

エネルギーの保存性を考慮した DEM における接触力の評価法

EVALUATION OF CONTACT FORCE IN DISTINCT ELEMENT METHOD
WITH ENERGY CONSERVATION

藤岡 奨¹・牛島 省²

Susumu FUJIOKA and Satoru USHIJIMA

¹ 学生員 京都大学大学院工学研究科 社会基盤工学専攻

² 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper concerns the evaluation method for contact force in the Distinct Element Method (DEM) in terms of the energy conservation. The contact force is usually determined from the relative displacement of the particles, using analogy of spring-dashpot system. Since this form of contact force does not take account of the mechanical energy of the particles, unexpected sudden increase of the kinematic energy can be occurred. In this paper, an evaluation method for contact force that conserves the kinematic energy is newly proposed. A basic validation is carried out to confirm the validity of the proposed model.

KeyWords : Distinct Element Method, contact force, kinematic energy

1. はじめに

固液混相流れの個々の粒子の挙動を取り扱う手法として固相に個別要素法 (The Distinct Element Method, DEM¹⁾) を用いる手法が提案されている^{2, 3)}。

DEM を利用する計算法は, 流砂⁴⁾, 土石流⁵⁾ 等の数値計算においてもその有効性が示されている。

しかし, 最近では既存の DEM の問題点にも目が向けられてきている。長田ら⁶⁾ は, DEM における粒子の接触時間や, 粒子の回転運動に関する問題点を考察したが, そのなかで, 粒子の異常反発の問題も取り上げ, DEM の計算における異常反発の起こらない安定領域を示した。

本論文では, DEM の問題点のうちエネルギーの保存性を取り上げ, エネルギーの保存性を満足する接触力の評価法について考察した。DEM において, 球体同士の接触力を評価するモデルは, 接触深さをバネの変形量とみなし, バネダッシュポット系とのアナロジーを用いて表す手法がとられている¹⁾。

これに対して本論文では, 接触力としてバネのモデルを用いるが, 接触深さと接触力が比例するというバネの力としての性質に着目するのではなく, 接触深さに応じたポテンシャルエネルギーが蓄えられるという性質に着目した接触力の評価法を提案する。

2. 壁面と球体が接触する場合

簡単のため, 最初は球体同士の衝突を考えるのではなく, 球体と壁面の衝突について考える。

(1) 相対速度および接触深さの定義

最初に, 相空間の軸をなす二つの変数, 相対速度および接触深さを定義する。球体が壁面に接触したと判定される直前の時間ステップを $n-1$ ステップ目とし, 二体が接触したと判定された時間ステップを n ステップ目とする。 n ステップ目の物理量を添字の n を用いて表す。 n ステップにおいて, 垂直方向の相対速度 $\mathbf{v}_n^n$ 接触深さ $\mathbf{d}_r^n$ は次式で定義されるものとする。

$$\mathbf{v}_n^n = (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_w) \mathbf{n}_w \quad (1)$$

$$\mathbf{d}_r^n = -|r - r_0| \mathbf{n}_w \quad (2)$$

ここで, r, r_0 はそれぞれ球体の半径, 球体の中心と壁面の距離, $\mathbf{n}_w$ は壁面に対する法線ベクトルである。壁面は静止しているものとする。

(2) 壁面と球体のなす相空間

衝突前, 衝突中, 衝突後の球体の運動の状態と運動エネルギーの関係を幾何学的に表す空間として, 図-1 に示される相空間を考える⁷⁾。図の横軸 p は球体の壁面に対する垂直方向の 1 時間ステップ当たりの移動量を示す。すなわち, $p = v \delta t$ である。ここで, 本節においては, $v \equiv -(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_w)$ とする。 p が正の領域は, 球

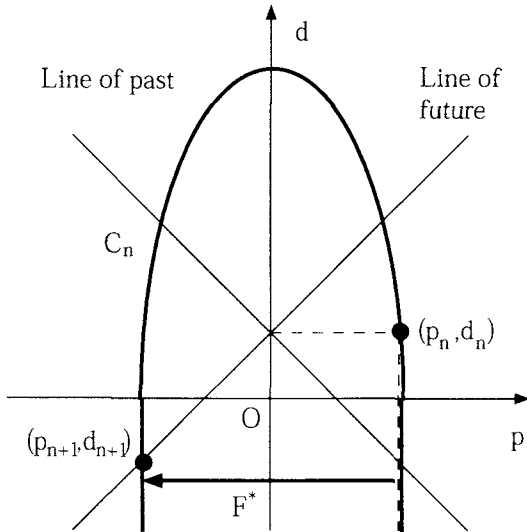


図-1 壁面と球体のなす相空間

体が壁面へ向かう速度を持っていることを示し、負の領域はその逆である。図の縦軸 d は、球体の壁面に対する相対的な位置を示す。 $d \geq 0$ のときは $d = |d_r|$ であり、 d は球体と壁面の接触深さを示す。

