

密度混合流解析への移動一般曲線座標モデル の適用に関する二, 三の検討

SOME CONSIDERATIONS ON APPLICATION OF GENERALIZED MOMVABLE
COORDINATE SYTEM TO DENSITY MIXING CURRENTS

木村 一郎¹・千葉 賢²・小畑めぐみ³・細田 尚⁴

Ichiro KIMURA, Satoshi CHIBA, Megumi OBATA and Takashi HOSODA

¹正会員 工博 松江工業高等専門学校助教授 環境・建設工学科 (〒690-8518 松江市西生馬町14-4)

²正会員 工博 四日市大学教授 環境情報学部環境情報学科 (〒512-8512 四日市市萱生町1200)

³学生員 松江工業高等専門学校専攻科 生産・建設システム工学専攻 (〒690-8518 松江市西生馬町14-4)

⁴正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Applicability of some numerical schemes in generalized curvilinear coordinate forms on a density current is examined focusing on the conservation and numerical diffusion. Various models with different spatial schemes for convective terms, grid fineness, turbulence models and methods of pressure calculation are applied to the mixing of two fluids with different density in a simple rectangular domain (Flat Model), a rectangular domain with a small mound (Mound Model) and a trapezoidal domain with steep bed slope (Slope Model). The numerical results show that the un-conservative spatial schemes yield significant error in total salinity and grid fineness affects not only the vertical density profile but also the phase velocity of density wave. A simple modification is also proposed in order to suppress unreasonable current in a stable stratified flow over a steep bed slope.

Key Words : Density current, Generalized curvilinear movable coordinate, Σ -coordinate,
Conservative scheme, Numerical diffusion

1. はじめに

河口や汽水湖などの水理環境は、潮汐、河川流、風力、塩分濃度、水質などの各要素が複雑に絡み合い、特有な現象を呈する。このような流れ場においても数値解析手法が有効である点には疑う余地は無いが、各要素について多段階のモデル化が必要であり、全体的な精度向上は容易ではないのが現状である。一方、水域の環境指標に関しては基準値が設けられ、濃度がこれ以下となることが要求される。従って、解析モデルは現象の定性的な挙動を追跡できるだけでは不十分であり、定量的な予測精度を実用レベルまで引き上げることが強く求められている。このためには、各モデル要素の最適化を進めていく必要がある。汽水域の流動現象の数値解析は従来から行われているものの、これらのほとんどが各研究者らが個別に提案するモデルによって行われており、モデル間の比較や精度の客観的評価が十分なされてきたとは言い難い。

近年の水域の数値解析の動向の一つとして、移動一般曲線座標系による三次元解析が一般的に行われるように

なったことが挙げられよう。移動一般曲線座標は複雑な地形を滑らかに表現し、水位や河床の変動も合理的に取り込めるという柔軟性を有する。しかし、物質輸送問題に適用する場合にはデカルト座標系には無かった新たな問題点が生じてくる。その一つが保存性に関するものであり、デカルト座標を用いる場合、移流項に保存形式のスキームを用いれば保存性は計算機の打ち切り誤差のオーダーで確保される。しかし、一般曲線座標系では座標変換に伴う付加項があたかもソース項のように作用し、保存性を阻害する可能性がでてくる。また、斜面を有する安定成層場において Σ -座標系を用いると、非合理的な流動が生じることも従来から指摘されている^{1,2)}。

本研究は、定量的予測が可能な高精度の環境動態シミュレーションモデルの構築を見据え、その最も基礎となる流動の物質輸送のシミュレーションモデルについて、移動一般曲線座標系のもとで基礎的な検討を行うものである。用いる基礎式は、誘導が簡便で、かつ有限体積法との親和性に優れる流速ベクトルの反変成分を主変数とする弱保存形式の表記を用いる。計算格子は閉鎖性水域の計算等に一般的に用いられる Σ -座標系とする。

主な検討項目は、保存性（水体積、物質質量）、格子依存性、斜面成層場の流動性であるが、静水圧近似の妥当性や鉛直渦動粘性係数についても若干の検討を実施する。また、急勾配底面上の安定成層場に生じる非合理的な流動を抑制するため、圧力項と拡散項に対する簡便な修正法を検討する。計算の対象とする流動場は単純化された閉鎖性水域とし、矩形モデル、底面に凸部を有する矩形モデル、底面が傾斜した台形モデルの3種類とする。いずれも塩水と淡水の混合現象を対象に検討を進める。

