

非構造コロケート格子における C-ISMAC法の適用性に関する研究

INVESTIGATION OF C-ISMAC METHOD
WITH UNSTRUCTURED COLLOCATED GRID

藤田 学¹・牛島 省²・榎津 家久³

Manabu FUJITA, Satoru USHIJIMA and Iehisa NEZU

¹ 学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻

³ フェロー 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻

The unstructured collocated grid can be easily adapted to the complicated boundary shapes. Thus, it is effective when the incompressible flow is predicted for the numerical actual phenomena. A C-ISMAC method is an implicit algorithm, which had been shown to be effective on the structured collocated grid. This method is based on an implicit-SMAC method in the staggered grid, and can be used with higher-order schemes for spatial discretization as done in an explicit scheme. In this paper this method is applied to unstructured collocated grid. To show the validity, the incompressible flows in the square and triangular cavities are calculated with a C-ISMAC method. It is shown that the calculation time is decreased and the calculation accuracy is almost same when a C-ISMAC method is used.

KeyWords : *unstructured collocated grid, C-ISMAC, incompressible flow, implicit method, high-speed computation*

1 はじめに

計算の安定性, 計算時間の短縮は流体計算をする場合において非常に重要な問題である。流体計算を行う場合において, 移流項と拡散項が陽的に扱われた場合 CFL 条件や拡散数による制約が生じ, 時間刻み Δt を小さく取らなければならない。そのため長時間の計算が必要になる。移流項, 拡散項を陰的に取り扱えば, CFL 条件, 拡散数の制約が緩和されるため, 時間刻み Δt を比較的大きくとした場合においても安定に計算でき, 計算時間の短縮につながる。

Ikohagi, T and Shin, B. R の提案したスタガード格子を用いた場合の陰的解法である Implicit SMAC 法¹⁾を, コロケート構造格子上で利用する C-ISMAC 法²⁾が既報において提案された。この C-ISMAC 法は, 圧力勾配を適切に取り扱うことにより, コロケート格子においてもスタガード格子を用いた場合と同様流速の予測値の残差成分を 0 に収束する事を可能にした。また陰的に扱うことによる, 計算時間の短縮だけでなく, 移流項に空間的精度の高いスキームを適用できるため計算精度に関しても有効であることが確認されている。

一方, 非構造コロケート格子を用いることは, 複雑な境界を適切に表すことができるため, 実河川や湖沼などの実現象の計算に非常に有効である。

以上の背景より, 陰的解法のアルゴリズムを非構造コロケート格子において構築することは非常に重要である。そのため本報では, 陰的解法である C-ISMAC 法を非構造コロケート格子に適用する手法を提案する。正方形, 三角形キャビティ内の流れにその手法を用いることにより, その手法の有用性を確認する。

2 数値解析手法

2.1 2次元非構造コロケート格子

2次元非構造コロケート格子として三角形の計算セルを用いる。既報³⁾と同様に, Rhie and Chow⁴⁾が示した構造格子でのコロケート格子における変数配置を, 非構造コロケート格子に用いた。以下において, 三角形の頂点を節点, 辺をセル境界, セル境界節点をセル境界の中心とする。流速, 圧力は, 三角形セルの重心であるセル中心で定義し, 運動量フラックスとセル境界流速, セル境界圧力をセル境界節点上に定義する。

2.2 基礎式

本報では、外力を考慮しない2次元非圧縮性流体を取り扱う。基礎方程式は積分形の連続式と Navier-Stokes 式であり、以下のように表される。

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_i d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (u_i \cdot \mathbf{u} + \frac{p}{\rho} \mathbf{k}_i - \nu \nabla u_i) \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (2)$$

これらの式において Ω はある有限な流体領域を示し、 $\partial\Omega$ はその境界を示す。 $\mathbf{n}$ はその境界における外側に向かう単位法線ベクトルを表し、 $\mathbf{k}_i$ は、 x_i 方向へ向かう単位ベクトル、 $\mathbf{u}$ 、 u_i 、 p 、 ν はそれぞれ流速ベクトル、流速ベクトルの x_i 成分、圧力及び動粘性係数である。