$d < 0$ のときは、球体と壁面は離れている。ある球体の運動の状態がこの空間上の一点 (p^n, d^n) で表現されたとき、その点を状態点と呼ぶ。

(3) 等運動エネルギー線

相空間内に等運動エネルギー線 C を引くことを考える。 $d < 0$ の場合は、法線方向の運動エネルギー K_n は $K_n = mv^2/2$ である。この式を $p-d$ 空間で表現すると、次式となる。

$$p = \sqrt{K_n^*} \quad (3)$$

ここで、 $K_n^* = 2K_n\delta_t^2/m$ である。この場合、法線方向の運動エネルギー K_n が一定の曲線 C は、 p が一定の直線として表すことができる。

また、 $d \geq 0$ のときは、接触深さに応じたポテンシャルエネルギーが球体に蓄えられるが、このポテンシャルエネルギーを仮想的な運動エネルギーとして考える。このとき、法線方向の運動エネルギー K_n は次式で与えられる。 $2K_n = kd^2 + mv^2$ 。この式を変数 p, d で置き換えると、

$$K_n^* = ad^2 + p^2 \quad (4)$$

と書ける。ここで、 $a = k\delta_t^2/m$ である。上式は、 $p-d$ 空間では楕円を表す。 n ステップにおける $p-d$ 空間内に描かれる直線と楕円を組み合わせた曲線を等運動エネルギー線 C^n と呼ぶことにする。

(4) 状態点の時間変化

$p-d$ 空間内で球体の運動の時間変化について考察する。

時間ステップ n において $p-d$ 空間上に球体の運動の状態が状態点 (p^n, d^n) で与えられたとする。このとき、 $n-1$ ステップから n ステップの間において球体の状態点が相空間上でどのような軌跡を描くかは、以下の手順により知ることができる。

$n-1$ ステップにおける球体の位置は、 $d^{n-1} = d^n - p^n$ で与えられる。この表現は、 d^n を切片として、傾き-1の直線 (以下、Line of past) $d = d^n - p$ と、 $n-1$ ステップから n ステップの間における速度の式 $p = p^n$ との連立一次方程式の解として解釈できる。

同様に、 $n+1$ ステップにおける球体の位置は $d^{n+1} = d^n + p^{n+1}$ で表すことができる。この表現を、次式で示される様な d^n を切片として、傾き1の直線 (以下、Line of future) $d = d^n + p$ と、 n ステップから $n+1$ ステップの間における速度の式 $p = p^{n+1}$ との連立一次方程式の解として解釈できる。ところが、 p^{n+1} は未知数であるので、このままでは解は求められない。 p^{n+1} は未知数であるが、 K_n^{n+1} が知られていれば、 $n+1$ ステップにおける状態点 (p^{n+1}, d^{n+1}) は、曲線 C^{n+1} と、Line of future の交点として求めることができる。もちろん、 K_n^{n+1} も未知数であるが、反発係数から決めることができる。

ただし、直線と曲線 C^{n+1} の交点を求める場合、次の理由から詳細な検討が必要となる。直線と楕円の交点は一般には必ず存在するものではなく、解が存在するための条件が存在する。また、解が2個存在する場合もあり、どちらの解を有効とするかという問題もある。

(5) 力の大きさの表現

相空間上で力の表現について考える。次元の関係から、力 F は、相空間上では $F^* = F\delta_t^2/m$ で表される。運動量式により、 p^{n+1}, p^n, F^* の関係は

$$p^{n+1} - p^n = F^* \quad (5)$$

である。つまり、状態点の p 軸方向の移動量が球体に働く力の大きさを示す。

(6) 場合分けの基準

以下の議論で重要な役割を果たす、無次元量 s をここで定義する。 ($d^n > 0$ の時のみ s は定義される。)

$$s \equiv \frac{p^n}{d^n} \quad (6)$$

以下では、 s の値に応じて、運動モードを定義し、それぞれの運動モードに対して、バネ定数あるいはダッシュポットの摩擦係数に相当する定数がどのように決まるかを示す。 s の値により、具体的には、以下の基準に従って場合分けを行っている。

