

グリッドレス離散渦法を用いた開水路気泡流れの数値計算

NUMERICAL SIMULATION OF OPEN-CHANNEL FLOWS INCLUDING BUBBLE PLUMES
BY USING A GRIDLESS DISCRETE VORTEX METHOD

山上路生¹・瀬津家久²

Michio SANJOU and Iehisa NEZU

¹正会員 博(工) 京都大学大学院助手 社会基盤工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻 (同上)

It is very important to reveal the hydrodynamic properties in open-channel flows including the rising-bubbles, when we consider effective control techniques of aeration in actual rivers, sedimentation basins and reservoirs. However, such a bubbly open-channel flow has very complicated phenomena, and thus there are few previous studies that have been tried by high-accurate measurements and numerical simulations. Therefore, in this study, the bubbly open-channel flow was calculated by using a discrete vortex method (DVM). The DVM is a gridless model and applicable to multi-phase flows such as air-induced flows. As the numerical results, it was found that the present model was able to predict the hydrodynamic properties observed in the experimental data.

Key Words : Discrete vortex method, Bubble plume, Open-channel flows, Air-induced two-phase flow

1. はじめに

気泡を含む開水路流れの水理特性を明らかにすることは、実河川や人工水路における高効率の曝気浄化システムの実現や導入を考える上で大変重要である。最近、著者らはPIV法を用いて開水路気泡流れを乱流計測した。流速分布や乱れ特性を実験的に考察するとともに、気泡の上昇特性や水理特性の変化を明らかにした¹⁾。本研究では、開水路気泡流れを対象とする計算モデルを提案し、PIV実験データと比較して、水理特性を数値的に考察する。

静水中の上昇気泡に関する数値計算はこれまででも多くの既往研究があり、貴重な知見がえられている。気泡径が小さな場合は気泡を気相濃度として扱えるが、大きな場合には個々の気泡をラグランジェ的に追跡解析するのが一般的である。このような混相流れを差分解析する場合には計算格子が必要であるから、VOF法²⁾やMARS法³⁾などの界面計算モデルを導入しなければならない。しかしながら、界面境界あるいは壁面境界形状が複雑な場合や、その形状が時間変化する場合には、計算格子の扱いが難しくなる。

そこで本研究では、計算格子を必要としないグリッドレスモデルをベースにした開水路気泡流れの計算方法を提案する。計算格子を使用しない計算方法としては、粒子法や渦法があげられる。粒子法⁴⁾では計算領域をグリッド分割するかわりに、複数の粒子を配置して個々の粒子をラグランジェ追跡することで、流体運動を解析するものである。メッシ

ュが不要であるため、大変形をともしう界面流れや混相流れに適用できるメリットがあり、新しい数値計算法として注目されている。水理学分野では、後藤ら⁵⁾が固相内部の粒子間干渉を考慮した計算モデルを提案し、泥塊が水面へ衝突する複雑な自由水面変化を有する現象を再現している。

一方、渦法も粒子法と同様に計算メッシュが不要という大きな利点がある。渦法は主に2次元のせん断現象の再現に用いられてきたが、現在では3次元モデルの開発が行われ、各種の乱流シミュレーション⁶⁾が試みられている。最近ではBernard&Dimas⁷⁾が境界層流れの組織乱流構造を再現している。この他ターボ機械などの複雑境界を有する流体機械や設備の設計への実用化も進んでいる⁸⁾。またメッシュ不要の長所をいかして固液あるいは気液混相流の計算例⁹⁾も多い。

そこで本研究でも離散渦法をベースに鉛直2次元場の開水路気泡流れの数値モデリングを行う。離散渦法では放出渦と境界固定渦を組み合わせる流れを再現するが、前半部では開水路流れの平均主流速分布を精度よく再現するための固定渦の設置法と離散渦要素の放出方法を提案する。

後半部では、底面からの気泡プルームを含む開水路流れを対象に、上昇気泡のモデリングを行うとともに非定常な気液混相場を数値計算する。また計算結果を実験値と比較して、本モデルの有用性や今後の課題を整理する。

2. 計算方法

(1) 離散渦法の基礎方程式

離散渦法では、計算領域に微小渦要素を放出させ、それらがもつ誘起速度の線形和から、流体の瞬間流速ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ を計算する。各渦要素がもつ渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ の値は式(1)の渦度方程式によって時間的に変化する。