2.3 C-ISMALC 法での時間方向への離散化

C-ISMALC 法において、積分形の Navier-Stokes 式を、時間方向に離散化すると以下のように扱われる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{S} \left[\oint_{\partial\Omega} \left\{ -\alpha u_i^{n+1} \mathbf{u}^n - (1-\alpha) u_i^n \mathbf{u}^n + \beta \nu \nabla u_i^{n+1} + (1-\beta) \nu \nabla u_i^n - \frac{1}{\rho} p^{n+1} \mathbf{k}_i \right\} \cdot \mathbf{n} dl \right] \quad (3)$$

ここで S はセルの面積、 Δt は時間刻み、 u^n 、 p^n は n ステップにおける流速、圧力を表す。この式において移流項と拡散項を独立に取り扱うため、 $0 \leq \alpha \leq 1$ 、 $0 \leq \beta \leq 1$ を満たす係数を乗じている。また、右辺第2項の $\{ \}$ 内第1項は $-\alpha u_i^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}$ と表わされるが、 $\mathbf{u}^n$ を用いて線形化している。

この方法により、移流あるいは拡散効果のどちらが卓越するかに応じて α と β を制御し、より大きな Δt を用いて安定に計算する事が可能になる。 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$ なら完全陰解法、 $\alpha = 0$ 、 $\beta = 0$ なら陽解法、 0.5 ならクランク・ニコルソン法となる。

2.4 移流項、拡散項の離散化

移流項および拡散項の係数を除く積分を C_i と D_i で表す。

$$C_i = \oint_{\partial\Omega} u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} dl \quad (4)$$

$$D_i = \oint_{\partial\Omega} \nabla u_i^n \cdot \mathbf{n} dl \quad (5)$$

式 (4) と式 (5) を、既報³⁾ で示したものと同様の近似計算を行うと次のようになる。

$$C_i \approx \sum_{m=1}^3 f_{i,m} l_m \quad (6)$$

$$D_i \approx \sum_{m=1}^3 \frac{1}{S_{b,m}} (u_{i,m}^n - u_{i,0}^n) l_m^2 \quad (7)$$

ここで計算対象となる計算セルの領域を Ω_0 、またセル境界 m に介して隣接する領域を Ω_m としており、 l_m は境界における辺の長さ、 S_m はセルの面積、 $S_{b,m}$ は Ω_0 と Ω_m 2つのセル領域から構成される領域の面積である。また、 $u_{i,m}^n$ と $u_{i,0}^n$ は2つのセル領域における流速を表す。式 (6) での $f_{i,m}$ は $u_{bi}^n \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ と表される。この式における、 $\mathbf{u}$ はセル境界流速、 u_{bi}^n はセル境界に内挿された i 成分の流速である。本報では1次精度³⁾ の評価法を用いる。1次精度の評価法を用いた場合 u_{bi}^n は、計算対象セルとその隣接セルの風上側のセル中心で定義された流速となる。

2.5 C-ISMALC 法での流速の推定値の計算

MAC 系解法の手順としてセル中心の流速の推定値 u_i^* を計算する必要がある。コロケート格子では、セル中心の流速推定値を求める際 CBP スキーム⁵⁾ が有効であることが示されている。CBP スキームは、セル中心における流速の推定値 u_i^* を計算する際この値の評価に圧力勾配を用いず、移流項、拡散項のみを評価する。そしてセル境界に空間内挿された段階で圧力勾配を考慮するものである。しかし、流速の推定値を求める際に圧力勾配が含まれていないため、スタガード格子を用いた場合のような流速の推定値に対する残差成分が0に収束するという特性が反映されなくなる。非構造格子コロケート格子における C-ISMALC 法では、この問題に対して以下に示すような構造格子と同様の解決法を行った。

CBP スキームではセル中心の流速の推定値は次式のようになる。

$$u_i^* = u_i^n + \frac{\Delta t}{S} \left[\oint_{\partial\Omega} \left\{ -\alpha u_i^* \mathbf{u}^n - (1-\alpha) u_i^n \mathbf{u}^n + \beta \nu \nabla u_i^* + (1-\beta) \nu \nabla u_i^n \right\} \cdot \mathbf{n} dl \right] \quad (8)$$