2. 数値解析モデルの概要

(1) 基礎式と計算法の概要

デカルト座標系の密度混合流の保存形式の輸送方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u_j \rho}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

ここに、 ρ : 密度、 t : 時間、 x_j : 空間座標、 u_j : 流速、 K_j : 渦動拡散係数である。式(1)を有限体積法に適用し移流項に保存形スキームを用いれば、保存性は計算機の打ち切り誤差の精度で満足される。式(1)を流速ベクトルの反変成分を主変数とする一般曲線座標系に変換すると次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j [\rho V^j] = \nabla_j \{ K g^{jj} \nabla_j \rho \} \quad (2)$$

ここに、 V_j : 流速ベクトルの反変成分、 g^{jj} : 計量テンソルの反変成分、 ∇_j は共変微分である。式(1)から式(2)の変換は、偏微分を共変微分に置き換えることで、機械的に行うことができる。式(2)は見かけ上は保存形式であるが、計算空間座標を ξ^j として共変微分を書き下すと、

$$\nabla_j [\rho V^j] = \frac{\partial (\rho V^j)}{\partial \xi^j} + \rho V^k \Gamma_{jk}^j \quad (3)$$

となり、クリストッフェル記号 Γ_{jk}^j を含む右辺第2項があたかも生成項のように付加されることがわかる。なお、クリストッフェル記号の一般形は次のようになる。

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^m} \right) = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \quad (4)$$

ここに、 g_{ij} : 計量テンソルの共変成分である。クリストッフェル記号は格子の曲がりや台形的な変形を表すものであり³⁾、計算格子の形状によってはこの項が相対的に大きくなり保存性を壊すことが予想される。移動座標系の場合にはさらに次のように格子移動の影響を含む項が付加される^{4,5)}。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j [\rho (V^j - W^j)] + \rho \nabla_j W^j = \nabla_j \left\{ K g^{jj} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^j} \right\} \quad (5)$$

ここに、 W^j : 格子移動速度の反変成分である。

一方、連続式、運動方程式については次のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \sqrt{g}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^i (V^j - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^j \nabla_j W^i \\ & = \frac{\rho}{\rho_0} G^i - \frac{1}{\rho_0} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} + \nabla_j \left[-v^i v^j \right] + 2\nabla_j e^{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 v^i : 乱れ速度ベクトルの反変成分、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数、 ρ : 流体の密度、 k : 乱れエネルギー、 ε : 乱れエネルギー散逸率、 F^j : 重力ベクトルの反変成分、 ρ_0 : 基準密度をそれぞれ表す。式(7)はBoussinesq近似を用いている。計量テンソル等は次式で表される。

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \delta_{kl}, \quad g^{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \delta_{kl}, \quad g = \det[g_{ij}] \quad (8)$$

結局、本研究の基礎式は、式(5)、(6)、(7)となる。

計算法は有限体積法とし、安定性と有限体積法への親和性を考慮して、圧力、物質濃度を格子の中央で、流速ベクトルの成分を格子側面で定義する完全スタガード格子系を用いる。計量テンソル、クリストッフェル記号等は格子点上で定義し、計算の過程で必要となる位置の値については、その都度内挿により求めた。これは、計算機記憶容量の節約のためである^{4,5)}。

(2) 検討するモデル要素

a) 移流項の空間スキーム

本研究では、運動方程式の移流項は全てQUICKスキームとし、密度輸送方程式の移流項の空間スキームを種々に変化させて、保存性、数値拡散性等を検討する。比較に用いるスキームは、次の通りである。

- ・ 保存形式のスキーム：一次風上法、Hybrid法、QUICK、QUICKEST
- ・ 非保存形式のスキーム：KKスキーム

また、スキームの数値拡散を検討するため、鉛直方向の格子数を変化させた計算を実施し、結果を比較する。

b) 圧力項

閉鎖性水域などの大規模環境水域の計算において圧力項は静水圧近似がなされることが多い。その是非を論ずるため、静水圧近似のモデルと動水圧を考慮したモデルで比較を行う。