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

ここで ν は動粘性係数である。右辺第1項は伸縮・回転項で、第2項は粘性拡散項である。一般に渦法では粘性拡散を無視して式(1)を計算し、 $\boldsymbol{\omega}$ を更新した後に拡散効果を別の形で取り入れる。拡散効果のモデル化にはいくつかの方法が提案されているが、ここではよく用いられているコアスプレディング法¹⁰⁾を適用する。各微小渦要素は半径 r の核が与えられ、 r を時間とともに増加させる。時間ステップ t における r の増加分は式(2)で表される。

$$\Delta r = \frac{a^2 \nu}{2r} \Delta t \quad (2)$$

a は直線渦系に対するNavier-Stokes方程式の厳密解から得られる定数であり $a = 2.242$ となる。

各々の渦要素 o は周囲流体に対して誘起速度をもつ。渦要素から対象計算点までの位置ベクトルを $\mathbf{R}$ 、渦要素の渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_o$ と同一方向の単位ベクトルを $\mathbf{k}_o$ 、渦要素内の循環を $\Gamma_o \equiv \boldsymbol{\omega}_o \cdot (\pi r_o^2)$ と定義すると誘起速度 $\mathbf{u}_o$ は次のように与えられる。

$$\begin{cases} |\mathbf{R}| > r_o \text{ のとき, } \mathbf{u}_o = \frac{\Gamma_o (\mathbf{k}_o \times \mathbf{R})}{2\pi |\mathbf{R}|^2} \\ |\mathbf{R}| \leq r_o \text{ のとき, } \mathbf{u}_o = \frac{\Gamma_o (\mathbf{k}_o \times \mathbf{R})}{2\pi r_o^2} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)は渦核内部では強制渦とすることを意味しており、これにより計算精度の低下を防ぐことができる。複数の微小渦要素が存在すれば、各々がもつ誘起速度の線形和として任意地点の流速が与えられる。渦要素自身も他の渦要素からの誘起速度を受け、時間経過とともに移動する。他渦要素からの誘起速度の和を $\sum \mathbf{u}$ とすると、 $t + \Delta t$ の時間ステップでの渦要素 o の位置ベクトル $\mathbf{X}_o^{t+\Delta t}$ は式(4)で表される。

$$\mathbf{X}_o^{t+\Delta t} = \mathbf{X}_o^t + \left(\sum \mathbf{u} \right) \Delta t \quad (4)$$

(2) 開水路流れのモデル化

ここでは上で述べた渦法の基礎解法を開水路流れに適用する方法を提案する。特に計算領域内部において開水路の主流速分布を再現するためには、流入出、底面および水面の境界部の扱いが重要である。図-1に本計算の座標系と境界条件を示す。計算は2