ここで、セル中心における流速値 u_i^* を次のように残差成分 $\tilde{u}_i$ を用いて表す。

$$u_i^* = u_i^n + \tilde{u}_i \quad (9)$$

スタガード格子を用いる場合には、流速の推定値に圧力項が含まれているため、解が定常に至った時、残差

成分 $\tilde{u}_i$ は 0 に漸近する。しかし、式 (8) においては、 u_i^* には圧力項が含まれていないため残差成分は 0 へ漸近しない。そのためいったん圧力勾配を含めた流速の推定値を求める。その後 CBP スキームと同等に扱うため圧力勾配を差し引く。

$$u_i^* = u_i^n + \frac{\Delta t}{S} \left[\oint_{\partial\Omega} \left\{ -\alpha u_i^* \mathbf{u}^n - (1-\alpha) u_i^n \mathbf{u}^n + \beta \nu \nabla u_i^* + (1-\beta) \nu \nabla u_i^n - \frac{1}{\rho} p^n \mathbf{k}_i \right\} \cdot \mathbf{n} dl \right] \quad (10)$$

式 (10) に式 (9) を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i + \frac{\Delta t}{S} \left[\oint_{\partial\Omega} \left\{ \alpha \tilde{u}_i \mathbf{u}^n - \beta \nu \nabla \tilde{u}_i \right\} \cdot \mathbf{n} dl \right] \\ = \frac{\Delta t}{S} \left[\oint_{\partial\Omega} \left\{ -u_i^n \mathbf{u}^n + \nu \nabla u_i^n - \frac{1}{\rho} p^n \mathbf{k}_i \right\} \cdot \mathbf{n} dl \right] \quad (11) \end{aligned}$$

式 (10) には圧力項が含まれるので、残差成分 $\tilde{u}_i$ は十分小さい値となる。また式 (11) の左辺第 2 項には微分項が含まれているが、他の項と同様に離散化式として評価されるため、同項も十分小さい値となる。このため、式 (11) 左辺の移流項、拡散項の空間的離散化には低次のスキームを用い、右辺に対応する項には高次スキームを適用ができる。C-ISMAC 法は陰的に取り扱うことが従来非常に困難なスキームにおいても利用可能であるが、本報では、1 次精度³⁾のスキームを用いている。

式 (11) を、有限体積法で離散化を行うと次のような連立一次方程式に帰着する。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i + \frac{\Delta t}{S} \left[\alpha \sum_{m=1}^3 \tilde{f}_{i,m} l_m - \beta \nu \sum_{m=1}^3 \frac{1}{S_{b,m}} (\tilde{u}_{i,m}^n - \tilde{u}_{i,0}^n) l_m^2 \right] \\ = \frac{\Delta t}{S} \left[- \sum_{m=1}^3 f_{i,m} l_m + \nu \sum_{m=1}^3 \frac{1}{S_{b,m}} (u_{i,m}^n - u_{i,0}^n) l_m^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho} \sum_{m=1}^3 p_m^n \mathbf{n}_m l_m \right] \quad (12) \end{aligned}$$

$\tilde{f}_{i,m}$ は $\tilde{u}_{bi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ と表され、 $\tilde{u}_{bi}$ は $\tilde{u}_i$ を 1 次精度の評価法を用い内挿した値である。 p_m^n , $\mathbf{n}_m$ はセル境界圧力、単位法線ベクトルである。ここにおける、 p_m^n は、 S_0 , p_0^n , S_k , p_k^n をそれぞれ計算対象セルとセル境界 m を挟む隣接セルの圧力と面積とすると、 $(S_0 p_0^n + S_k p_k^n) / (S_0 + S_k)$ で補間している。ここで求められた流速の推定値 u_i^* から、CBP スキームにおいて利用されるものと同等の圧力を含まない流速の推定値 $\hat{u}_i^*$ を、圧力勾配を差し引くことにより求める。

$$\hat{u}_i^* = u_i^* + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 p_m^n \mathbf{n}_m l_m \quad (13)$$

