

ビンガム流体モデルを用いた溶岩流の 流動・堆積過程の数値解析

NUMERICAL STUDY OF SLOW SPREADING OF ISOTHERMAL LAVA

中谷 健¹・由比 政年²・石田 啓³

Takeshi NAKAYA, Masatoshi YUHI and Hajime ISHIDA

¹学生会員 学(工) 石川県庁 道路公社事業部技術課 (〒925-0003 石川県羽咋市寺家町レ48番2)
(金沢大学大学院自然科学研究科博士後期課程)

²正会員 博(工) 金沢大学大学院助教授 自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野2丁目40-20)

³正会員 工博 金沢大学大学院教授 自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野2丁目40-20)

We investigate the influence of terrain on the slow spreading of isothermal lava by numerically solving initial-value problems for a Bingham fluid. Under the lubrication approximation, systematic computation is carried out for two types of terrains: an inclined channel of finite width and a hill on a sloping base. The transient evolution and the final extent of lava are calculated for a dry bed. In the open channel the effects of bank steepness, Bingham parameter, and the total volume on the final extent of spreading are examined in detail. A simple formula is found by synthesis to relate the final elongation ratio of the deposit to these factors. For a hill on an inclined base, both symmetrical and asymmetrical spreading from a hillside are studied. The transient motion of the lava flow is found to follow essentially the direction of local path of steepest descent.

Key Words : Bingham fluid, lava, mudflow, spreading, terrain, channel, hill

1. 序論

高粘性マグマの流動により緩やかに発達する溶岩ドームは、一般に、ニュートン流体とは異なる独特のレオロジー特性を持つことが知られている。このような溶岩流は、粘塑性流体的な挙動を示し、せん断応力が降伏応力を越えない限り、斜面上であっても静止状態を維持することができる。また、この他にも、粘性係数が温度に対して強く依存すること、さらには、冷却により表面から固化が発生すること等も非ニュートン流体的な特徴として挙げられる。こうした特徴を持つ溶岩流の流動メカニズムの基本特性を明らかにすることは、防災上きわめて重要である(例えば、山下ら1990, Griffiths 2000, Balmforthら2000)。

溶岩流の流動過程において、温度変化が小さく、固化が発生しない場合、つまり、等温変化としての扱いが可能な場合を考える。このような条件下においては、流体運動は主に粘塑性な特性に支配される。粘塑性流体モデルの内、最も代表的なものは、ビンガム流体モデルである。しかしながら、ビンガム流体の非線形構成関係が

理論的解析を困難とするため、その自由表面流れに関する従来の研究は、一様勾配斜面を対象としたものが大部分であった(例えば、Coussot 1997, Meiら2001)。現実には、溶岩流の流動過程は、地形の三次元形状から強い影響を受ける。これに対し、任意地形上におけるビンガム流体の流動を論じた理論的研究は少ない。

近年、Mei & Yuhi (2001), Yuhi & Mei (2004)は、ビンガム流体の遅い流れに対して長波近似を適用し、任意地形上におけるビンガム流体の三次元流れを解析するための理論および数値モデルを開発して、各種の流体場の時間発展の様子や最終堆積形状の特徴を検討した。本研究では、著者らが開発してきたこれらの理論・数値モデルを用いて、放物線状の断面形を有する傾斜チャネル、および、丘陵地形中腹部からの溶岩流の流動・堆積過程を解析し、ビンガムパラメータや地形形状が、流れの進行方向や最終到達範囲に及ぼす影響を数値的に解析する。

2. 数値解析モデル

(1) 基礎方程式

自由表面を有するビンガム流体の遅い流れに対する長

波近似を考える。図-1に示すように、水平面より角度 θ 傾斜させて x 軸をとり、 y 軸を横方向に、 z 軸を x 軸および y 軸と直角となるようにとる。流体の自由表面および底面地形を、それぞれ、 $z=h(x,y,t)$ および $z=H(x,y)$ により表す。流れの代表深さと代表長さをそれぞれ D および L とし、長波近似 ($D/L \ll 1$) を用いる。堆積直前の泥流や緩やかに発達する溶岩ドームのように、高粘性の遅い流れを考えると、レイノルズ数 ($Re = \rho u D^2 / \mu L$)、フルード数 ($Fr = u^2 / g D$) は、 D/L 程度のオーダーで小さいと仮定する。深さ方向に積分された質量保存則は、無次元形で以下のように与えられる (Mei and Yuhi 2001)。