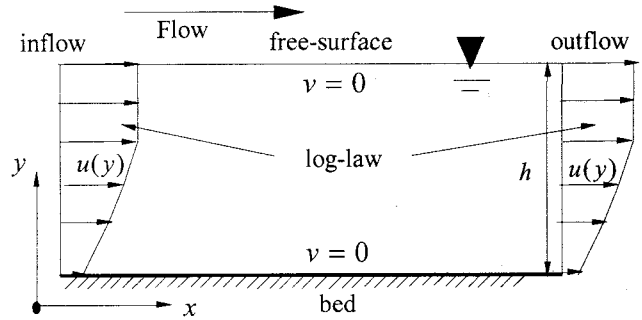


図-1 境界条件の説明図

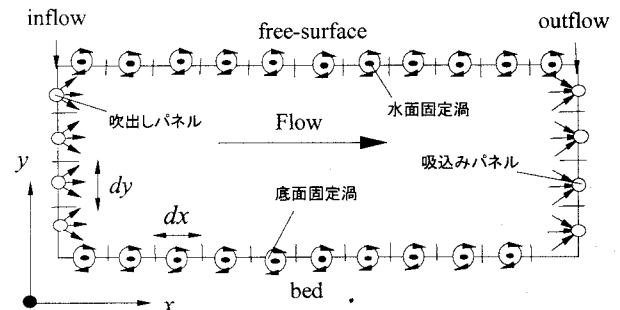


図-2 固定渦パネルの配置図

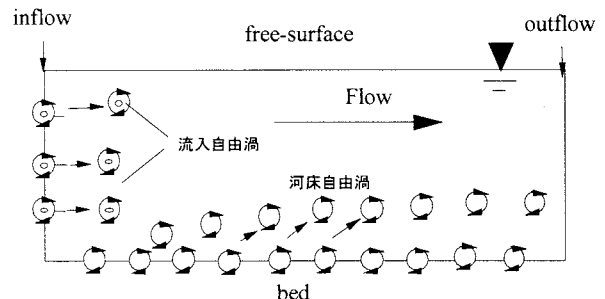


図-3 放出渦の配置図

次元場で、 x および y はそれぞれ主流方向と鉛直方向を表す。本計算では計算領域の流下長さを水深 h の10倍とした。また各方向に対応する瞬間流速成分を u および v 、時間平均した流速成分を U および V とする。一般に渦法では主流が卓越した流れを計算する場合、無限遠方からの一様流をポテンシャル成分として用いるが、この方法では境界層流れや開水路流れの主流速分布 $U(y)$ を正確に求めるのは難しい。そこで、本計算では図-1のように流入境界に対数則分布を与えた。次にこれらの条件を満足するために、図-2に示すように各境界表面を間隔 dx および dy の複数パネルに分割して、各パネルの中心に固定渦、吹出しおよび吸込みパネルを配置する。吹出し・吸込みパネルは、ある点からの放射線状の流体の流入出を表す。吸込み・吹出し強さを σ とすると、パネルから ΔR だけ離れた計算点での単位幅流量 $q(\Delta R)$ は式(7)で与えられる。

$$q(\Delta R) = \frac{\sigma}{2\pi \Delta R} \quad (5)$$

パネル位置と対象計算点の幾何関係を考えれば、

$q(\Delta R)$ を用いて吹出し・吸込みパネルからの誘起速度ベクトル $\mathbf{u}_q$ が計算できる。また σ が正値であれば吹出し、負値であれば吸込みパネルである。本計算では図-2に示すように流入境界に吹出し・吸込みパネルを配置した。

一方で底面境界および水面境界には固定渦パネルを配置する。固定渦がもつ循環値を Γ_e とすると、周囲流体におよぼす誘起速度ベクトル $\mathbf{u}_e = (u_e, v_e)$ は式(3)で計算される。さて流入境界部には対数則を仮定するので、流速シア $\partial u / \partial y$ が発生する。また底面境界に滑りなし条件 $u(y=0)=0$ を与えると、同様に $\partial u / \partial y$ が発生する。したがってこれらの境界面からは、速度差に対応する渦要素を放出する。流入境界では、2つの吹出し・吸込みパネル間の中点から放出させる。この流入放出渦の循環 Γ_{in} は式(6)で与えられる。

$$\Gamma_{in} = 0.5(\Delta u)^2 \Delta t \quad (6)$$

ここで Δu は主流速の鉛直方向の差で対数則から算出する。 Δt は放出時間間隔である。 Γ_{in} から周囲点への誘起速度ベクトル $\mathbf{u}_{in}$ が計算される。

一方、底面からの放出は、すべりなし条件を満足させるためKamemotoの方法¹¹⁾を適用した。この方法では図-4に示すように路床近傍に厚み y_{bed} をもつ底面パネルに位置する渦シートを考える。パネル上下流端 i および $i+1$ におけるシート上端 $y = y_{bed}$ の流速 u_{bed} を計算し、底面 $y=0$ から y_{bed} までのシート内部領域には線形分布を仮定する。これから式(6)を用いて底面放出渦の循環 Γ_{bed} が計算でき、式(3)から誘起速度 $\mathbf{u}_{bed}$ が算出できる。また $y=0$ で鉛直流速 $v=0$ の条件を考えると渦シート内における連続式から $y = y_{bed}$ での鉛直速度 v_c が求まる。さらに放出渦は自身の粘性拡散によってもシート上端から流れ場へ流出するものと考え、この広がり速度を v_d とすると、 v_d は次式で計算される¹⁰⁾。

$$v_d = \frac{c^2 v}{2y_{bed}} \quad (7)$$

ここで $c=1.136$ である。結局、 dt の間に渦シートが上端 $y = y_{bed}$ から $\Delta y = (v_c + v_d)dt$ だけ上昇し、この増加分に等価の渦を底面放出渦とし、 $y = y_{bed} + \Delta y$ を放出点とする。したがって底面放出渦のもつ面積は $A = dx \cdot \Delta y$ であり、渦半径の初期値は A から計算される。渦半径は式(2)によって時間的に増大させた。