これ以降は、C-HSMAC 法^{6) 7)}と同等である。

なお計算手法の導出過程に示されるように、C-ISMAC 法は基本的に定常解を得るための手法と位置づけられる。しかし式 (11) において、左辺の影響が無視できるような条件、つまり Δt が十分小さく、流速の推定値の残差成分が小さい状況であれば、非定常流れ場へも適用可能であると考えられる。

3 計算手法の検証

3.1 正方形キャビティへの適用性

C-ISMAC 法の流体計算における適用性を確かめるため、図-1 に示すような各辺 1.0、上壁面が 1.0 の速度で移動するキャビティ内の流れの計算を行った。格子生成は、デローニー三角分割法⁸⁾に基づく自動格子生成法を利用した。移流項の計算には 1 次精度の離散化法を行っており、 $\alpha = \beta = 1.0$ 、レイノルズ数は 100 のもとで定常に至るまで計算を行った。圧力計算には C-HSMAC 法を用い、流速ベクトルの発散値のしきい値 ε_d は 1.0×10^{-7} とした。また流速の変化量の最大値が $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-7}$ が至った時定常とみなし、そのしきい値を満たすまで計算を行った。計算時間と精度の比較のため陽解法との比較を行う。

陽解法においては、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ においては、安定な計算な計算が行えたが、 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-2}$ においては計算が不安定になった。一方 C-ISMAC 法を用いた場合においては、 $\Delta t = 6.0 \times 10^{-2}$ まで安定な計算が行えた。以下陽解法を用い、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ の場合を標準計算と表記する。

非構造格子においてクーラン数と拡散数を定義するのは難しい。本報では非構造格子の各セルにおけるクーラン数 C_n 、拡散数 D_n を以下のように定義した。

$$C_n = \max\{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i \Delta t / (2L_i)\}, \quad i = 1, 3 \quad (14)$$

$$D_n = \max\{\nu \Delta t / (2L_i)^2\}, \quad i = 1, 3 \quad (15)$$

$L_i (i = 1, 3)$ は、各セルにおけるセル中心から各辺におろした垂線の長さ、 $\mathbf{n}_i$ は、各辺における三角形外側へ向かう法線ベクトルである。ここでは、 $2L_i$ を構造格子の格子幅にあたる値とした。定常解における計算領域内の C_n と D_n の最大値を C_{nm} および D_{nm} とした。

標準計算における計算時間を T_0 、C-ISMAC 法を用いた場合における計算時間を T とし、表-1 には、 C_{nm} と D_{nm} 及び T/T_0 の値を示した。表-1 にみられるように、C-ISMAC 法では、 Δt を大きくとることができ、クーラン数 1.50、拡散数 0.97 においても安定に計算できた。計算時間は最大で 0.53 倍まで短縮をすることができたが、 Δt に対して線形に計算時間が短縮する傾向は見られなかった。

定常解が得られた段階では、計算領域内における残差成分 $|\tilde{u}_i|$ の最大値は、 Δt の値に関わらず、 1.0×10^{-7} 程度の値となっている。このように圧力勾配項を適切に処置する事による、残差成分 $|\tilde{u}_i|$ に対する効果が確認された。

図-2 は、これらの計算で得られた $x = 0.5$ における u の流速分布である。標準計算 (図中 explicit) および C-ISMAC 法 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 6.0 \times 10^{-2}$ における結果と Ghia⁹⁾ の結果を比較している。C-ISMAC 法を用いた $\Delta t = 2.0 \times 10^{-2}$ と $\Delta t = 6.0 \times 10^{-2}$, どちらの場合の流速成分も若干の差異があるものの同程度の計算精度を有していることがわかる。

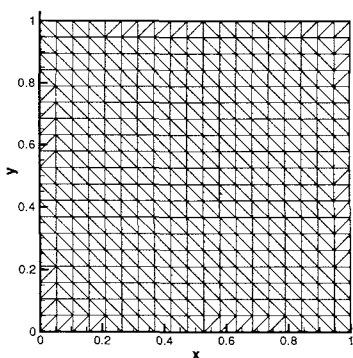


図-1 座標系と格子配置

表 1 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	Δt	C_{nm}	D_{nm}	T/T_0
標準計算	1.0×10^{-2}	0.25	0.16	1.0
C-ISMAC	2.0×10^{-2}	0.50	0.32	0.79
C-ISMAC	4.0×10^{-2}	1.00	0.65	0.59
C-ISMAC	6.0×10^{-2}	1.50	0.97	0.53