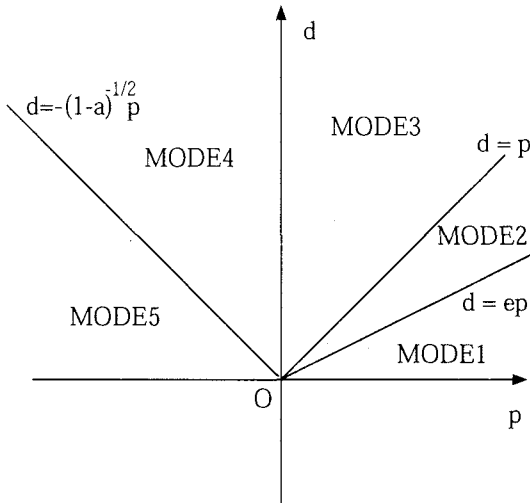


図-2 運動モードの領域分割

基準 A: 二体はくっつく方向に運動しているか、離れる方向に運動しているか. すなわち, p^n の符号で場合分けする.

基準 B: $n-1$ ステップにおいて, 球体は接触しているか, 接触していないか. すなわち, d^{n-1} の符号で場合分けする.

基準 C: $n+1$ ステップにおいて, 球体が接触しているか, 接触していないか. すなわち, d^{n+1} の符号で場合分けする.

これらの場合分けにより, 8 通りの場合が考えられるが, 二体が離れる方向に運動している場合, $n-1$ ステップにおいては二体は接触していたものと考えられるので, 実際には 6 通りで良い. また, $e \leq \sqrt{2}/2$ とすることで, 場合分けは 5 通りとなる.

(7) 次ステップにおける力

前節で考えたそれぞれの場合について実際に p^{n+1} を求めることが出来る. 求められた p^{n+1} を利用し, 式 (5) に基づき, 垂直方向の接触力 F^n を評価する. このとき, 接触力 F^n は次式の様に接触深さに比例する項と相対速度に比例する項の和になる.

$$\mathbf{F}^n = k_n d^n \mathbf{n}_w - t_n \mathbf{v}_r^n \quad (7)$$

ここで, k_n は, ばね定数に相当する定数, d^n は接触深さ, t_n はダンパの摩擦係数に相当する定数である. k_n , t_n については, a , s の関数となるが, その具体的な関数形は s の値によって異なる.

(8) 運動モードの命名

実際に得られた k_n , t_n を s の値に応じてまとめると表 1 のようになる. このとき, 同時に s の値に応じて運動モードの命名を行った.

表 1 運動モードと係数 k_n の関係

MODE	s	K
2	$1 \leq s < 1/e$	$e^2 s^2$
3	$0 \leq s < 1$	$s^2 + a(1-s)^2$
4	$-\sqrt{1-a} \leq s < 0$	$s^2 + a$
MODE	s	k_n
1	$1/e \leq s$	mse/δ_t^2
5	$s < -\sqrt{1-a}$	$m\sqrt{s^2+a}/\delta_t^2$

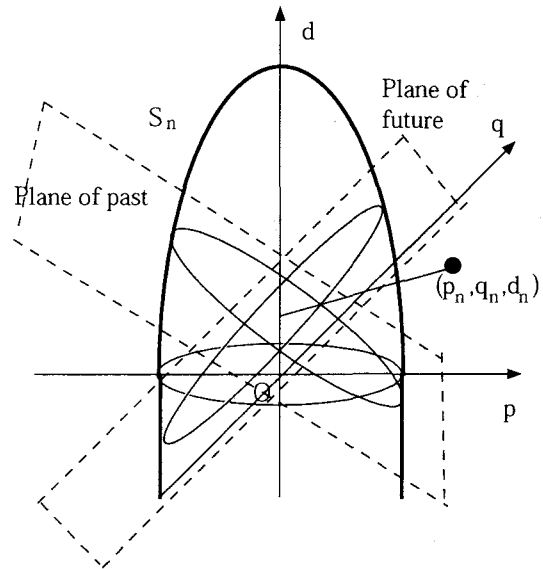


図-3 二球体のなす相空間

ただし, モード 2 からモード 4 については,

$$k_n = \frac{m}{(1+a)\delta_t^2} \left(a + \sqrt{(a+1)K - a} \right) \quad (8)$$

である. t_n は全てのモードにおいて m/δ_t である. 図-2 に, 相空間内のモードによる領域分割を示す.