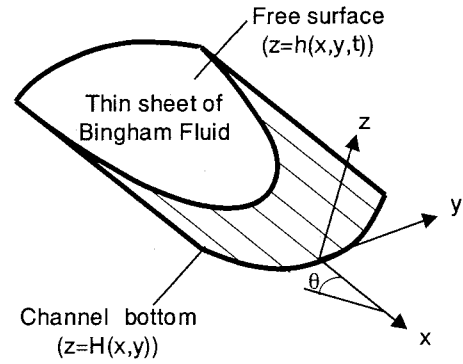


図-1 三次元流れの座標系

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right) F \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{\partial h}{\partial y} F \right] = S(x, y, t) \quad (1a)$$

ここで

$$F = \frac{1}{6} (3h - h_0 - 2H)(h_0 - H)^2 \quad (1b)$$

であり、 h_0 は降伏曲面の位置を、 $S(x,y,t)$ はソースからの流体の供給を表す。ここで、各無次元変数の定義は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= D \cot \theta (x', y') \\ (z, h, h_0, H) &= D (z', h', h_0', H') \\ t &= \frac{\mu \cos \theta}{\rho g D \sin^2 \theta} t' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 g, ρ, μ は、それぞれ、重力加速度、流体の密度および動粘性係数を示す。長波近似による理論展開が有効となるためには、傾斜角 θ が微小である必要がある。

方程式(1)は、底面上におけるせん断応力値が降伏応力を超過し、流れが存在するための条件、すなわち、以下の不等式が成立する領域で有効となる。

$$(h - H) \left[\left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(- \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} > \alpha \quad (3)$$

ここで、ビンガムパラメータ α は、次式で定義される。

$$\alpha = \frac{\tau_0}{\rho^* g^* D^* \sin \theta} \quad (4)$$

α は、流体の持つ非ニュートン流体的特性の尺度であり、 $\alpha=0$ の極限が、ニュートン流体に対応する。

降伏曲面 $z=h_0(x,y,t)$ の位置は、全せん断応力が降伏応力と等しくなる条件から次式により決定される。

$$(h - h_0) \left[\left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(- \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = \alpha \quad (5)$$

降伏曲面より上部では、流速は深さ方向に一様となり、いわゆるプラグ流れが存在する。

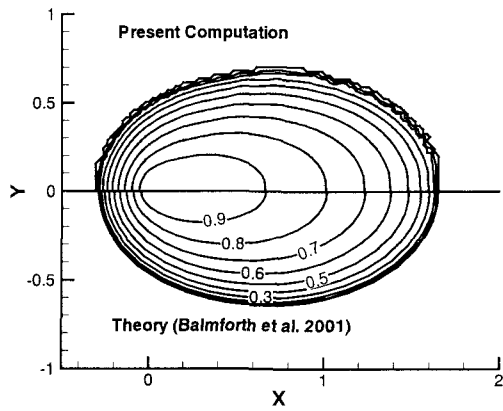
(2) 数値解析法

流体運動の時間発展を計算するために、有限体積法に基づく数値解析スキームを適用した (Mei & Yuhi, 2001)。空間の離散化に対してスタガード格子系を導入し、すべての空間導関数を二次精度の中央差分で近似した。時間方向の離散化においては、ADI法を用いた。数値計算は、固定格子で行い、流体部分の先端位置を計算過程の各ステップで更新しながら解析を行った。初期に底面上に流体は存在しないものとし (Dry Bed)、時間 $0 < t < T_0$ の間、矩形のソース領域から、体積 V_0 の流体を一定率 ($Q_0 = V_0 / T_0$) で緩やかに供給して、流動・堆積過程を計算した。以下では、ソース領域の中心座標を (x_s, y_s) と表す。なお、ソース領域の長さおよび幅は、格子幅の3倍と十分小さく設定している。計算で使用した格子幅の代表値は、 $\Delta x = \Delta y = 0.025$ および $\Delta t = 0.001$ である。

