値と完全に一致しない場合も生じた。このような場合は、最も近い H_t/H_0 が得られた解析結果を使用した。

$H_t/H_0=1\%$ のとき（図-3 (a)）、実験値では、堰下流側の水路底付近で流下方向への流れが、水面付近で上流方向への流れが形成され、反時計回りの渦が生じる。この流れはplunging jet flow（以下、PJFという）と呼ばれる¹⁰⁾。解析値においても同様の流況が再現された。水面形状の相違点として、越流水の堰下流側水面への突入部の水深は実験値より小さくなった。一方で、堰下流側水深が安定してほぼ一定値となる地点は、より堰の近くであった。 u_1 の分布の相違点として、実験値より堰下流側の反時計回りの渦を形成する流れが弱く、渦の範囲も小さくなった。

$H_t/H_0=56\%$ のとき（図-3 (b)）、実験値では、堰を

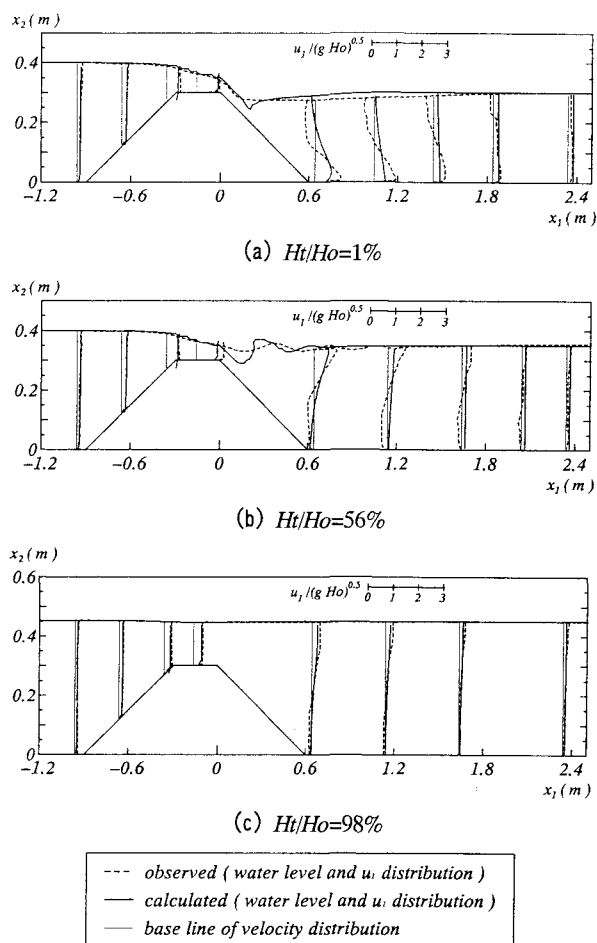


図-3 水面形状と x_1 軸方向流速成分 u_1 の分布

越えた流れはstanding wavesを伴って水面付近を流下し、水路底付近で上流方向への流れが形成され、時計回りの渦が生じる。このとき、 H_0 は完全越流のときの0.1mから変化しない。この流れはsurface wave flow（以下、SWFという）と呼ばれる¹⁰⁾。解析値においても同様の流況が再現された。水面形状の相違点として、越流水の堰下流側水面への突入部の水深は実験値より小さくなり、standing wavesの振幅は実験値より大きくなった。一方で、 $H_t/H_0=1\%$ のとき同様、堰下流側水深が安定してほぼ一定値となる地点は、より堰の近くであった。 u_1 の分布の相違点として、実験値より堰下流側の反時計回りの渦を形成する流れが弱く、渦の範囲も小さくなった。

$H_t/H_0=98\%$ のとき（図-3 (c)）、実験値では、SWFと同様、堰を越えた流れは水面付近を流下し、水路底付近で上流方向への流れが形成され、時計回りの渦が生じる。一方、水面ではstanding wavesが生じない。このとき、水路末端のゲートによる堰上げの影響が台形堰の上流側に及び、 H_0 は完全越流のときの0.1mを越える。この流れはsurface jet（以下、SJという）と呼ばれる¹⁰⁾。解析値においても同様の流況が再現された。 u_1 の分布の相違点として、 $H_t/H_0=56\%$ のとき同様、実験値より堰下流側の反時計回りの渦を形成する流れが弱く、渦の範囲も小さくなった。