一方、斜面上の密度成層場の計算に対して Σ -座標系を用いると非合理的な流動が生じることが従来から指摘されており^{3,4)}、その原因が圧力項と後述の密度拡散項にあることもわかっている。これは従来からいくつかの改良モデルが提案されているが、本研究ではより簡便な改良法を提案する。

c) 鉛直渦動拡散係数

密度輸送方程式の拡散項について常問題となるのは鉛直方向の渦動拡散係数 K_z の与え方である。本研究では次のような3つのモデルを用いる。

- ① 定数型：千葉ら⁶⁾にならい、次の定数とする。

$$K_z = 0.5 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (9)$$

② Munk & Andersonモデル⁷⁾

$$K_z = K_{z0}(1 + bR_i)^\beta \quad (10)$$

ここに、 K_{z0} は密度勾配がないときの渦動拡散係数であり、 $1.0 \text{ cm}^2/\text{s}$ の値を用いた。係数 b 、 β はそれぞれ、3.33、-1.5の値を用いる。

③ Officerモデル⁸⁾

式(10)を用い、係数 b 、 β の値のみがMunkらのモデルと異なり、 $b = 1.0$ 、 $\beta = -2.0$ とする。

②、③のモデルはいずれも次のリチャードソン数、

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{-2} \quad (11)$$

の関数となっている。

(3) 対象とする流れ場と計算格子

計算対象とする流れ場は図-1に示す3通りである。それぞれのモデルに対応する計算格子を図-2に示す。Flatモデルは単純な矩形領域であり、我国の代表的な閉鎖性水域のスケールを考慮して、横幅を16km、水深を20m、奥行きを1000mとした。初期条件として左側1/4の領域に塩水、それ以外に淡水を与え、自由混合させる。計算格子は、水平(x)および奥行き(y)方向は200mの当幅格子、鉛直(z)方向は格子幅を底面に向かって等比級数的に拡大させる不等間格子とした。格子数はx方向が80、z方向が20、y方向が5である。なお、格子は初期序状態では直交格子であるが、水面振動にともなう移動するので計算過程では非直交となる。MoundモデルはFlatモデルの底部中央に滑らかな凸部を設けたもので、凸部の形状は次の三角関数で与える。

$$z(x') = \frac{h}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi x'}{\lambda} \right], \quad x' = x - \frac{L + \lambda}{2} \quad (12)$$

ここに、 h :凸部の高さ(5mとした)、 L :水域のx方向スケール(=16000m)、 λ :凸部の横幅($L/10$ とした)である。計算格子は鉛直方向を等間隔(=20格子)とし、他はFLATモデルと同一である。Slopeモデルは勾配1/10の底面勾配を有する台形場であり、初期濃度分布は図に示すように $z < -5(\text{m})$ に3%の塩水、その上に淡水を与えた安定成層場である。計算格子は図に示すようにx方向、z方向がともに10格子、奥行き方向は他のモデルと同様とした。

3. 結果の考察

(1) 数値計算手法の比較

a) 空間スキームの影響

図-3は、Flatモデルにおける計算開始5時間後の塩分濃度の分布を4つのスキームについて比較したものである。鉛直渦動粘性係数については定数型、圧力は動水圧考慮した収束計算によっている。QUICKスキームと

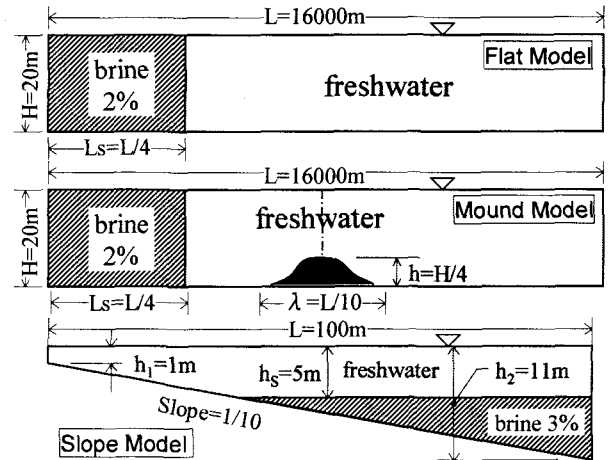


図-1 対象とする3つの流れ場

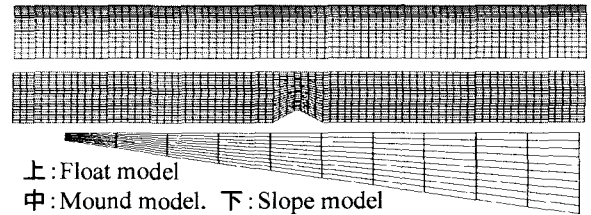


図-2 各モデルの計算格子(x-z平面上)

