

降雨流出システムの確率応答特性

STOCHASTIC RESPONSE CHARACTERISTICS OF RAINFALL RUNOFF SYSTEM

田中 岳

Gaku TANAKA

正会員 博士(工学) 北海道大学助手 大学院工学研究科 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

Rainfall-runoff phenomena generally belong to a random process. Thus, a rainfall runoff system is described by random differential equations. However, the stochastic response characteristics of rainfall runoff systems for a larger basin are not clear. In this paper, the Kinematic Wave model is used as a rainfall runoff system, derivation of theoretical differential equations to calculate the first- and second-order moments of discharge is shown. The validity of derived equations is shown by the results of simulation. By using a similar way, estimation of the higher-order moments of discharge output and its probability density function that change with time is possible. The results of this study can be applicable to the evaluation method of models based on their stochastic response characteristics.

Key Words: *random differential equation, Kinematic Wave model, random process, stochastic response characteristics*

1. はじめに

治水計画, 災害予報問題において, 河川下流域に人口と社会資本が集中し, 広い集水面積を有する流域では, 山地流域から都市域に至る全流域一環とした流出解析が必要となる。この場合, 山地小流域が対象となる場合と異なり, 降雨流出過程における河道の役割は無視し得なくなる。全流域一環とした流出解析では, 流域場をある要素に分離(斜面と河道や, 単位流域と河道)し, 各要素に対して多次元の分布型定数系モデル(物理モデル)や集中型定数系モデルを採用する場合, あるいは, 計画上での基準点のみの流況を検討する集中型定数系モデルなどが, 実現象の再現, 治水計画問題の検討, 災害予報問題など, 目的に応じて採用されている。ただし, 計算機の高速化と大容量化に見られる昨今の数値計算技術の進歩は目覚ましいものがあるものの, 災害予報問題においては, 更なる演算処理の高速化が求められるため, 集中型定数系モデルの採用が現実的と考え

られている。その際, モデル選択によって生じる推定精度の評価(あるいは, 集中化の妥当性の評価)が課題となるが, その点については十分に明らかとなっていないのが現状である。

高棹, 宝ら¹⁾は, 異なる降雨流出システムの応答特性の違いを確率論に基づき評価し, 田中, 藤田ら²⁾は, この評価手法を一般化することを目的に, 流出量の確率分布により比較する方法を提案した。藤田を中心とした研究グループでは, 田中, 藤田ら²⁾の提案する降雨流出システムの評価手法を前提に, これまでに, 降雨量の確率特性が既知の条件下で, 貯留型流出モデル^{2, 3, 4, 5)}やKinematic Waveモデル^{2, 6)}の確率応答特性を推定してきた。さらに, 田中^{7, 8)}は, より広い集水面積を有する流域を対象として, 降雨流出システムの確率応答特性を推定した。しかし, 前報⁷⁾においては, 斜面系流出モデルとして矩形斜面を仮定し斜面長分布を考慮するには至っていない。また, 斜面形状が流出量に与える影響を確率論を用いて検

討した例^{8,9)}はあるが、河道効果を考慮しない場合がほとんどである。

本論文は、前報⁷⁾の問題点を修正し、降雨量の確率特性が既知の条件下において、斜面長分布と河道効果を考慮した降雨流出システムの確率応答特性(流出量の平均値と分散)を推定する手法を提案し、シミュレーションに基づき検証するものである。

2. 降雨流出システム

本論文では、単位流域の降雨流出過程として、空間的に一様な降雨を仮定し、斜面系、河道系、各々のシステムに対しては、下式(1), (2)で表されるKinematic Waveモデルを用いることにする。

斜面系流出モデル:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} = r, \\ h = \varepsilon_s q_s^{p_s} \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq l_{sm} \quad (1)$$

h : 水深; q_s : 単位幅流量; r : 降雨強度;