領域内部の任意点の流速成分 $\mathbf{u}$ は、上述した境界上に配置した吸込み・吹出しパネル、固定渦要素、流入放出渦および底面放出渦からの誘起速度の線形和として計算される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_{in} + \mathbf{u}_{bed} \quad (8)$$

ここで放出渦の循環 Γ_{in} および Γ_{bed} は式(6)で計算されるから $\mathbf{u}_{in}$ および $\mathbf{u}_{bed}$ は既知である。一方、境界固定渦の循環値および吹出し・吸込み強度は未知である。したがってこれらを未知変数として、図-1に示す流入出面での対数則条件、底面および水面での $v=0$ 条件を満足するように、線形連立方程式を

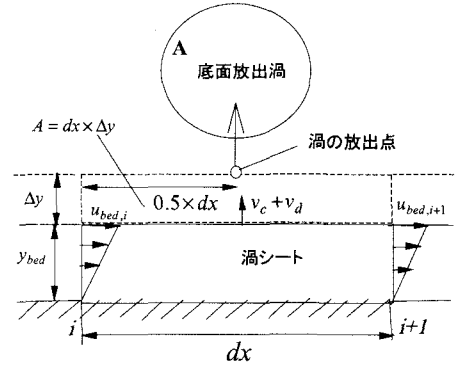


図-4 底面渦シートと放出渦

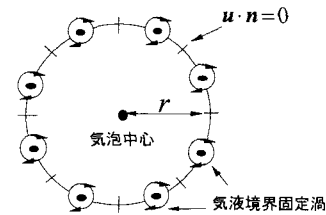


図-5 底面渦シートと放出渦

導き、これをガウス法で解けば、任意地点での流速ベクトルが算出される。

(3) 上昇気泡のモデル化

ここでは流れ場に存在する上昇気泡の取り扱いについて述べる。気泡は円形でモデル化し、変形しないものと考え、移動境界面として扱える。渦法は計算メッシュを用いないから、このような移動境界面を比較的簡単にモデル化できる長所がある。

本計算では図-5のように気泡表面を複数のパネルに分割して固定渦を配置した。ここでは24分割した。気泡変形がゼロという条件から気泡表面における水流の流速ベクトルの法線成分がゼロになるよう固定渦の循環値を決める。具体的には前節で述べた境界固定渦の循環と同様にガウス法で求める。また気泡表面の固定渦が周囲流体におよぼす誘起速度ベクトル $\mathbf{u}_{bub}$ を計算して、それらを(8)式に加えることで開水路気泡流れの流速分布が算出される。

つぎに気泡の運動特性について述べる。一般に気泡の運動方程式は次のように与えられる。

$$\rho_b \frac{d\mathbf{u}_b}{dt} = -(\rho_l - \rho_b)\mathbf{g} - \mathbf{m} \quad (9)$$

ここで ρ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{g}$ および $\mathbf{m}$ は、それぞれ密度、速度ベクトル、重力加速度ベクトル、気泡に作用する外力ベクトルを表す。また添え字の b および l は気相（気泡）と液相（水）を示す。気泡に作用する外力には、仮想質量力、抗力、揚力および壁面潤滑力などがあげられるが、ここでは仮想質量力 $\mathbf{m}_{vm}$ と抗力 $\mathbf{m}_d$ についてのみ考慮すると

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{vm} + \mathbf{m}_d \quad (10)$$

となり、 $\mathbf{m}_{vm}$ と $\mathbf{m}_d$ は、それぞれ次のようになる¹²⁾。

$$\mathbf{m}_{vm} = C_{vm} \rho_l \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + (\mathbf{u}_l \cdot \nabla) \mathbf{u}_l \right) - \frac{d\mathbf{u}_b}{dt} \right] \quad (11)$$

ここで C_{vm} は実験定数で、 $C_{vm} = 0.5$ である。

$$\mathbf{m}_d = \frac{3}{4r} C_D \rho_l |\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_l| (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_l) \quad (12)$$