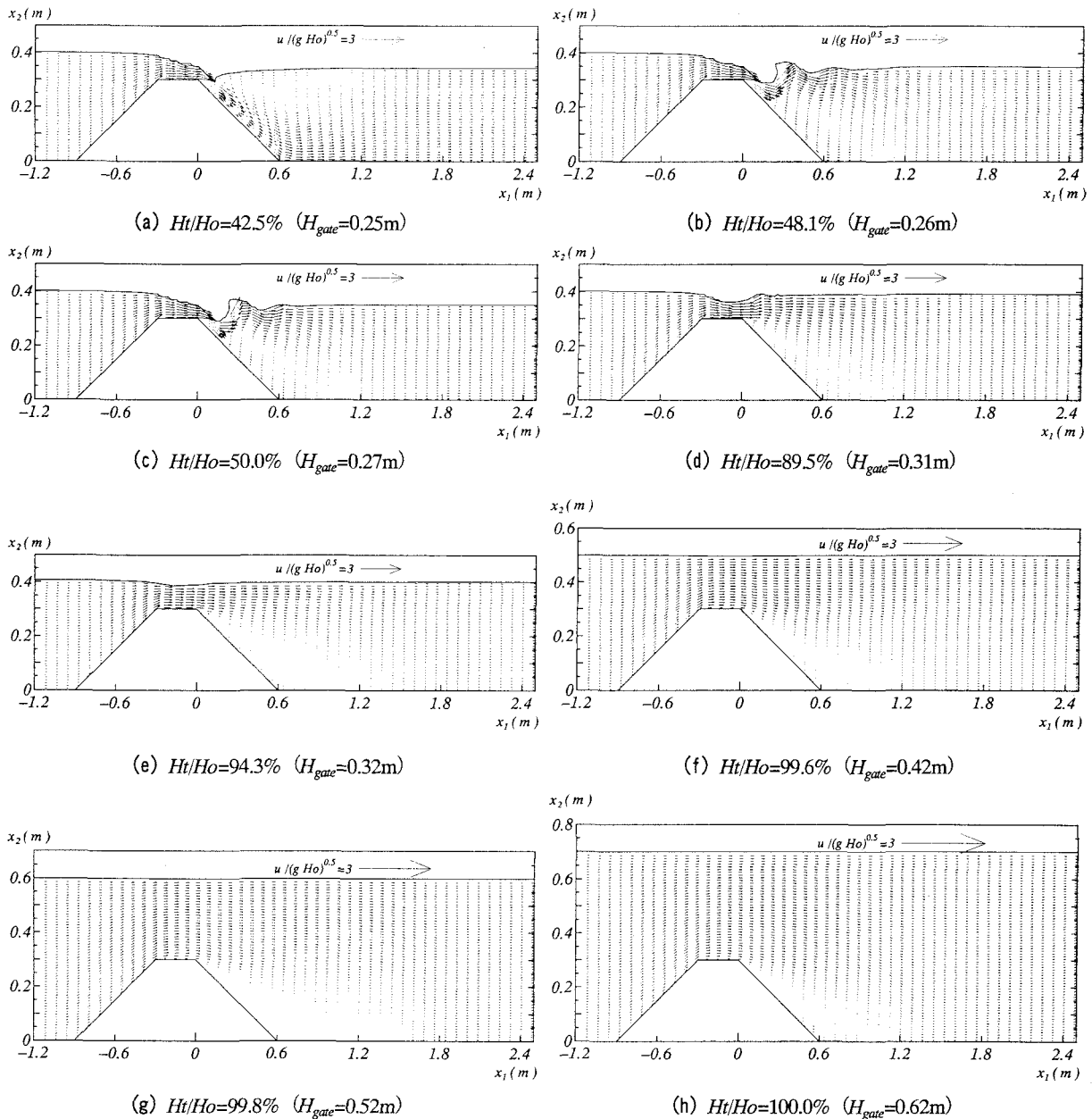


図-4 堰下流側水深の違いによる水面形状と流速ベクトルの変化

これら3ケースにおける実験値との相違点を比較すると、越流水の堰下流側水面への突入部付近で水面変動が大きくなる一方、より堰の近くで水面形状が安定すること、堰下流側の渦を形成する流れが弱くなること、渦の範囲が小さくなるのが共通している。渦に関する相違の原因としては、標準型 $k-\epsilon$ モデルは主として発達した境界層流を対象に定式化されたものであるため、バックステップ流れの解析では再付着点距離が過小評価される¹⁶⁾等の指摘があるが、本研究で対象とした流れについても標準型 $k-\epsilon$ モデルの適用範囲を越えており、同様の傾向の誤差が生じたことが考えられる。水面形状に関する相違の原因としては、前述のように正確な流況評価ができなかったことの影響が考えられる。