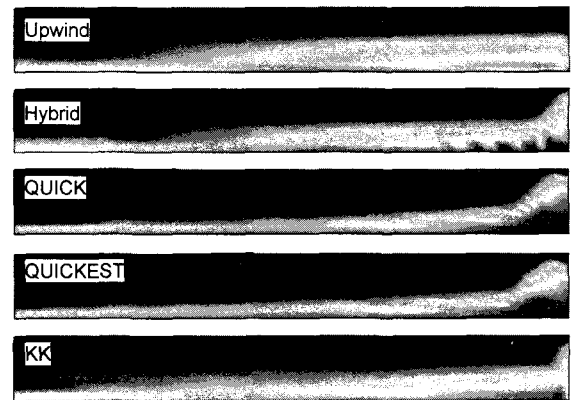


図-3 空間スキームの比較(密度分布、 $t=5\text{hr}$)

QUICKESTスキームによる計算結果は非常に似通っている。一方、一次風上スキームによる計算結果は拡散性が強くなっており、Hybrid法による計算結果においては一次風上スキームとQUICKスキームの中間的な性質が示されているといえる。また、Hybrid法では濃度分布に振動が見られる。この原因としては、一次風上スキームと中心差分スキームの切り替えによるものと考えられ、Hybrid法はスカラー輸送方程式には比較的よく用いられるだけに注意を要する点といえる。

計算スキームの格子依存性を確認するため、鉛直方向の格子数を10,20,30.....80と8通りに変化させた計算を行った。図-4は、 $t=30\text{hr}$ の時点の密度の鉛直分布をx方向に空間平均した分布を比較したものである。QUICKでは格子数を20以上にすれば、格子の影響はほぼ消滅するが、1次風上法では格子数を80としてもなお格子数の影響が強く残っている。図-5は、仮に鉛直格子数が80とした場合の結果を真値とみなした場合の平均二乗誤差を計

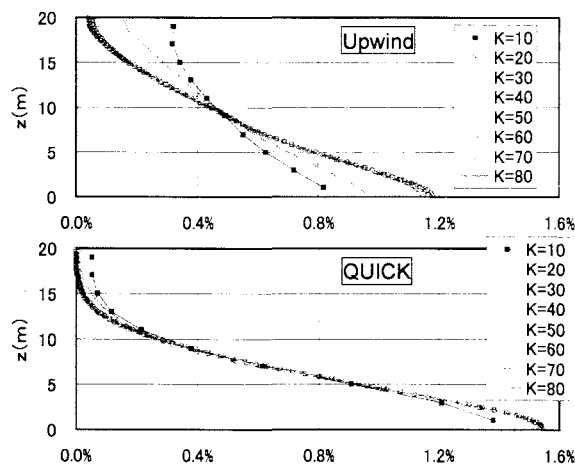


図-4 計算格子数と密度分布 (t=30hr, 空間平均)

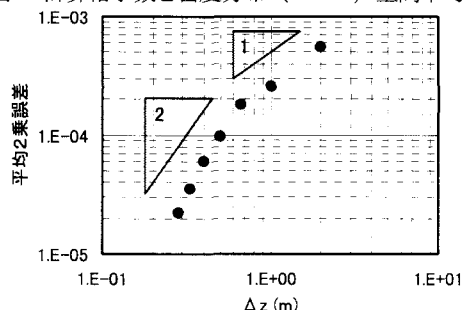


図-5 平均二乗誤差と計算格子幅の関係 (QUICK)

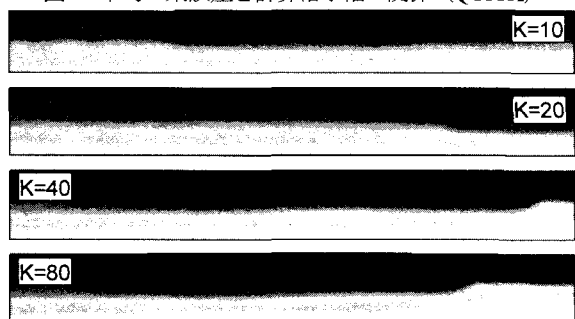


図-6 位相速度への鉛直格子数の影響 (t=10hr)