C_D は抗力係数で、本研究では式(13)で示される静止液中の単一気泡の実験値を与えた。

$$C_D = \frac{8}{3} \frac{E_o}{E_o + 4} \quad (13)$$

E_o は表面張力 δ と浮力の比を表すEotvos数であり、気泡径を r_b とすると次式で定義される。

$$E_o = \frac{g(\rho_l - \rho_g) r_b^2}{\delta} \quad (14)$$

(4) 計算フロー

以上の計算アルゴリズムをまとめると以下のようになる。流入出、底面および水面境界上には固定渦パネルや吹出し・吸込みパネルを設置する。さらに流入境界と底面境界から微小渦を一定周期で放出する。放出周期が短いほど計算精度が上昇するが、計算時間も増加する。今回の計算では放出周期は、流入渦、底面渦ともに0.1sとした。さらに気泡ケースについては、底面境界から計算領域内部へ気泡を流入させる。次に気液境界を含む計算領域に存在する全ての固定渦要素、吹出し・吸込みパネル要素、放出渦要素からの誘起速度を考え、境界条件を満たすようにガウス法でこれらの強度 Γ および σ を各計算ステップにおいて計算する。この渦強度を用いて、各々の放出渦位置での誘起速度を算出して、放出渦を移動させる。同時に式(2)によって放出渦径を時間的に増加させる。以上のステップを必要な時間だけ繰り返すことで、開水路気泡流れの非定常計算が可能となる。

(5) 計算ケース

表-1に計算ケースを示す。計算は山上・瀬津(2004)の実験ケースを対象に同一のReynolds数の下で清水流と気泡流の2ケースの計算を行った。ケースAは気泡を含まない清水流であり、断面平均流速 U_m は10cm/s、水深は6cmである。一方、ケースBはケースAの流れに気泡を混入させた流れである。 T_b は発生周期で、 $T_b = 0.3$ sである。またこれらのケースでは気泡は変形しない球形とし、その直径は実験値と同じ6mmとした。気泡は図-6に示すように路床から水面に向かって一定の時間間隔で放出される。また計算領域の流下方向の中央点を原点 ($x=0, y=0$) としてここから気泡を発生させる。なお、以下で考察する主流速分布は、清水流、気泡流ケースともに原点での計算結果を用いる。

3. 計算結果と考察

(1) 清水流における時間平均速度分布

本節では気泡が存在しない清水流ケースの平均主流速分布の結果から本モデルの精度検証を行う。まず図-7は流入放出渦の瞬間分布を示したもので

表-1 計算ケース

case	U_m (cm/s)	h (cm)	Re	T_b (s)	
A	10.0	6.0	6000		clear water
B03	10.0	6.0	6000	0.3	bubbly water

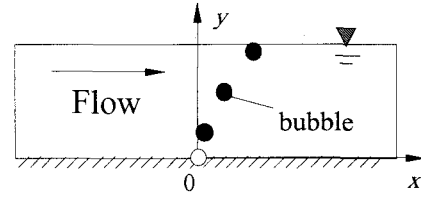


図-6 開水路気泡流れのイメージ

ある。流入渦は流れ方向に沿って分布しており、鉛直方向への位置変動は小さいことがわかる。このことから、流入および流出境界で与えた主流速シア $\partial u / \partial y$ が、計算領域全体でも存在することがわかる。

図-8は底面放出渦の瞬間分布を示したものである。底面ほど渦の分布密度が大きく、水面に向かって底面放出渦が巻き上がる様子がわかる。この特性は壁面での乱れが大きいことに対応する。この底面放出渦の存在効果を考察するために、図-9に $x=0$ の $y/h = 0.05, 0.1$ および 0.5 における主流速の時系列を示す。図中の右領域は流入自由渦のみ存在する時間ステージで、時刻 $t = t_c$ で底面渦を放出させる。 $t < t_c$ では主流速の変動は小さいが、 $t > t_c$ では底面渦の速度誘起によってこの変動が大きくなる。このことから底面渦は流れの乱れを支配していることがわかる。またこの特性は底面ほど顕著であるが、これは底面渦の存在密度の影響だと考えられる。

図-10は $x=0$ における時間平均した主流速の鉛直分布を内部変数表示したものである。ここで $U^+ \equiv U/U_*$ および $y^+ \equiv yU_*/\nu$ である。図中にはPIVの実験値、対数則分布および粘性底層で成立する線形分布式 $U^+ = y^+$ も示している。実験値とのずれが認められる領域もあるが、 $y^+ > 30$ の対数層では、実験値および計算値ともに対数則に一致しており、流入境界で与えた流速分布が計算領域内部においても再現できることがわかる。