3. 二球体が接触する場合

(1) 二球体のなす相空間

相空間を, 二球体の運動を表現するものに拡張する. この場合, 空間を構成する座標軸は, 球体 A の垂直方向の速度 $(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ba})\mathbf{n}_{ba}$ の大きさ $v = (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ba})$, 球体 B の垂直方向の速度 $(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ba})\mathbf{n}_{ba}$ の大きさ $u = -(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ba})$, 二体の接触深さ d である. したがって, 図-3 に示される様な三次元空間となる. ただし, $\mathbf{n}_{ba}$ は球体 A の中心から球体 B の中心への方向の単位ベクトルである. 図中の p は $v\delta_t$ を, q は $u\delta_t$ を表す. その他の事項については, 平面空間の時と同様である.

(2) 等運動エネルギー面

この相空間内では等運動エネルギーの状態は曲面で表される. $d < 0$ の場合は, 法線方向の二体の運動エ

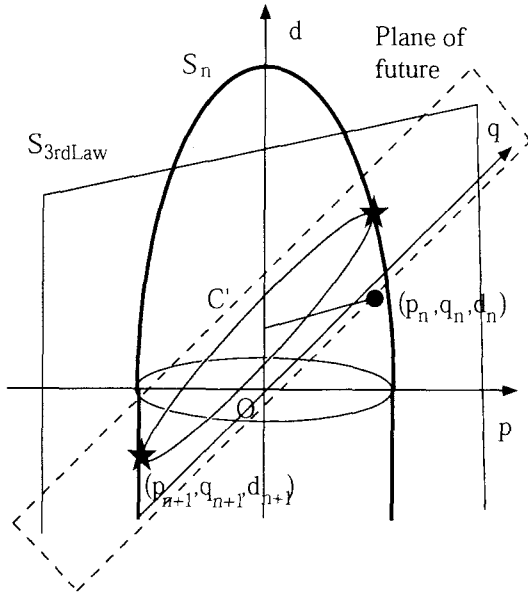


図-4 平面 S_{3rdLaw} と交線 C' の交点

エネルギー K_n は $2K_n = m_a v^2 + m_b u^2$ である。この式を運動状態空間で表現すると、次式となる。

$$K_n^* = m_a' p^2 + m_b' q^2 \quad (9)$$

ここで、 $K_n^* = 2K_n \delta_t^2 / m_r$ である。また、 m_r は m_a, m_b の reduced mass である。 m_a', m_b' はそれぞれ $m_a/m_r, m_b/m_r$ である。この場合、法線方向の二体の運動エネルギー K_n が一定の曲面 S は、断面が楕円の円筒の表面である。

また、 $d \geq 0$ のときは法線方向の二体の運動エネルギー K_n は次式で与えられる。 $2K_n = k d^2 + m_a v^2 + m_b u^2$ 。この式を、変数 p, q, d で置き換えると、

$$K_n^* = a d^2 + m_a' p^2 + m_b' q^2 \quad (10)$$

と書ける。ここで、 $a = k \delta_t^2 / m_r$ である。上式は、 $p-q-d$ 空間では楕円体を表す。以上の定義により、 n ステップにおける $p-q-d$ 空間内に描かれる楕円筒と楕円体を組み合わせた曲面が等運動エネルギー面 S^n となる。

(3) 状態点の時間変化

さて、 $p-q-d$ 空間内で球体の運動の時間変化について考察する。

時間ステップ n において $p-q-d$ 空間上に球体の運動の状態が状態点 (p^n, q^n, d^n) で与えられたとする。このとき、 $n-1$ ステップから n ステップの間において球体の運動がどのような状態にあったか、以下の手順により知ることができる。

$n-1$ ステップにおける球体の位置は、 $d^{n-1} = d^n - p^n - q^n$ で与えられる。

同様に、 $n+1$ ステップにおける球体の位置は $d^{n+1} = d^n + p^{n+1} + q^{n+1}$ で表すことができる。ところが、 p^{n+1}, q^{n+1} は未知数であるので、このままでは解は求められない。壁面の時と同様に考えると、 $n+1$ ステップにおける状態点 $(p^{n+1}, q^{n+1}, d^{n+1})$ は、曲面 S^{n+1} と、Plane of future の交線 C' として求めることができる。しかし、このままではまだ点として求めることはできていない。