しかし、 H_t/H_o の違いによる水面形状および u_1 の分布

の傾向が良好に再現されており、以下、同一の手法による解析を継続することとした。より適切な乱流モデルの導入は、今後の検討課題とする。

なお、解析結果では堰天端付近で水面形状の一部が階段状になったが、これは、デカルト座標系で式(7)を離散化したため、差分セルの対角線方向への F 値の輸送が滑らかに行われなかったことによると考えられる。

(2) 堰下流側水深の違いによる流況変化

同一流量における堰下流側水深の違いによる流況変化の詳細を明らかにするため、 H_{gate} を様々に変化させて数値解析を行った(図-4)。

$H_{gate} \leq 0.25m$ では、流れはPIFとなった(図-4(a))。

$H_{gate} = 0.26m$ になると、レイノルズ平均流れの解析で

あるにも関わらず水面形状は安定せず、流れはPJFとSWFの遷移状態となった。そのため解析を90秒間行い、 H_t/H_o がその期間の平均値48.1%となるときを、この条件における代表的流況と見なした(図-4 (b))。このときの流れはSWFとなった。

$0.27\text{m} \leq H_{gate} \leq 0.31\text{m}$ のとき、流れはSWFとなった(図-4 (c) ~ (d))。standing wavesの振幅は H_{gate} の増加とともに小さくなった。

$H_{gate} = 0.32\text{m}$ になると、流れはSJとなった(図-4 (e))。standing wavesは消滅し、水路末端のゲートによる堰上げの影響は台形堰の上流側に及び、 H_o は完全越流のときの0.1mを越えた。このとき、 $H_t/H_o = 94.3\%$ であった。

さらに H_{gate} を増加させ、 H_o を完全越流のときの0.1mに対して2倍(図-4 (f))、3倍(図-4 (g))、4倍(図-4 (h))としたが、流況に大きな変化はなかった。

このようなPJFからSWF、SJへの移行と、完全越流から潜り越流への移行との関係を調べるため、 H_t/H_o とフルード数 Fr の関係を調べた(図-5)。 Fr は堰頂上で最も水深が小さくなる地点から求めた。図-5より、流れがSJになると堰頂上から射流部分がなくなった。これは潜り越流となることを示す^{1) 7)}。この結果は、当然ながら、流れがSJになると水路末端のゲートによる堰上げの影響が台形堰の上流側に及んだことと一致している。

(3) 流量公式への解析結果の適用

水路上流端から供給する単位幅流量 Q を $1.50Q_o$ 、 $1.25Q_o$ 、 $0.75Q_o$ 、 $0.50Q_o$ とした場合についても、同様に H_{gate} を変化させて数値解析を行った。そして、 H_o と Q の解析値を完全越流の流量公式(式(8))に当てはめて流量係数 C を求め、 H_t/H_o と C の関係を調べた(図-6)。

$$Q = CH_o \sqrt{2gH_o} \quad (8)$$

完全越流の流量係数 C は、 H_o/W の1次式によって規定されることが実験的に示されている⁷⁾。ここで、 W は堰高である。

図-6より、潜り越流とならないPJFおよびSWFのときには C はほぼ一定値となり、潜り越流となるSJのときには C は急激に減少した。この移行時の H_t/H_o は90%付近であった。このような傾向は本間の実験結果⁷⁾と同様である。但し、解析対象とした H_o/W では Q の範囲が $Q=0.50Q_o \sim 1.50Q_o$ と狭かったため、その変化による H_t/H_o と C の関係の違いはほとんど確認されなかった。

次に、潜り越流となるSJのときの H_o 、 H_t 、 Q の解析値を潜り越流の流量公式(式(9))に当てはめて流量係数 C' を求め、 H_t/H_o と C' の関係を調べた(図-7)。