ε_s, p_s : 定数; l_m : 最大斜面長

河道系流出モデル:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = q_{sr} + q_{sl}, \\ a = \varepsilon q^p \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq l \quad (2)$$

a : 河道断面積; q : 流量; ε, p : 定数; l : 河道長

なお,

$$q_{sr} = q_s(l_r, t) \quad (3)$$

$$q_{sl} = q_s(l_p, t) \quad (4)$$

を意味する。 $l_r(=l_r(y))$, $l_p(=l_p(y))$ は、河道に連結された右岸, 左岸斜面の斜面長分布を表している。また, 斜面流れにおいては、斜面長分布に起因した二次元的流れは考慮していない。初期条件および境界条件については、下式を採用する。

$$\text{式(1): } q_s(x, 0) = 0, \quad q_s(0, t) = 0$$

$$\text{式(2): } q(y, 0) = 0, \quad q(0, t) = 0$$

3. 基礎理論

式(1), (2), 各々において h, a を消去すると,

$$\frac{\partial(\varepsilon_s q_s^{p_s})}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} = r \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon q^p)}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = q_{sr} + q_{sl} \quad (6)$$

が得られる。一般に降雨強度 r は、確率変数とみなされ、平均値($\bar{r}$)とそれからの偏差($\tilde{r}$)を用いて、以下のように表すことができる(E : 期待値演算子)。

$$r = \bar{r} + \tilde{r}, \quad E(\tilde{r}) = 0 \quad (7)$$

斜面系への入力となる降雨強度 r が確率変数となると、その出力である単位幅流量 q_s と水深 h , さらには、河道左右岸に連結された斜面からの単位幅流量(斜面末端での単位幅流量) q_{sr} および q_{sl} を入力とした河道系の出力、流量 q と河道断面積 a も確率的に変動し、平均値とそれからの偏差を用いて同様に表される。

$$q_s = \bar{q}_s + \tilde{q}_s, \quad E(\tilde{q}_s) = 0 \quad (8)$$

$$h = \bar{h} + \tilde{h}, \quad E(\tilde{h}) = 0 \quad (9)$$

$$q = \bar{q} + \tilde{q}, \quad E(\tilde{q}) = 0 \quad (10)$$

$$a = \bar{a} + \tilde{a}, \quad E(\tilde{a}) = 0 \quad (11)$$

式(5), (6)中の指数型の確率変数 $q_s^{p_s}$ および q^p については、Bras and Georgakakos¹⁰⁾らが提案した次式を採用する。

$$q_s^{p_s} \approx \alpha_s \bar{q}_s + \beta_s \tilde{q}_s \quad (12)$$

$$q^p \approx \alpha \bar{q} + \beta \tilde{q} \quad (13)$$

式(12), (13)中の係数($\alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta$)は、以下のように与えられている。

$$\alpha_s = \bar{q}_s^{p_s-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} p_s (p_s - 1) \frac{E(\tilde{q}_s^2)}{\bar{q}_s^2} + \frac{1}{6} p_s (p_s - 1) (p_s - 2) \frac{E(\tilde{q}_s^3)}{\bar{q}_s^3} + \dots \right\} \quad (14)$$

$$\beta_s = \frac{\bar{q}_s^{p_s+1}}{E(\tilde{q}_s^2)} \left\{ p_s \frac{E(\tilde{q}_s^2)}{\bar{q}_s^2} + \frac{1}{2} p_s (p_s - 1) \frac{E(\tilde{q}_s^3)}{\bar{q}_s^3} + \frac{1}{6} p_s (p_s - 1) (p_s - 2) \frac{E(\tilde{q}_s^4)}{\bar{q}_s^4} + \dots \right\} \quad (15)$$

$$\alpha = \bar{q}^{p-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} p (p - 1) \frac{E(\tilde{q}^2)}{\bar{q}^2} + \frac{1}{6} p (p - 1) (p - 2) \frac{E(\tilde{q}^3)}{\bar{q}^3} + \dots \right\} \quad (16)$$

$$\beta = \frac{\bar{q}^{p+1}}{E(\tilde{q}^2)} \left\{ p \frac{E(\tilde{q}^2)}{\bar{q}^2} + \frac{1}{2} p (p - 1) \frac{E(\tilde{q}^3)}{\bar{q}^3} + \frac{1}{6} p (p - 1) (p - 2) \frac{E(\tilde{q}^4)}{\bar{q}^4} + \dots \right\} \quad (17)$$