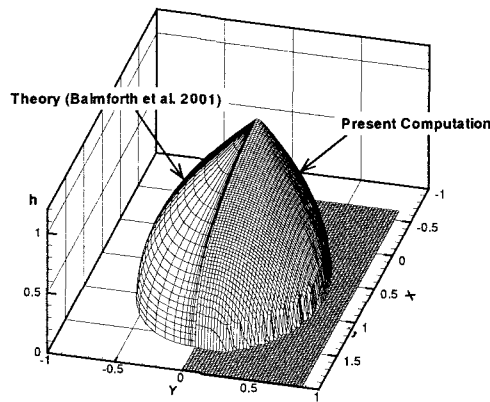
(3) 数値スキームの検証

数値スキームの有効性を検証するために、一様斜面上でのビンガム流体の準静的運動の数値解析を行い、その結果をBalmforthら(2003)による特性曲線理論と比較した。準静的な釣り合い状態を模擬するために、流体の供給率を非常に小さく ($Q_0 = 10^{-4}$) 設定し、 $t=0$ から $t=10^4$ までソース領域から流体の供給を行った。流体の供給を停止した後、十分に時間が経過して、最終的平衡状態に達した時の表面形状を理論解と比較した例を図-2に示す。数値解析結果と理論解はきわめて良好に一致している。

次に、一様勾配斜面上における粘塑性流体の流動・堆積を検討したCoussotら(1996)の実験結果と本数値スキームによる計算結果を比較・検討した。計算に際して、実験で用いられた流体の応力ひずみ曲線に対して最小二乗近似を適用して、降伏応力および粘性係数の値を決定した。今回の比較に用いた三つのケースにおける、流体特性を表-1に示しておく。図-3より、最終堆積形状の外縁位置が、実験結果と計算結果で良く一致していることがわかる。なお、鉛直断面形状に関しても、数値結果は実験結果を良く再現することを確認した。



(a) 等高線表示



(b) 三次元表示

図-2 Balmforthら (2003)の理論解との比較

表-1 実験に使用された流体の特性

	Case-1	Case-2	Case-3
τ_0 (Pa)	48.9	29.2	79.8
μ (Pa.s)	66.1	37.8	81.9
$h_c = (\tau_0 / \rho g \sin\theta)$ (cm)	3.48	2.16	2.55

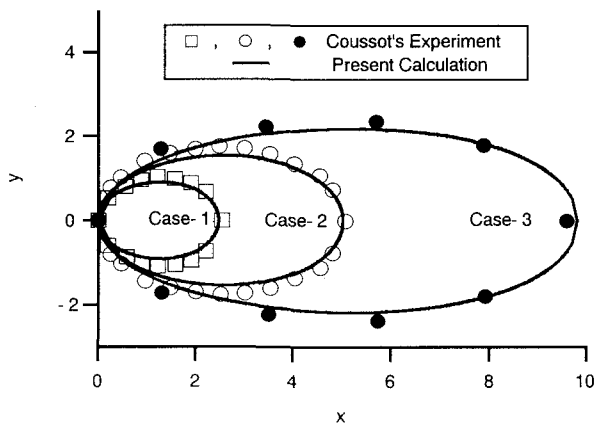


図-3 Coussotら (1996)の実験結果との比較

3. 傾斜チャンネル内における溶岩流の運動

水平面に対して中心軸が角度 θ だけ傾いた傾斜チャンネルを考える。横断面形状として、放物線形状のものを想定すると傾斜座標系での断面形状は次式で与えられる。

$$H(y) = my^2 \quad (6)$$

ここでは、 m の値を0.5,1.0,1.5,2.0と四通りに設定し、流体の無次元体積およびビンガムパラメータをそれぞれ、 $V_0=0.5\sim 20$ 、 $\alpha=0.3\sim 1$ の範囲で変化させて体系的な解析を行った。ソース領域の中心座標を $(x_s, y_s)=(0,0)$ とし、流体の無次元供給率は $Q=0.1$ とした。流体の供給が停止された後、最終的な平衡状態に達するまで、十分長い時間($O(10^3)\sim O(10^4)$)に渡って計算を実行した。