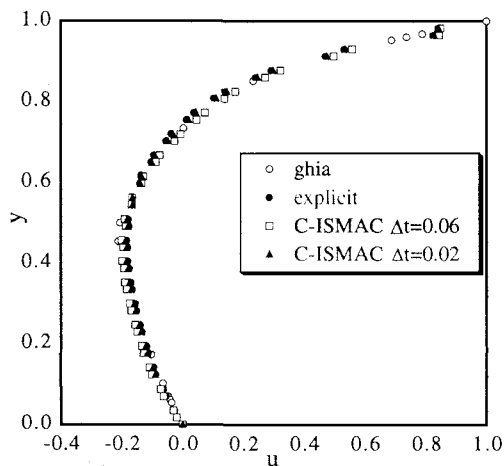


図-2 $x = 0.5$ における u の流速分布

3.2 計算時間に関する考察

本節では、C-ISMAC 法を用いた場合における計算時間に関する考察を、上記で得られた正方形キャビティ内の流れの計算結果を用いて行う。図-3、図-4、図-5 は、各時間ステップにおける計算時間 T_s , 流速の変化量の最大値 ε , 及び各時間ステップにおける圧力計算にかかる時間 T_p の T_s に対する割合を示したのである。 T_s , T_p は若干の変動があったため、平滑化している。

流速の変化量が大きな計算の初期の段階では、どの Δt を用いた場合の計算においても、1 ステップ毎の計算時間 T_s に大きな差が現れていないことが図-3 からわかる。それぞれの Δt における T_s の差は定常状態に近づくにつれ大きくなる。

計算の初期段階において1ステップの計算時間が大きくなっており、1ステップでの計算時間に占める圧力計算の割合も多くなっている。これは、計算の初期段階に C-HSMAC 法が流速ベクトルの発散値に対するしきい値 ε_d を満たすまでに多くの反復計算をしていることが原因である。定常状態に近づけば、反復計算は少ない。そのため、計算時間に対する圧力計算の占める時間は少なくなる。

前節でも述べたように C-ISMAC 法において Δt と計算時間の減少傾向には線形の関係性が見られない。その主な原因は、図-3 に見られるように、計算が終了する総ステップ数が、陽解法の場合の $1/\Delta t$ 倍になっていないためである。それは、計算終了直前あたりから1ステップにかかる計算時間 T_s の減少の傾向が鈍化しているためであると考えられる。