図-11は流入渦が存在しない場合の主流速分布を外部変数表示したものである。図からわかるようにこの場合の計算値は、底面から水面までの全層において実験結果と大きな差がある。このことから平均主流速分布を正確に再現するためには流入渦の放出は不可欠であることが確認された。

(2) 開水路流れにおける気泡の上昇特性

ここからは上昇気泡を含む開水路流れの計算結果を考察する。まず気泡自身の運動に着目する。気泡は式(9)の運動方程式にもとづいて周囲流体と相互干渉しながら底面から上昇する。図-12はケースB03における気泡の上昇ラインを示したものである。本結果は複数のサンプルラインを平均したものであり、PIVによる同様の計測結果もプロットした。壁面から噴出直後の $y/h < 0.1$ では、水流の主流速度

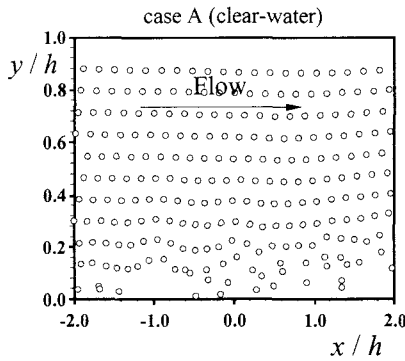


図-7 流入放出渦の分布

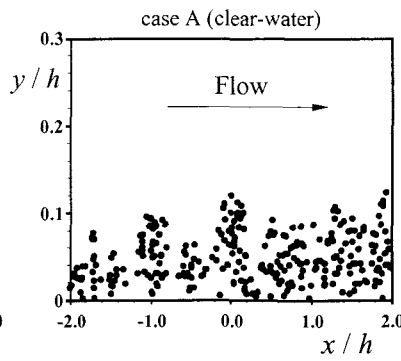


図-8 底面放出渦の分布

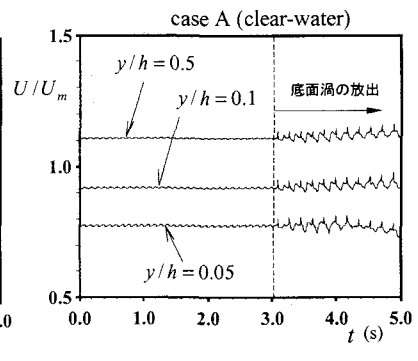


図-9 主流速の時系列

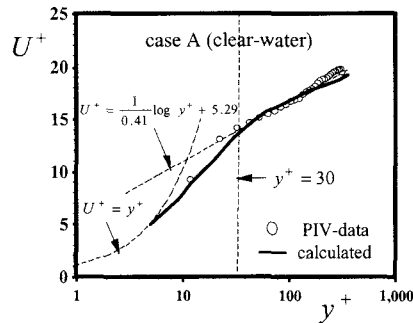


図-10 清水流の時間平均主流速分布

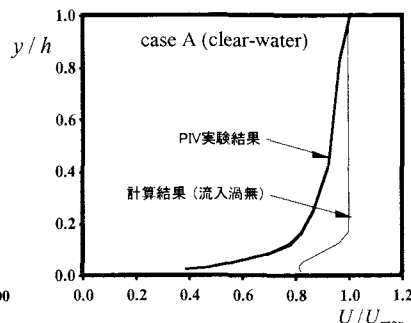


図-11 流入放出渦が主流速分布に与える影響

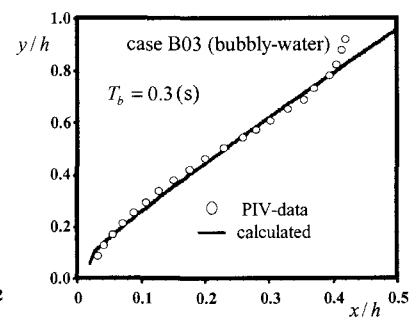


図-12 気泡の上昇ライン

が小さいため、鉛直方向への移動量が大きい、上昇とともに水流の主流速が増加するため、下流側への移動量も大きくなる。計算値は実験値でみられるこの上昇特性を再現できている。一方で、水理実験で観察された気泡は、水面付近で再び鉛直方向への移動が卓越する。このメカニズムの詳細については明らかにされていないが、気泡自身の回転や変形、あるいは3次元的な躍動による流れ構造の変化が、再度上昇運動に影響したと思われる。