傾斜チャンネル内におけるビンガム流体の流動・堆積過程を解析した例を図-4に示す。計算初期の非常に短い期間では、流体運動に対する底面形状の影響は小さく、流体は、全方向に均等に近い形で流動する。ただし、地形の影響(重力の影響)は、その後すみやかに顕著となり、上方への流動は急速に減速して、下流方向への運動が支配的となる。流体外縁部の形状は楕円状になり、後方寄りの位置で最大幅を取る。後端部近くでの表面勾配は、きわめて急峻となっている。この段階では、自由表面の鉛直横断面形状は、任意地点において上に凸であり、流体はソースから放射状に広がる形となっている。ソースからの供給が停止された後、後部付近の流れ方向は変化し、中央部へ向かう流れが誘起される。この結果として、後部領域における鉛直断面形状は上に凹となる。一方、前方領域の流体外縁形状は細長く伸びた舌状となる。十分に長い時間が経過すると、流体は運動を停止するが、この時の前方領域の最終形状は、Mei & Yuh (2001)によるダム崩壊流れと類似したものとなっている。

ビンガム流体の場合、流体供給が停止された後、十分長い時間が経過すると、底面せん断力が降伏応力と釣り合うようになり、流体は静止して、最終の平衡形状が実現される。この時の最終堆積形状の長さ L_x および幅 L_y が、流路の断面形状パラメータ m に対してどう変化するかを検討した。その結果を図-5に示す。予想されるように、 m が増大し、側方の斜面勾配が急になるにつれて、 L_x が増大し、逆に、 L_y は減少する。ここで、最終堆積長 L_x は流体体積 V_0 に強く影響を受ける。一方、 L_y に関しては、断面形状の影響は L_x の場合よりも小さく、特に、 m が十分大きな値を取る場合には、 L_y は V_0 にほとんど依存しないようになる。

体系的な数値解析を実施した結果に基づいて、最終平衡形状の縦横比 L_x/L_y の解析を行い、以下のような回帰式を経験的に算出した。図-6から、この回帰式は、今回の解析の範囲内で十分な精度を有することが分かる。

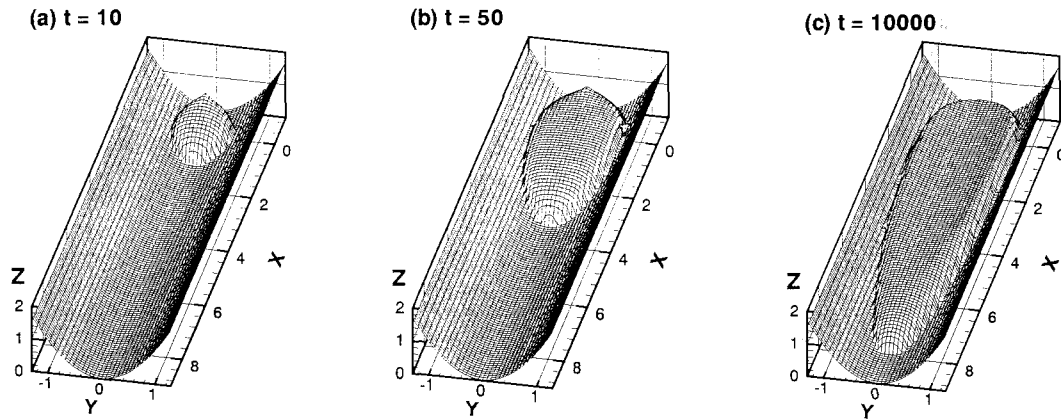


図-4 チャンネル内における表面形状の時間変化 ($m=1, V_0=10, \alpha=1$)

$$L_x / L_y = 0.52V_0(m + 0.19)\left(\frac{1}{\alpha} - 0.45\right) + 1 \quad (7)$$