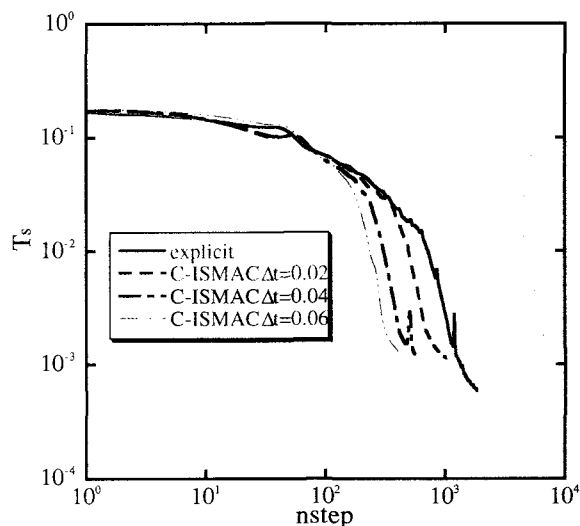


図-3 各ステップにおける計算時間

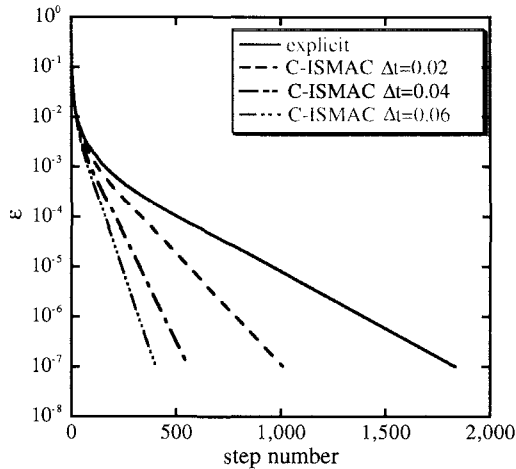


図-4 各ステップにおける流速の変化量の最大値

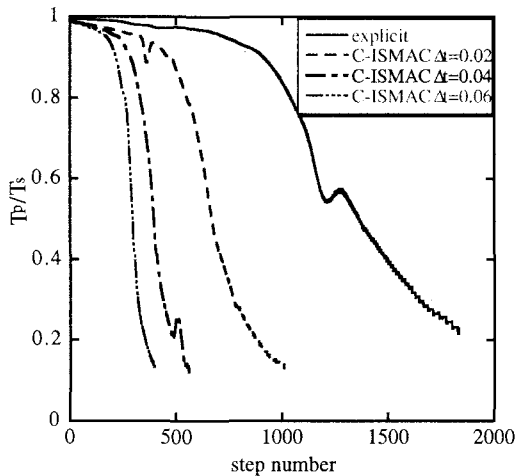


図-5 T_s 及び T_p の比較

3.3 三角形キャビティへの適用性

非構造格子の特徴を活かした計算例として上壁が1.0で移動する図-6に示す三角形キャビティ内の流れに適用する。

三角形キャビティ内の計算は、R.Jyotsna and S.P.Vanka¹⁰⁾やC.J.Ribbens et.al.¹¹⁾により行われている。そこで用いられているレイノルズ数と同様に、本報では上壁の流速と三角形キャビティの高さで評価する。つまり、 $Re = 4.0/\nu$ となる。 $Re = 50$ とし、移流項には1次精度のスキームを用いた。C-HSMAC法の流速ベクトルの発散値のしきい値 ε_d 、 α と β は正方形キャビティの計算例と同様のものを用いた。計算は、流速の変化量の最大値 $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-4}$ まで行った。

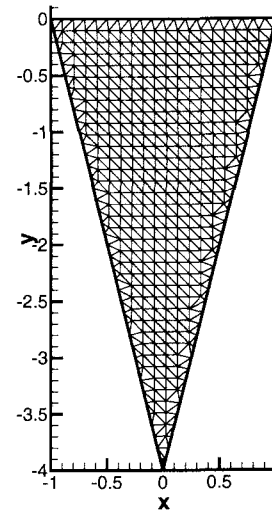


図-6 格子配置と座標系

陽解法を用いた場合、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ とすると計算は不安定になったが、C-ISMAC法を用いた場合 $\Delta t = 3.0 \times 10^{-2}$ においても安定な計算が行えた。オイラー陽解法 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ の場合を以下標準計算とし、C-ISMAC法との比較を行った。

表-2にクーラン数 C_{nm} と拡散数 D_{nm} 及び T/T_0 を示した。三角形キャビティの場合においても正方形キャビティと同様に Δt を大きくとることができ、クーラン数0.56、拡散数3.72においても安定な計算が行えた。計算時間は、標準計算の0.42倍まで短縮することができた。

図-7に標準計算、図-8にC-ISMAC法 $\Delta t = 3.0 \times 10^{-2}$ の場合の流速ベクトル図を示している。どちらの流況もおおむね一致しているといえる。

図-9は $x = 0.0$ における u の流速分布である。標準計算(図中 explicit)とC-ISMAC法 $\Delta t = 3.0 \times 10^{-2}$ をR.Jyotsna and S.P.Vanka¹⁰⁾の計算結果と比較したものである。こちらの場合も流速分布はおおむね一致している。このように三角形キャビティにおいても、同程度の計算精度を保有しながらも計算時間の短縮が行えた。

表2 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	Δt	C_{nm}	D_{nm}	T/T_0
標準計算	5.0×10^{-3}	0.067	0.62	1.0
C-ISMAC	1.0×10^{-2}	0.14	1.24	0.67
C-ISMAC	2.0×10^{-2}	0.27	2.48	0.53
C-ISMAC	2.5×10^{-2}	0.37	3.10	0.46
C-ISMAC	3.0×10^{-2}	0.56	3.72	0.42