(3) 上昇気泡周りの瞬間ベクトル分布

図-13は上昇気泡周りの領域 ($0 < (x - x_c)/h < 0.5$ および $0.55 < y/h < 0.8$) における瞬間ベクトル分布を0.01sごとの時系列表示したものである。これらの分布から気泡が流下しながら水面上昇していく様子が観察される。気泡の上昇によって周囲流体の構造が、清水状態から大きく変化することがわかる。特に気泡への衝突によって気泡から上流側では主流速値が負となり、静止円柱回りの流れのように水流は気泡に対して対称的によぎらず、複雑な分布がみられる。

(4) 開水路気泡流れにおける放出渦挙動

図-14はケースB03における流入放出渦の瞬間分布を示したものである。図中の破線は気泡の上昇ラインである。上昇ラインより上流側では、図-7で考察したように流入渦は流れに沿って分布している。一方で上昇ラインより下流側では、その分布が大きく乱されることがわかる。次に図-15は底面放出渦の瞬間分布を示したものである。上昇ラインを境界

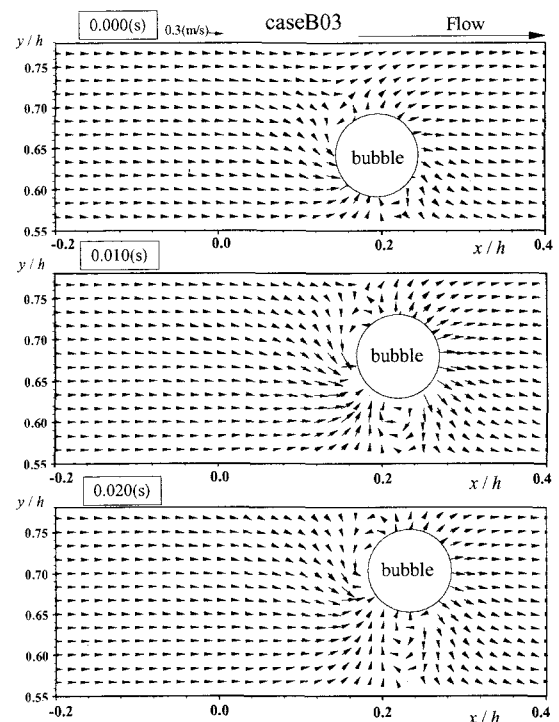


図-13 開水路気泡流れの瞬間ベクトル分布

として上下流サイドで分布特性が大きくことなる。すなわち上昇ラインよりも下流側では、気泡によって底面放出渦の水面方向への巻き上がりが促進され、分布領域が広がることをわかる。これらの放出渦の分布特性から、上昇気泡によって流れ構造が大きく変化することが数値予測される。