$$Q = C' H_t \sqrt{2g(H_o - H_t)} \quad (9)$$

潜り越流の流量係数 C' については、理論的に式(10)の関係が成り立つ⁷⁾。

$$C' = 2.6C \quad (10)$$

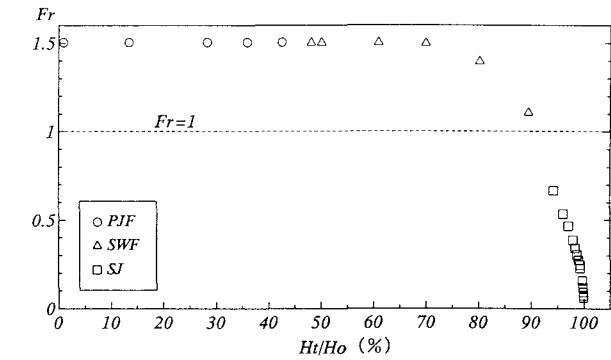


図-5 H_t/H_o と Fr の関係

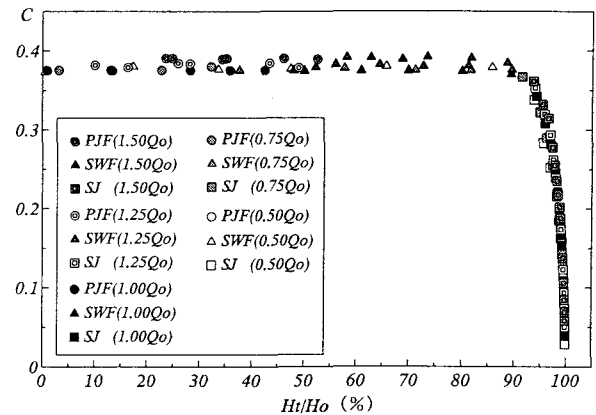


図-6 H_t/H_c と C の関係

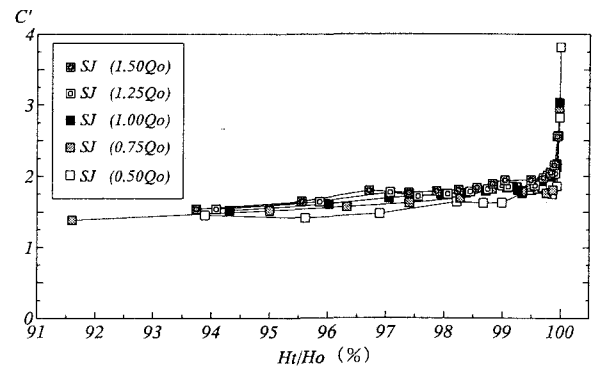


図-7 H_t/H_c と C' の関係

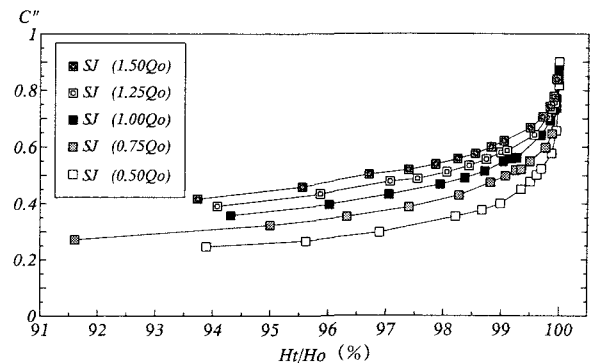


図-8 H_t/H_c と C'' の関係

図-7より、 $H_t/H_o = 99.9\%$ 付近までは H_t/H_o と C' の関係はほぼ線形であるが、それより H_t/H_o が100%に近づく⁷⁾と C'

は急激に増加する。本間の実験⁷⁾では $Ht/Ho=99.9\%$ を越えるケースは1つしかなく、本間の公式ではこのような状況は想定されていないと考えられる。

さて、式(8)および(9)では、接近流速水頭を無視している。完全越流のときは Ho が堰高 W の1/2以下であれば接近流速水頭を無視できることが示されている¹⁷⁾が、潜り越流についてはこれを無視できる条件は定められていない。また、式(9)では、堰頂より低い領域を死水域として扱っている。しかし、図-4からは、 Ho および Ht の評価地点における u_v の鉛直分布はほぼ一様であり、堰頂より高い位置における流速が卓越しているわけではない。また、 Ho と Ht の評価地点における u_v の大きさに差はほとんど見られない。

そこで、ベルヌーイの定理から潜り越流の流量公式を導出⁷⁾する際、接近流速水頭を無視せず、流量を水路床から水面で評価すると、式(11)が得られる。

$$Q = C''(Ht + W) \sqrt{2g \left\{ Ho - Ht + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{Ho + W} \right)^2 \right\}} \quad (11)$$