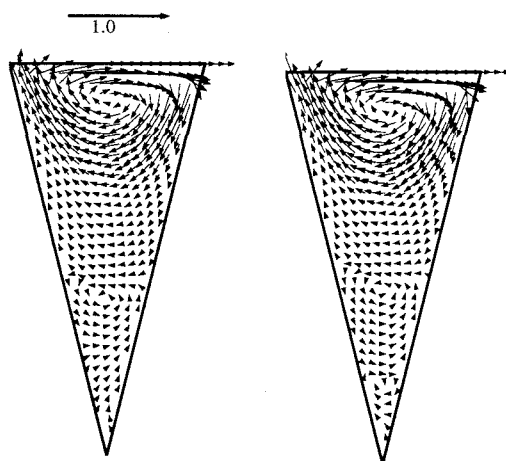


図-7 陽解法を用いた
場合のベクトル図

図-8 C-ISMAC 法を
用いた場合のベクトル図

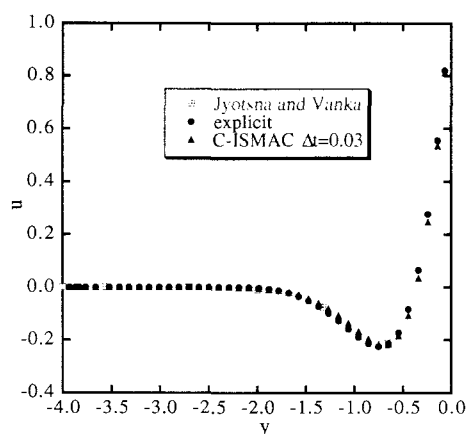


図-9 $x = 0$ における流速分布

4 おわりに

本報では、構造格子上で有用性が示された C-ISMAC 法を非構造コロケート格子上で利用する手法を示すとともに、その適用性を検討した。非構造格子上でも C-ISMAC 法では、予測段階においていったん圧力勾配を加えることで、流速の予測値の残差成分を定常解において十分小さくすることが確認できた。

C-ISMAC 法の有効性を確認するため移動壁を有する正方形および三角形のキャピティフローに適用した。その結果非構造格子では、クーラン数 1.5、拡散数 3.7

程度まで安定した計算を行うことができ、定常までの収束時間を短縮することができる。計算精度に関しては同程度の精度を保有していることを確認した。

以上から、C-ISMAC 法は、非構造コロケート格子上においても計算時間の短縮に非常に有効な手段であることが確認できた。本報では移流項に 1 次精度のスキームを用いているが、今後移流項に対し高次スキームの導入を検討することにより、C-ISMAC 法はより有効な手法になると考えられる。

参考文献

- 1) T. Ikohagi and B. R. Shin. Finite-difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates. *Computers and Fluids*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 479-488, 1991.
- 2) 牛島省, 瀬津家久. 陰解法を用いたコロケート格子による高精度の流体解析手法の提案. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 21-30, 2002.
- 3) 奥山洋平, 牛島省. 非構造コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算の圧力解法に関する考察. 水工学論文集, Vol. 48, pp. 703-708, 2004.
- 4) C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 5) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久. コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 6) 牛島省, 奥山洋平. 非圧縮性流体計算における C-HSMAC 法と SOLA 法の収束特性. 土木学会論文集, Vol. 48, pp. 197-202, 2003.
- 7) 牛島省, 奥山洋平, 藤田学, 瀬津家久. C-HSMAC 法を用いる 3 次元非構造コロケート格子上的並列流体計算法. 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 347-354, 2004.
- 8) 谷口健男. FEM のための要素自動分割. 森北出版株式会社, 1994.
- 9) U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- 10) R. Jyotsna and S. P. Vanka. Multigrid calculation of steady, viscous flow in a triangular cavity. *J. Comput. phys.*, Vol. 122, pp. 107-112, 1995.
- 11) C. J. Ribbens, L. T. Watson, and C. Y. Wang. Steady viscous flow in a triangular mesh. *J. Comput. Phys.*, Vol. 112, pp. 173-181, 1994.

(2004.9.30 受付)