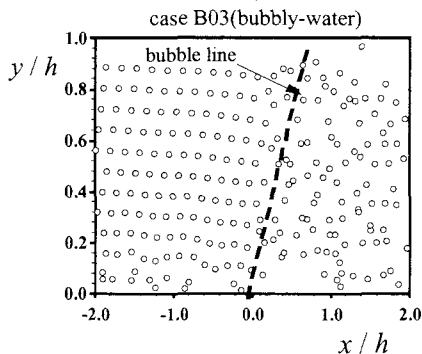


図-14 気泡流れにおける流入放出渦の分布

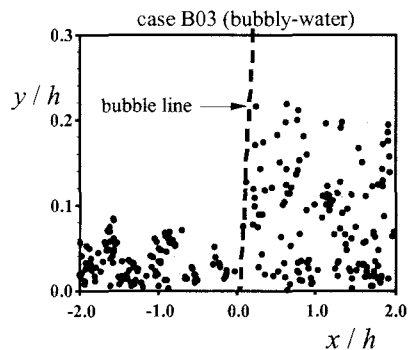


図-15 気泡流れにおける底面放出渦の分布

(5) 開水路気泡流れにおける平均主流速分布

最後に開水路気泡流れにおける時間平均主流速分布 $U(y)$ について考察する。図-16は、気泡上昇に伴う流れの構造変化が大きい気泡発生地点 $x=0$ における平均主流速分布を外部変数表示したものである。図にはPIVの計測値および清水ケースAの結果もプロットした。気泡ケースの主流速分布を清水流分布と比較すると、壁面近傍で分布が大きく落ち込んでいる。この領域では気泡の上昇ラインと重なるために、水流が気泡に衝突して流速が減少するものと考えられる。実験値とのずれはあるものの本計算結果はこの傾向を定性的に再現している。壁面から離れた $y/h \approx 0.2$ の領域では、壁面領域とは反対に清水流分布から増加していることがわかる。これは壁面領域で気泡に衝突した流れが気泡とともに上昇したからだと思われるが、この特性は実験では観察されない。実験の流れは横断領域をもつ3次元場で、水流は上昇気泡のサイドからの周り込みが可能である。この結果、実験と計算の相違が発生したものと考えられる。

今回は研究の初歩として2次元領域の計算を行ったが、今後3次元へ拡張して、上述した実験結果との相違を改善していきたい。

4. 結論

本研究では離散渦法を用いて、上昇気泡ブルームを含む開水路流れを数値解析した。以下に得られた結果をまとめて示す。

- 1) 流入境界および底面境界から自由渦を放出させて鉛直2次元場の開水路流れの平均主流速分布を再現した。
- 2) 気液境界を渦要素でモデル化することで、開水路流れにおける上昇気泡の運動をラグランジェ的に再現した。
- 3) 開水路気泡流れの主流速分布を実験値と比較・考察した。気泡による主流速の減速特性は再現できたが、3次元性に起因する水理特性については今後の課題である。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、横浜国立大学亀本喬司教授には貴重な助言と資料を頂いた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 山上路生・瀬津家久，気泡ブルームを含む開水路流

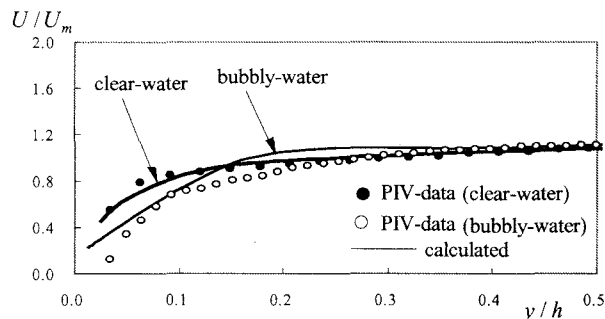


図-16 気泡流れにおける平均主流速分布

れの乱流構造，水工学論文集，Vol.48，pp.505-510，2004。

- 2) Hurt, C. and Nichols, D.B., Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.*, Vol.39, pp.201-225, 1981.
- 3) 功刀資彰，自由水面を含む多相流の直接数値計算法，機械学会論文集，Vol.63，609号，pp.815-816，1997。
- 4) 越塚誠一，数値流体力学，インテリジェントエンジニアリングシリーズ，培風館，1997。
- 5) 後藤仁志・林稔・安藤怜・酒井哲郎，固液混相流解析のためのDEM-MPS法の構築，水工学論文集，Vol.47，pp.547-552，2003。
- 6) 井沢精一郎・木田勝，渦法における乱流モデル，機会学会論文集，Vol.65，630号，pp.851-859，1999。
- 7) Bernald, P.S. and Dimas, A., Vortex method modeling of complex, turbulent engineering flows, *Proc. of 2nd Int. Conf. on vortex method*, Istanbul, pp. 41-54, 2001.
- 8) 小島成・亀本喬司，渦法のターボ機械への適用，可視化情報学会誌，Vol.23，91号，pp.11-17，2003。
- 9) 横井嘉文・亀本喬司・松本裕昭，渦法による固液二相流中におかれた円柱まわりの流れの数値シミュレーション，機会学会論文集，Vol.62，603号，pp.3824-3831，1996。
- 10) 乱流解析，東京大学出版会，pp.137-160，1996。
- 11) Kamemoto, K., Attractive characteristics of vortex methods and their contribution toward the new generation of computational fluid dynamics, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Heat transfer, fluid mechanics and thermodynamics*, Victoria Falls, Zambia, paper number:K1, 2003.
- 12) 秋山守・有富正憲，新しい気液二相流数値解析，コノナ社，2002。

(2004. 9. 30 受付)