さらに、流体体積 V_0 と最終形状の諸元 L_x, L_y および h_{max} (最大堆積深) との関係を検討した例を図-7に示す ($\alpha=1$ の場合)。この結果が、 m の値に依存せず、一本の直線上に載ってくることは興味深い。ここで、最小二乗法により得られた回帰式は以下のように表される。

$$V_0 = 0.66L_xL_yh_{max} - 0.52 \quad (8)$$

V_0 が十分に大きい時、上式は下記のように書ける。

$$V_0 = 0.66L_xL_yh_{max} \quad (9)$$

式(9)の有次元形も同じ形となる。なお、この関係式は当初 $\alpha=1$ の場合について得られたものであるが、この結果は、 $\alpha=0.3\sim 1$ の範囲で有効であることを別途検討した結果から確認している。

4. 丘陵地形上を流下する溶岩流の運動

次に、丘陵地形上を流下する溶岩流の運動を検討した。ここで丘陵地形を式(10)によりモデル化している。 H は原点 $(x, y) = (0, 0)$ において最大値 A をとり、 x あるいは y が大きくなるにつれてゼロに近づく。丘陵地の水平面に対する勾配は、原点および無限遠方でゼロ (すなわち傾斜座標系での xy 面と平行) となる。

$$H(x, y) = \frac{A}{1 + Bx^2 + By^2} \quad (10)$$

流体の無次元供給率を $Q=0.1$ 、体積は $V_0=10$ とし、ビンガムパラメータ α を $0.3\sim 1$ の範囲で変化させて検討を行った。 $A=10, B=0.1$ に対する解析結果を以下に示す。

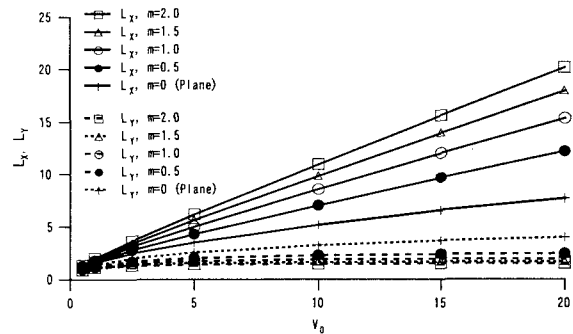


図-5 最終長さと流体体積との関係 ($\alpha=1$)

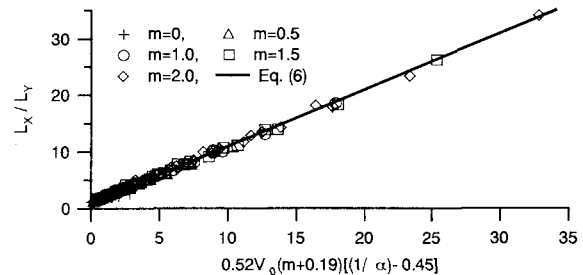


図-6 流体および底面形状特性と最終縦横比との関係 ($m=0\sim 2, V_0=1\sim 20, \alpha=0.3\sim 1$)

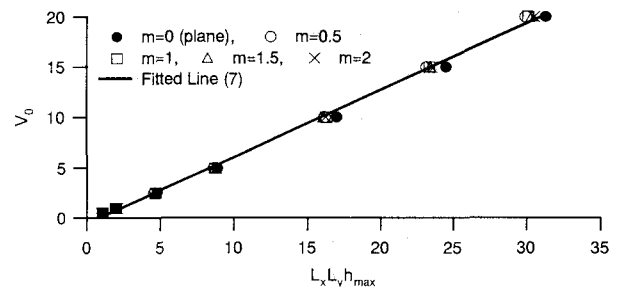


図-7 流体体積と最終平衡形状諸元との関係 ($m=0\sim 2, V_0=1\sim 20, \alpha=1$)