算格子幅 Δz に対してプロットしたものである。 Δz が 0.6m 以下では 2 次精度を有する QUICK に対応して勾配が 2 となっているが、 Δz が 0.6m 以上では勾配が 1 となり、 1 次精度に落ちている。これには、拡散項の影響などが考えられる。

図-6は、鉛直方向の格子数が 10, 20, 40, 80 の場合の $t=30\text{hr}$ における QUICK による密度分布を比較したものであり、格子が粗い方がフロントの位相速度が小さいことがわかる。鉛直方向の格子解像度が密度分布だけでなくフロントの位相速度にも影響を及ぼす点が指摘され、格子形成にあたっては留意すべき点といえよう。

b) 圧力の計算方法の比較

図-7は、Flatモデルにおいて、静水圧近似のもとでの計算結果と動水圧を考慮した計算結果を比較したものであり、(a) は計算開始後 1 時間後、(b) は 5 時間後の濃度分布を示している。従来から、静水圧近似の問題点として、塩水楔の前縁の密度界面が垂直に切り立ってくるという現象が指摘されている。 $t=1\text{hr}$ の分布にもこの傾向がみられるが、その影響は

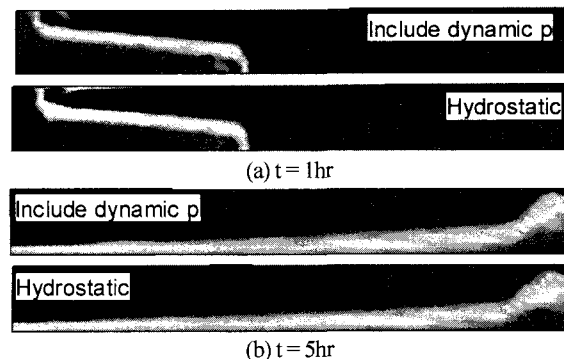


図-7 密度フロントにおける静水圧近似の影響

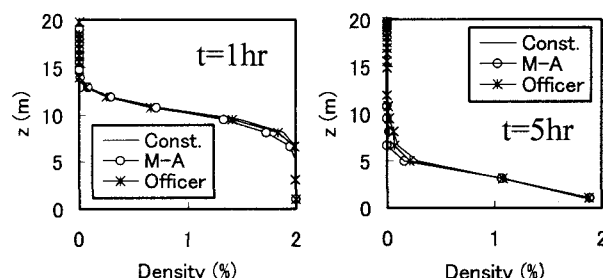


図-8 鉛直渦動粘性係数の影響 (x=4000mの鉛直面の濃度分布)

非常に小さく、 $t=5\text{hr}$ になるとフロント形状にほとんど差異がみられない。これは、本研究が対象とした流れ場の鉛直スケールが水平スケールに比べてはるかに小さい水域(実際の内湾等に近いスケール比)を想定したものとなっていることが一因と考えられ、現実の内湾等の計算における静水圧近似の妥当性を示す結果と考えられる。

c) 鉛直渦動粘性係数

図-8は、渦動粘性係数を定数型、Munk & Andersonモデル、Officerモデルの 3 通りとした場合の $x=4000\text{m}$ における鉛直方向の密度分布を $t=1\text{hr}$, 5hr について比較したものである。計算初期の $t=1\text{hr}$ においては、Munk & Andersonモデルによる分布が最も濃度勾配が小さいが、 $t=5\text{hr}$ では逆に最も勾配が大きくなっている。しかし、モデルによる差異はわずかであり、今回の条件では濃度分布に及ぼす渦動粘性係数の影響は比較的小さいことがわかる。

d) 保存性に関する考察

保存性を満たすことは物質濃度の予測モデルにとって最も基本的な要件の一つといえる。そこで、①水の体積保存性、②全塩分量保存性、の 2 点について検討する。表-1は、保存性の検討に用いたモデルの一覧と、 $t=30\text{hr}$ における水体積、および全塩分量の変化量を % で示したものである。水体積の保存性を決定づけるのは連続式であり、有限体積法を用いる場合はいずれのモデルを用いた場合も十分満足されることがわかる。全塩分量に関する保存性は、保存形式のスキームを用いた場合は、極めて高い精度で満たされている。これは、格子の曲がりを含む Moundモデルの場合、QUICKによる保存性が若干低下しているが、誤差は 1% 以内となった。また、ここには示していないが、格子の急激な台形変化を伴う後述の Slopeモデルにおいても全塩分量の保存性は高い精度で確保されることがわかった。ところが、非保存型の KK