ここで、 C'' は新たに定めた潜り越流の流量係数である。そして、潜り越流となるSJのときの Ho 、 Ht 、 Q の解析値を式(11)に当てはめて流量係数 C'' を求め、 Ht/Ho と C'' の関係を調べた(図-8)。この結果、 Ht/Ho と C'' の関係は曲線的となり、 Ht/Ho が99.9%を越えた場合も C'' は連続的に増加した。従って、式(11)を潜り越流の流量公式として用いると、式の両辺に未知数 Q が含まれるため計算は煩雑となるが、 Ht/Ho が100%に近い場合の適用精度はより高くなることが期待される。今後は、対象とする流量の範囲をより広げ、異なる形状の堰も扱い、 C'' の定式化の可能性を検討する必要がある。

4. 結論

本研究では、法面勾配1:2の対称な台形堰を対象に、堰を越える流れの数値解析を行った。

- (1) 実験結果と比較すると、解析結果では、越流水の堰下流側水面への突入部付近で水面変動が大きくなる一方、より堰の近くで水面形状が安定し、堰下流側で生じる渦が小さくなったが、 Ht/Ho の違いによる流況変化の傾向が良好に再現された。
- (2) 完全越流および潜り越流の解析結果を完全越流の流量公式に当てはめた結果、 Ht/Ho と流量係数の関係は、異なる形状の堰を対象とした既往の実験結果と同様の傾向が得られた。
- (3) 接近流速水頭を無視せず、流量を水路床から水面で評価して潜り越流の流量公式を導出した。この流量公式に潜り越流の解析結果を当てはめた結果、既存の公式と比較して、 Ht/Ho が100%に近い場合の適用精度はより高くなる可能性が示された。

- (4) 今後は、対象とする流量の範囲をより広げ、異なる形状の堰も扱う必要がある。また、堰を越える流れにより適した乱流モデルの検討を行う必要がある。

参考文献

- 1) 土木学会：水理公式集 平成11年版，pp.241-253，1999。
- 2) 久保成隆，リリオ マサル ナカセ，伊藤良栄，中村良太：Preisman型陰差分法における内部境界条件の実用的・安定的計算法，農業土木学会論文集，第168号，pp.9-18，1993。
- 3) 建設省河川局監修：改訂新版 建設省河川砂防技術基準(案)同解説 調査編，山海堂，pp.151-156，1997。
- 4) 角屋睦，早瀬吉雄：流出解析手法(その14)―低平地タンクモデルによる洪水解析―，農業土木学会誌，第49号(4)，pp.321-332，1981。
- 5) 羽田野袈裟義，狩野晋一：無次元パラメータに着目した円型堰の一考察，土木学会第51回年次学術講演会，pp.348-349，1996。
- 6) 小島大輔，尾崎元治，安田陽一，大津岩夫：潜り堰を越える流れの特性，土木学会第54回年次学術講演会，pp.262-263，1999。
- 7) 本間仁：低溢流堰堤の流量係数(第二編)，土木学会誌，第26巻，9号，pp.849-862，1940。
- 8) 多田羅謙治，羽田野袈裟義，朝位孝二：広頂堰の諸量の関係に関する一考察，流体力の評価とその応用に関する研究論文，第2巻，pp.45-51，2003。
- 9) 梶川勇樹，道上正規，松原雄平，檜谷治，中本英利：断落ち部における常射流混在流れの数値解析，水工学論文集，第47巻，pp.823-828，2003。
- 10) Hermann M. Fritz，Willi H. Hanger：Hydraulics of Embankment Weirs，Journal of Hydraulic Engineering，Vol.124，No.9，pp.963-971，1998。
- 11) 建設省河川局監修：改訂新版 建設省河川砂防技術基準(案)同解説 設計編[I]，山海堂，p.8，1997。
- 12) C. W. Hirt，B. D. Nichols：Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries，Journal of computational physics，Vol.29，pp.201-225，1981。
- 13) 榊山勉，鹿島遼一，阿部宣之：傾斜堤周辺の波動場解析へのポラスモデルの適用性，海岸工学論文集，第38巻，pp.546-550，1991。
- 14) Amsden A. A.，Harlow F. H.：A simplified MAC Technique for Incompressible Fluid Flow Calculations，Journal of computational physics，Vol.6，pp.322-325，1970。
- 15) 小国力編著：行列計算ソフトウェア，丸善株式会社，p.196，1991。
- 16) 数値流体力学編集委員会編：乱流解析，東京大学出版会，pp.166-169，1995。
- 17) 本間仁：低溢流堰堤の流量係数(第一編)，土木学会誌，第26巻，6号，pp.635-645，1940。

(2004. 9. 30 受付)