(1) 対称流れ

ソース中心点が x 軸上にある場合、流体運動は y 軸に関して対称となる。この場合の流体運動の解析例を図-8に示す。流体運動の主方向は x 方向であるが、底面地形の y 方向勾配によって、徐々に側方への広がりが拡大する。時間が経過するにつれて、流体層は延伸して薄くなり、中央部における深さは、 α とほぼ等しくなる。ビンガムパラメータが他の値を取る場合や、地形パラメータ A, B を変化させた場合も定性的に同様の結果が得られた。

(2) 非対称流れ

ソース領域が x 軸上にない場合、流体運動は左右非対称となる。図-9は、その典型的な例を示したものである。ソース位置を変化させた場合でも、定性的に同様な結果が得られる。また、流体外縁部の時間変化を解析した結果を図-10に示す。初期段階では、流体は主に側方向へ流下する。時間が経過するにつれて、流下は徐々に緩やかとなり、 x 軸正方向へ流向を転じるようになる。 α の値が大きければ、流体の拡散範囲は狭くなるが、流下方向に関しては同様な特徴が見られる。

次に、流体の流下方向と底面地形、ビンガムパラメータの関係について検討する。まず、降伏曲面上のプラグ流れの速度は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_p(x, y, t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right) (h_0 - H)^2, \\ v_p(x, y, t) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial h}{\partial y} \right) (h_0 - H)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

つまり、表面流速は水平面に対する表面勾配に比例する。一方で、水平面を基準とした場合の底面地形の最急降下方向は、以下のベクトルによって与えられる。

$$\left(1 - \frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (12)$$

流動過程において、自由表面の形状は、外縁部周辺を除く広い領域に渡って、底面形状と平行に近い形となる。この結果、図-10に見られるように、溶岩流の運動は基本的に底面地形の最急降下方向に従う。これは、ここで考慮された条件下では、慣性の影響が小さいためである。さまざまな α の値における最終到達範囲を比較した結果を図-11に示す。流体の最終到達範囲は α の値に強く影響を受けるが、堆積に至るまでの流動の方向は、ビンガムパラメータすなわち流体の塑性度の影響を受けず、地形からほぼ一意に決定されることが分かる。