表-1 保存性の比較

(a) Flat Model

スキーム	圧力計算	渦動粘性係数	水体積変化量(%)	全塩分変化量(%)
1次風上	動水圧考慮	定数	0.0226	0.0986
Hybrid	動水圧考慮	定数	0.0393	0.1036
QUICK	動水圧考慮	定数	0.2178	0.1043
QUICK	静水圧近似	定数	0.1028	0.0997
QUICKEST	静水圧近似	定数	0.1028	0.0996
KK	静水圧近似	定数	0.1028	10.5206
QUICK	静水圧近似	M-A	0.1028	0.1049
QUICK	静水圧近似	O-F	0.1028	0.1001

M-A: Munk&Anderson, O-F: Officer

(b) Mound Model

スキーム	圧力計算	渦動粘性係数	水体積変化量(%)	全塩分変化量(%)
QUICK	静水圧近似	定数	0.14265	0.91744
KK	静水圧近似	定数	0.00057	9.03501

スキームについてはFlatモデル, Moundモデルともに10%以上の体積変化が見られる。図-9は, KKスキームにおける全塩分量の時間変化 (Flatモデル) を示したものである。計算初期には全塩分量は増加し, その後振動を伴いながら減少していくことがわかる。

以上より, 流速ベクトルの反変成分を主変数とする移動一般曲線座標系の基礎式は厳密には保存形式にはなっていないものの, 移流項の空間スキームに保存形式のスキームを用いれば質量保存性は十分確保されるといえるのである。

(2) 底面勾配を有する成層場に着目したモデルの改良

a) 計算結果と考察

図-10は, 図-1に示すSlopeモデルの初期条件から $t=1000\text{min}$ 経過後の流れ場の流速ベクトルを示したものである。この計算には移流項にはQUICKを, 鉛直渦動粘性係数は定数型とし, 静水圧近似を用いている。対象とする条件が安定成層場であるにもかかわらず, 底面付近で最大流速約 30cm/s の流れがみられる。この原因を検討するため, 水域全体の密度を一定($\rho=1000\text{kg/m}^3$)とした場合についても同様な計算を実施した結果, 図-11に示すように底面付近に最大 10cm/s 程度の流速が生じた。底面勾配を有する流れ場に Σ 座標を用いた場合, このような非合理的な流動が生じること, また, その原因が運動方程式の圧力勾配項と密度輸送方程式の拡散項にあることは, 従来から指摘されている。Stellingら¹⁾はこの点を改良する方法を提案しているが少々煩雑である。そこで, 本研究ではより簡便な次のような方法を検討する。

b) 圧力項, 密度拡散項の改良

安定な成層場では重力項と圧力勾配がつりあっている。 ξ 方向の運動方程式において, Σ 座標では重力項は常に0である。一方, 圧力項は次のようになる。

$$-\frac{1}{\rho_0} \left[g^{\xi\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g^{\xi\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} + g^{\xi\zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right] \quad (13)$$

Slopeモデルでは η 方向の圧力勾配0であるから, 結局水平方向の圧力勾配を上式の括弧内の第1項と第3項(下線の項)の和で表していることになる。2項の絶対値に大きな差がある場合は, 特に打ち切り誤差が増大する。そこで, 式(13)の括弧内を計量テンソル $g^{\xi\xi}$ を分解し,

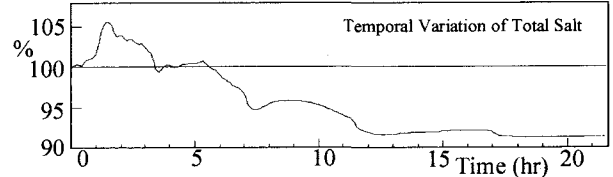


図-9 KKスキームにおける全塩分量の時間変化 (Flat Model)

さらに Σ 座標の場合 $\partial \xi / \partial z = 0$ となることを利用すると,

$$g^{\xi\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g^{\xi\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} + g^{\xi\zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (14)$$