最後に用いるのは、作用・反作用の法則である。球体 A、球体 B に働く接触力は大きさが同じで方向が逆であることから、次式が成立する。

$$m_a' (p^{n+1} - p^n) = m_b' (q^{n+1} - q^n) \quad (11)$$

式 (11) は一般に次式で示される平面 S_{3rdLaw} を表す。

$$m_a' p - m_b' q + C = 0 \quad (12)$$

図-4 の★印に示す通り、交線 C' と平面 S_{3rdLaw} は二つの共有点をもつ。この事情は、壁面との衝突のときと似ている。共有点の決定方法については、壁面の場合と同様である。

(4) 力の大きさの表現

作用・反作用の法則から、状態点は、式 (12) に示される平面 S_{3rdLaw} 上を動くことになる。この平面内で、状態点の p 、または q の変化量が二体に働く接触力の大きさ F を無次元化したもの $F^* = F \delta_t^2 / m_r$ を表すと解釈できる。もしも、 m_b が相対的に大きければ、平面 S_{3rdLaw} は、 $q = \text{const.}$ に近付き、壁面と球体の衝突を考えた二次元の相空間に縮退する。

(5) 速度および力

$n+1$ ステップにおける速度を求める手順は、壁面を考えたときと同様である。ここでは、二体の問題も扱えるように無次元量 s を次式で定義しなおす。

$$s \equiv \frac{p^n + q^n}{d^n} \quad (13)$$

この定義は、壁面との衝突のケースを特別な場合として含んでいる。

s の値に応じた k_n, t_n の値は、壁面を考えたときの結果が使える。変数の定義を $a \equiv k \delta_t^2 / m_r, m \equiv m_r$ とすることで、壁面との衝突を特別な場合として含むようにすることができる。

4. 検証計算

(1) 落下する球体

本論文における手法の検証として、落下する球体について検討した。球体は、自身の半径の高さから落下する。反発係数は 0.7 とした。直径は 225[m]、密度は 2.1[kg/m³] である。比較のため、次に挙げられるモデ

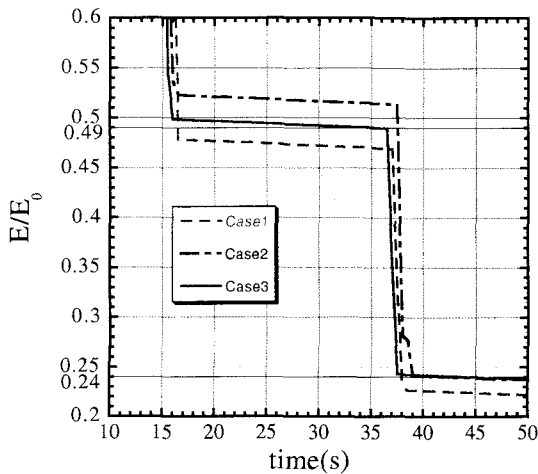


図-5 力学的エネルギーの時間変化
($\delta_t = 0.1$)

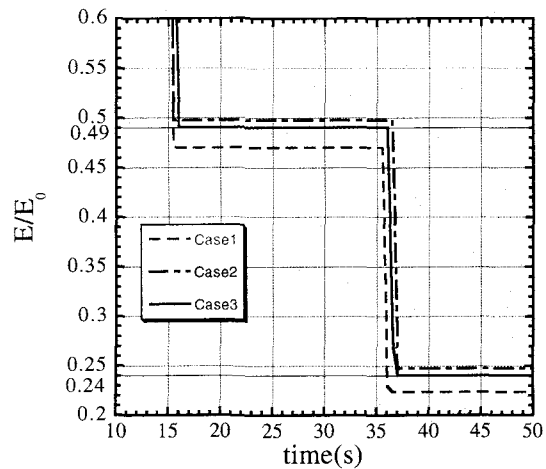


図-7 力学的エネルギーの時間変化
($\delta_t = 1.0 \times 10^{-5}$)