5. 結論

本論文では、ビンガム流体モデルに基づく体系的な数値解析を行って、各種地形上における溶岩流の流動・堆

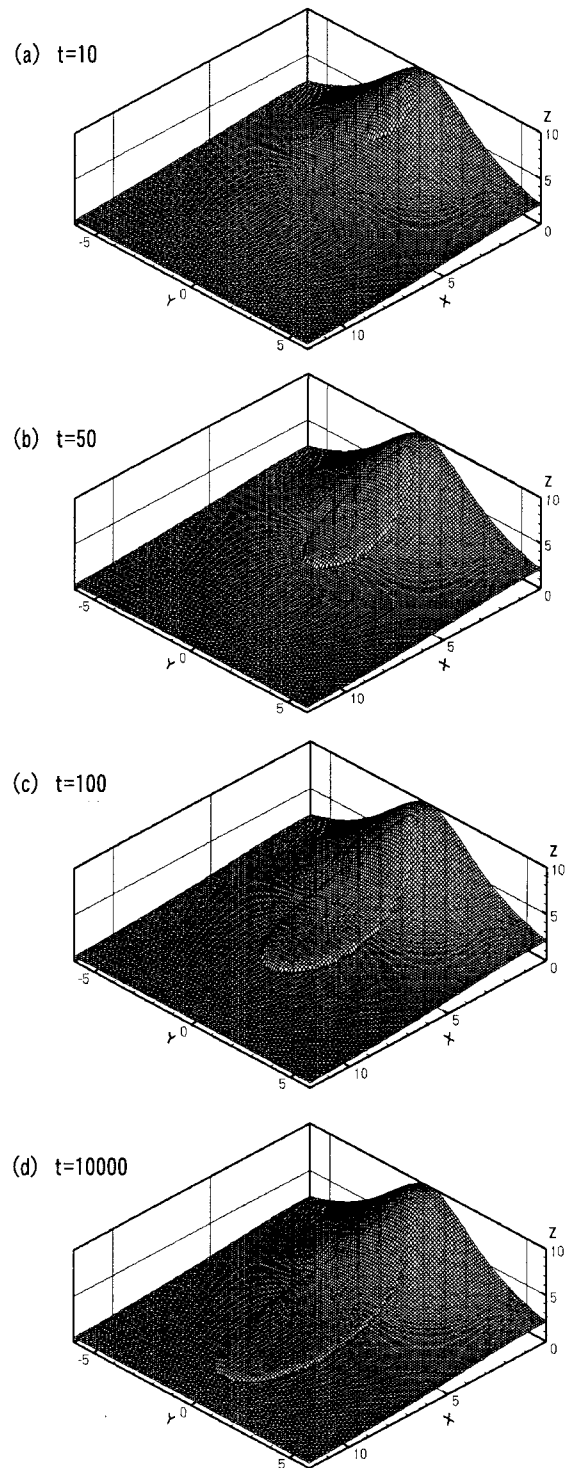


図-8 表面形状の時間変化 (対称流れ, $\alpha = 0.6$)

積過程を解析した。まず、一様斜面上における溶岩流 (ビンガム流体) の最終堆積形状に関して、既往の理論および実験結果と数値解析モデルによる結果を比較し、非常に良好な一致を確認した。次に、傾斜チャンネル内を流下する溶岩流の運動特性を解析し、流動過程の特徴を検討するとともに、最終堆積形状の縦横比と流路断面形状、流体体積、およびビンガムパラメータとの間に成立する関係式を新たに提示した。さらに、丘陵地形中腹部

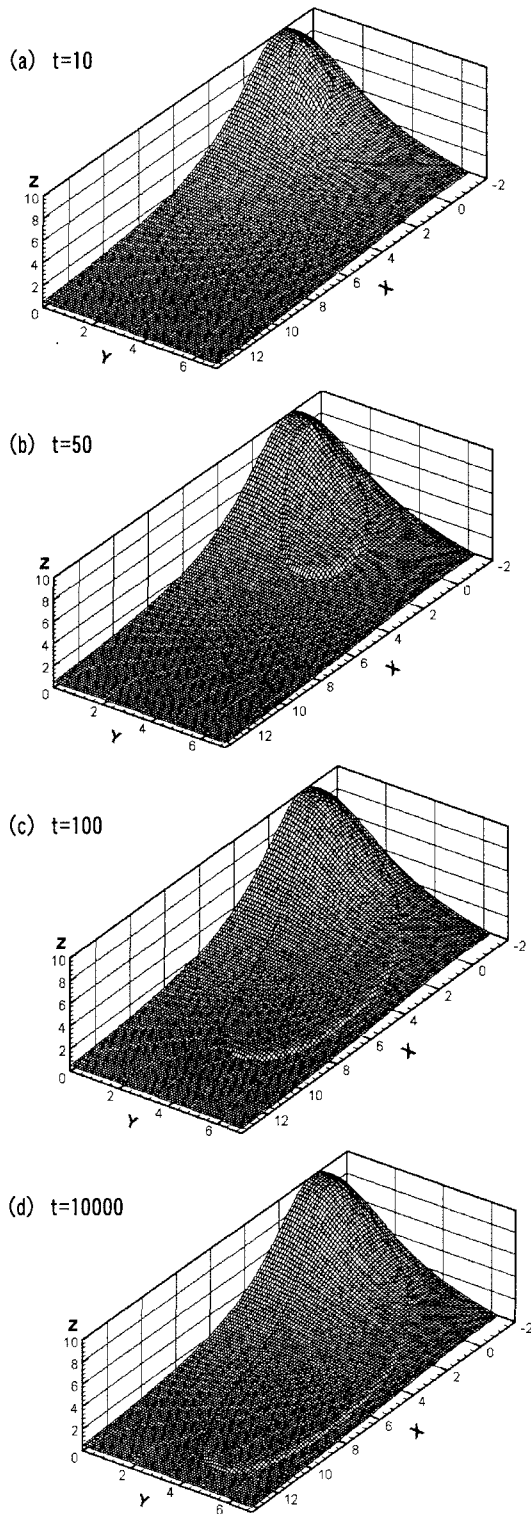


図-9 表面形状の時間変化 (非対称流れ, $\alpha=0.3$)