と変形できる。次に, ξ 座標軸と η 座標軸を水平面に射影した新たな2次元座標 ξ' , η' を導入し, 式(14)の右边を次のように変形する。

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial \xi'} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta'} \quad (15)$$

結局圧力項(13)は次のように修正される。

$$-\frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial \xi'} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta'} \right] \quad (16)$$

同様に η 方向の運動方程式の圧力項は,

$$-\frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial \xi'} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta'} \right] \quad (17)$$

と修正される。ここで, 新たに生じたメトリック ($\partial \xi' / \partial y$ など) は, 3次元計算のメトリック ($[]_{3D}$ で示す) を流用して次のように求められる。

$$\begin{bmatrix} \partial \xi' / \partial x & \partial \xi' / \partial y \\ \partial \eta' / \partial x & \partial \eta' / \partial y \end{bmatrix} = \frac{1}{J'} \begin{bmatrix} \partial y / \partial \eta & -\partial x / \partial \eta \\ -\partial y / \partial \xi & \partial x / \partial \xi \end{bmatrix}_{3D} \quad (18)$$

$$J' = \begin{bmatrix} \partial x / \partial y & -\partial x / \partial \eta \\ \partial \xi / \partial \eta & -\partial \eta / \partial \xi \end{bmatrix}_{3D} \quad (19)$$

ここで $\partial x / \partial \eta' = [\partial x / \partial \eta]_{3D}$ であるが, $\partial \xi' / \partial y \neq [\partial \xi / \partial y]_{3D}$

となる点に注意を要する。このような変換を行うことにより, ξ 方向, η 方向の圧力勾配は水平面内の ξ' , η' 方向の微分のみを用いて表されることになる。

この圧力項の修正を行ったモデルを用い, 静水圧近似のもとで密度一定の計算を行った結果が図-12である。図-11の非合理的な流動は, この変換により完全に抑制されている。動水圧を考慮する場合については圧力の内挿が必要であり, その精度は内挿の精度に依存する。

一方, 密度成層場では密度輸送方程式の拡散項についても同様な改良を行うことを考える。まず, テンソルの一般的な関係から式(5)の右边を次のように変形する。

$$\nabla_i \left\{ Kg^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^j} \right\} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left\{ \sqrt{g} Kg^{jk} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^k} \right\} \quad (20)$$

さらに, 右边を展開すると次のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left\{ \sqrt{g} Kg^{1k} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^k} \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \sqrt{g} Kg^{2k} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^k} \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \sqrt{g} Kg^{3k} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^k} \right\} \right] \quad (21)$$

上式の大括弧内の第1, 2項に対して, 圧力項に施したと同様の変形を行う。大括弧内の第3項については修正を

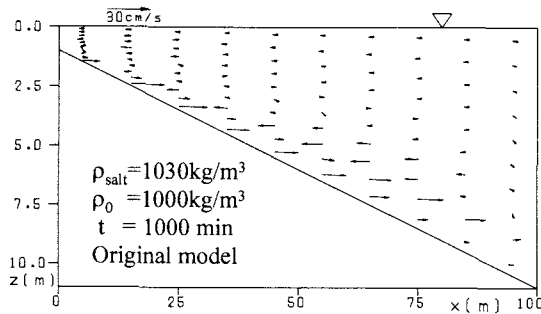


図-10 Slopeモデルの流況 (修正無)

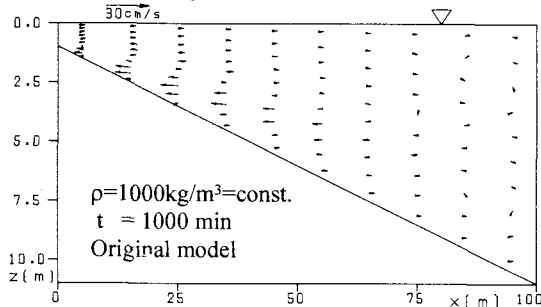


図-11 密度一定としたSlopeモデルの流況 (修正無)

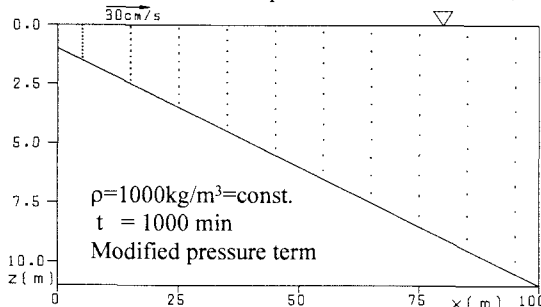


図-12 密度一定としたSlopeモデルの流況 (圧力項修正)