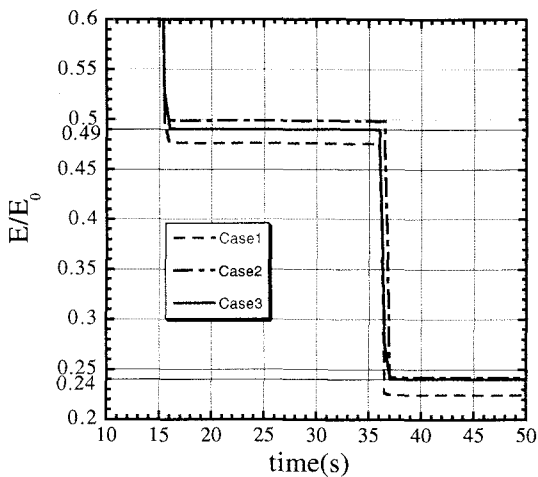


図-6 力学的エネルギーの時間変化
($\delta_t = 0.01$)

ルによる計算結果も合わせて示す。線形のパネとダッシュポットのモデルでは、垂直方向の接触力に対するパラメーターは次式で与えられる⁸⁾。

$$k_n = \frac{\pi^2 m}{\delta_t^2 l^2}, \quad t_n = -\frac{2 \ln e \sqrt{m k_n}}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e)^2}} \quad (14)$$

ただし、 l は定数であり、時間刻みをパネ-質量振動系の振動の半周期の $1/l$ の長さにとったことを示している。 l の値として、本論文では10を用いた⁶⁾。このケースをCase1とする。

また、田中ら⁷⁾が用いているHertzの公式を基にしたモデルを用いて検討したケースをCase2とする。

さらに、本論文で提案された手法をCase3とする。

落下する球体の力学的エネルギーの時間変化を図-5, 6, 7に示す。縦軸には、力学的エネルギー E をその初期時刻における値 E_0 で無次元化した値をとった。Case1, Case2, Case3について、時間刻みを、0.1

, 1.0×10^{-2} , 1.0×10^{-5} と変化させて力学的エネルギーが想定どおりに減少しているか比較した。時間刻みが0.1の場合は、時間刻みが大き過ぎて球体が空中を運動している間に力学的エネルギーが減少してしまっている様子がわかる。このエネルギーの減少はEuler陽解法の問題であり、本論文において考察される問題点ではない。

そこで、本論文において考察する問題点がより明らかになるように時間刻みをさらに細かくとった。時間刻みを 1.0×10^{-2} とすると、Euler陽解法によるエネルギーの誤差は小さくなっている。この結果、 1.0×10^{-2} という時間刻みは、本論文が問題とする球体の接触に伴うエネルギー損失を評価する上で、最大限度の時間刻みであることがわかる。反発係数が0.7であるので、壁面との衝突後には力学的エネルギーは0.49倍になることが理想的である。Case3の計算では、想定どおりの力学的エネルギーが得られているが、Case1, Case2の計算では予期せぬ力学エネルギーの減少あるいは増加が認められた。この力学的エネルギーの減少あるいは増加の原因として、既往のモデルにとって時間刻みがなおも大き過ぎるということも考えられるので、さらに、時間刻みを 1.0×10^{-5} として検証を行った。その結果、時間刻みを 1.0×10^{-2} とした場合と同様の結果が得られた。Case1, Case2の場合では、時間刻みを細かくとっても、ある程度の避けられない誤差が生じることが認められた。時間刻みを 1.0×10^{-5} よりも細かくとるケースは検討されていないが、より細かな時間刻みを用いればその誤差は十分に小さくなる可能性はある。図-8に、球体と壁面の衝突前後の力学的エネルギーの比を比較する。図の上半分は、球体と壁面の最初の衝突であり、下半分は二回目の衝突によるデータである。図中のCX-0YはCaseXにおいて、時間刻

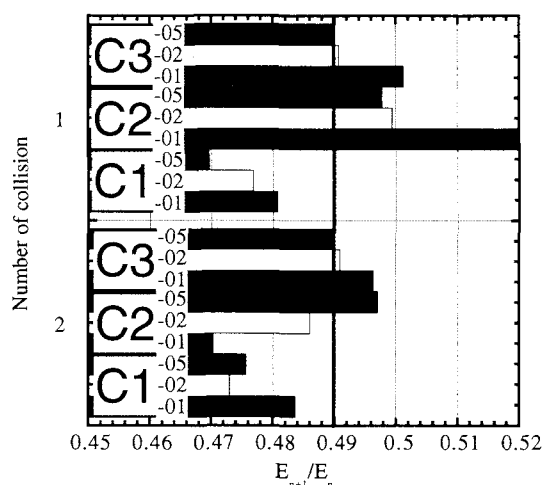


図-8 衝突前後のエネルギー比の比較

みが 1.0×10^{-9} であるときの計算結果であることを示す。各ケースとも、球体が壁面に接触する一つ前の時間ステップにおける力学的エネルギーを E_n 、壁面との接触を終了して最初の時間ステップにおける力学的エネルギーを E_{n+1} としてある。