から流出する溶岩流の流動・堆積過程を解析し、堆積に至るまでの流動の方向は、ビンガムパラメータの影響を受けず、底面地形の最急勾配方向からほぼ一意に決定されることを示した。

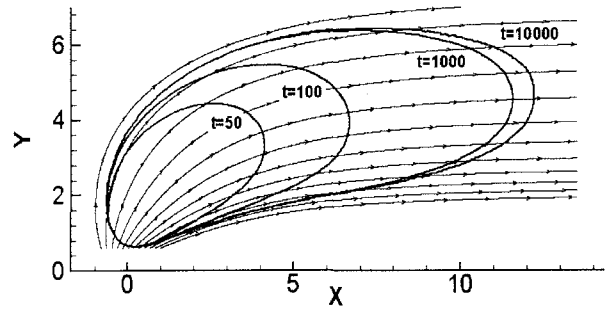


図-10 流体外縁位置の時間変化と最急降下方向

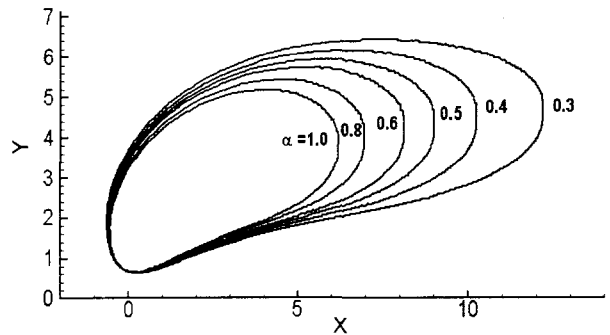


図-11 流体の最終到達範囲とビンガムパラメータの関係

謝辞：本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費（課題番号：15560442）の補助を受けた。また、研究の初期段階で、井出直樹君、印牧史人君（当時金沢大学大学院生）に協力していただいた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 山下伸太郎, 宮本邦明, 大原正則, 緒統英章, 水上高久: 溶岩流の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第34巻, pp.391-396, 1990.
- 2) Griffiths, R.W.: The dynamics of lava flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.32, pp.477-518, 2000.
- 3) Balmforth N.J., Burbidge, A.S., Craster, R.V., Salzig, J. & Shen, A.: Visco-plastic models of isothermal lava domes, *J. Fluid Mech.*, Vol.403, pp.37-65, 2000.
- 4) Coussot, P.: *Mudflow Rheology and Dynamics*, IAHR/AIRH Monograph, Balkema, Rotterdam, 1997.
- 5) Mei, C.C., Liu, K.F. and Yuhi, M.: Mud Flows - Slow and Fast, in "Geomorphological Fluid Mechanics", (Eds): Provencale, A. & Balmforth, N., Lecture Notes in Physics, No.582, Springer-Verlag, pp.548-577, 2001.
- 6) Mei, C.C. & Yuhi, M.: Slow flow of a Bingham fluid in a shallow channel of finite width, *J. Fluid Mech.*, Vol.431, pp.135-159, 2001.
- 7) Yuhi, M. & Mei, C.C.: Slow spreading of fluid-mud over a conical surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 519, pp. 337-358, 2004.
- 8) Balmforth, Craster, R.V., and Sassi, R.: Shallow viscoplastic flow on an inclined plane, *J. Fluid Mech.*, Vol.470, pp.1-29, 2003.
- 9) Coussot, P., Proust, S. & Ancey, C.: Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.66, pp.55-70, 1996.

(2004.9.30 受付)