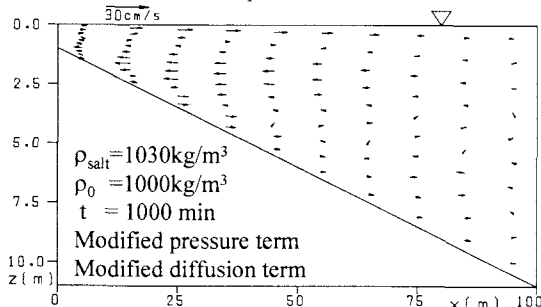


図-13 Slopeモデルの流況 (拡散項, 圧力項修正)

施さずにこのままの形で用いる。結局修正された拡散項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left\{ \sqrt{g} K \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi'} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \eta'} \right] \right\} \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \sqrt{g} K \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi'} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \eta'} \right] \right\} \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \sqrt{g} K g^{3k} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^k} \right\} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

上式のメトリックテンソルは式(18), (19)と同様である。また密度鉛直方向の内挿が必要となるが、今回は簡単のために三次Lagrange補間を用いる。

上記の修正を施した密度輸送方程式を用いて密度成層場のもとでSlopeモデルの計算を行い、1000min後の流速

ベクトルを示したものが図-13である。流動は完全には抑えられていないが、図-10に比べて改善がみられ、流速の最大値は修正を施さないモデルの約50%まで低減されている。このことから、本修正モデルの妥当性が理解できる。非合理的な流動を完全には抑えられない原因の一つは、水深の大きいところで計算格子が大きくなり、コントロールボリュームの左右で密度分布の解像度にアンバランスができることも一因と考えられる。

4. おわりに

本研究は弱保存形移動一般座標の基礎式を密度混合流に適用する場合について、数値解析モデルの基本的特性を検討したものである。主な成果は次の通りである。

1. 基礎式は完全には保存系ではないが、移流項に保存形の空間スキームを用いることにより保存性は実用上十分な精度で確保される。
2. 鉛直方向の計算格子数は密度分布だけでなく、密度フロントの位相誤差にも影響を及ぼす。
3. 本研究で対象としたスケールの流れ場では、動水圧の影響は小さく、静水圧近似は妥当といえる。
4. 斜面上の安定成層場では非合理的な流動が再現された。これはΣ座標の欠点として従来から指摘されており、圧力勾配項と拡散項に簡便な修正を施したモデルによりある程度抑制されることを示した。

参考文献

- 1) Stelling, G. S. and Van Kester, J. A. Th. M.: On the approximation of horizontal gradients in sigma co-ordinates for bathymetry with steep bottom slopes, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 18, pp.915-935, 1994.
- 2) Blumberg, A. F. and Mellor, G. L.: Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the south Atlantic bight, *J. Geophys. Res.*, Vol.88, pp.4579-4592, 1983.
- 3) 越塚誠一：数値流体力学，培風館，p.81, 1997.
- 4) Kimura, I., Hosoda, T., Onda, S. and Tominaga, A.: Computations of 3D Turbulent Flow Structures around Submerged Spur Dikes under Various Hydraulic Conditions, *Proceedings of River Flow 2004*, Naples, Italy, Balkema, 2004.
- 5) 木村一郎，細田尚，音田慎一郎：完全スタガード移動一般曲線座標系における開水路乱流シミュレータの開発，四日市大学環境情報論集，Vol.5, pp.145-170, 2002.
- 6) 千葉賢，武本行正：伊勢湾シミュレータの開発・第3報—三次元モデルの開発，四日市大学環境情報論集，Vol.3, No.1, pp.19-60, 1999.
- 7) Munk, W. H., and Anderson, E. R.: Notes on the theory of the thermocline, *J. Mar. Res.*, Vol.3, pp 276-295, 1948.
- 8) Officer, C. G.: *Physical Oceanography of Estuaries*, John Wiley, New York, 1976.
- 9) 木村一郎，細田尚，音田慎一郎，富永晃宏：流型水制周辺の三次元乱流構造に及ぼす水理パラメータの効果，水工学論文集，Vol.48, pp.661-666, 2004.

(2004. 9. 30 受付)