以上の結果により、本手法は比較的大きな時間刻みを用いても力学的エネルギーの増減を精度良く評価できることが示された。

(2) 球体の最終履歴

次に、落下した球体の最終状態について考察した。本来ならば球体は動かないはずであるが、図-9に示すように本モデルでは、球体は静止状態を再現できていない。これは、絶えず重力と壁面からの抗力を受けるためである。この振動の振幅は、 $g\delta_t^2$ 程度であると見積もられ、その振幅は成長することも減衰することもないことは容易に示される。 g は重力加速度である。本論文では、 $0.98[\text{m/s}^2]$ として計算されている。図-9の横軸は、 p を球体の半径 r で除して無次元化してある。同様に、縦軸も d を球体の半径 r で除してある。振動の中心は本来の球体の位置よりも壁面に近いところとなっている。すなわち、本モデルでは完全に球体同士の重なり合いを防ぐことはできないと考えられる。

なお、図-9に示されているのは、時間刻みが0.1の場合である。

5. おわりに

本論文では、古典力学的な考察により、球体の運動エネルギーが自動的に制御された接触力の評価方法について検討した。

接触中の球体の運動エネルギーをバネに蓄えられるポテンシャルエネルギーと自身の運動エネルギーの和として評価し、その評価に基づいて接触力を求めた。

検証計算においては、本モデルの基本的な特性を調

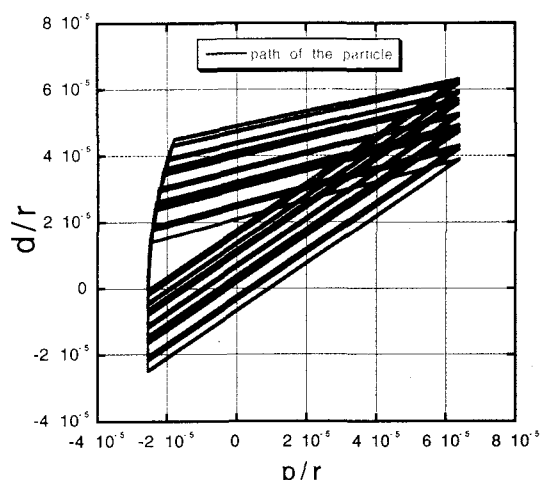


図-9 落下する球体の最終状態

べた。その結果、既存のモデルと比較して、比較的大きな時間刻みを用いても力学的エネルギーが精度良く求められることが示された。また、静止状態を再現できないという性質が示された。今後は、詳細に接線方向の接触力の評価方法および、非球体の粒子への考察も検討する予定である。

参考文献

- 1) P.A.Cundall, and Strack, O.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 2) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 棚津家久: 非圧縮性流体解析に基づく粒子-流体混合系の計算法 (MICS) の提案, 土木学会論文集, No. 740/II-64, pp. 121-130, 2003.
- 3) Ushijima, S. and Nezu, I.: Parallel computation and numerical visualization for non-uniform particles included in gas and liquid flows, *Journal of Visualization*, Vol. 5, No. 4, pp. 327-334, 2002.
- 4) 清水義彦, 岩井明彦, 長田健吾: 個別要素法と流れの数値解析を組み合わせた高濃度平衡流砂場の数値実験, 水工学論文集, 第47巻, pp. 559-564, 2003.
- 5) 清水義彦, 長田健吾: 個別要素法を用いた土石流の構成則に関する考察, 水工学論文集, 第48巻, pp. 901-906, 2004.
- 6) 長田健吾, 清水義彦, 岩井明彦: 個別要素法を用いた流砂解析における問題点に関する考察, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 1033-1041, 2004.
- 7) 田中敏嗣, 石田俊哉, 辻裕: 水平管内粒状プラグ流の直接数値シミュレーション (付着力がない場合), 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 57, No. 534, pp. 456-463, 1991.
- 8) 川口寿裕, 田中敏嗣, 辻裕: 離散要素法による流動層の数値シミュレーション (噴流層の場合), 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 58, No. 551, pp. 2119-2125, 1992.

(2004.9.30 受付)