式(8)~(13)を式(5), (6)に代入することで、

$$\frac{\partial(\epsilon_s(\alpha_s \bar{q}_s + \beta_s \tilde{q}_s))}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{q}_s + \tilde{q}_s)}{\partial x} = \bar{r} + \tilde{r} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\epsilon(\alpha \bar{q} + \beta \tilde{q}))}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{q} + \tilde{q})}{\partial y} \\ = (\bar{q}_{sr} + \tilde{q}_{sr}) + (\bar{q}_{sl} + \tilde{q}_{sl}) \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。なお、式(6)中の q_{sr} および q_{sl} については、式(8)より式(3), (4)の関係を用いて表している。式(18), (19)の両辺の期待値を取ることで、

$$\frac{\partial(\epsilon_s \alpha_s \bar{q}_s)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} = \bar{r} \quad (20)$$

$$\frac{\partial(\epsilon \alpha \bar{q})}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \bar{q}_{sr} + \bar{q}_{sl} \quad (21)$$

式(20), (21)をそれぞれ、式(18), (19)より引くことで、平均値からの偏差に関する式(22), (23)が導かれる。

$$\frac{\partial(\epsilon_s \beta_s \tilde{q}_s)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x} = \tilde{r} \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\epsilon \beta \tilde{q})}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} = \tilde{q}_{sr} + \tilde{q}_{sl} \quad (23)$$

式(23)の両辺に $2\epsilon\beta\tilde{q}$ を掛けた後、両辺の期待値を取ることで、流量 q の分散 σ_q^2 (2次モーメント)に関する微分方程式(24)が得られる。

$$\frac{\partial(\beta^2 \sigma_q^2)}{\partial t} + \frac{\beta}{\epsilon} \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial y} = \frac{2\beta}{\epsilon} (E(\tilde{q}\tilde{q}_{sr}) + E(\tilde{q}\tilde{q}_{sl})) \quad (24)$$

式(24)を解く上で、右辺にある右(左)岸斜面末端の単位幅流量 q_{sr} (q_{sl})と河道系での流量 q との相関関数 $E(\tilde{q}\tilde{q}_{sr})(E(\tilde{q}\tilde{q}_{sl}))$ を求める必要がある。これらを考える上で、右(左)岸斜面末端の単位幅流量の代わりに、斜面系での単位幅流量 q_s と河道系での流量 q との相関関数 $E(\tilde{q}\tilde{q}_s)(\equiv C_{2qs})$ を考え、斜面長が l_r (l_l)となる場合の $E(\tilde{q}\tilde{q}_{sr})(\equiv C_{2qs}(l_r, y))(E(\tilde{q}\tilde{q}_{sl})(\equiv C_{2qs}(l_l, y)))$ を推定する。

式(22)の両辺に $\epsilon\beta\tilde{q}$ を、式(23)の両辺に $\epsilon_s\beta_s\tilde{q}_s$ をそれぞれ掛け、各々の両辺の期待値を取った後に加えることで次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\beta\beta_s C_{2qs})}{\partial t} + \frac{\beta_s}{\epsilon} \frac{\partial C_{2qs}}{\partial y} + \frac{\beta}{\epsilon_s} \frac{\partial C_{2qs}}{\partial x} \\ = \frac{\beta}{\epsilon_s} E(\tilde{q}\tilde{r}) + \frac{\beta_s}{\epsilon} E(\tilde{q}_{sr}\tilde{q}_s) + \frac{\beta_s}{\epsilon} E(\tilde{q}_{sl}\tilde{q}_s) \end{aligned} \quad (25)$$

上式を解く上で、河道系での流量 q と入力となる降雨強度 r の相関関数 $E(\tilde{q}\tilde{r})$ を求める必要がある。本論文では、 r が互いに独立な確率変数とし、その自己相関関数については、

$$E(\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)) = \sigma_r^2 \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (26)$$

σ_r^2 : 降雨強度 r の分散; δ : Diracのデルタ関数

を採用し $E(\tilde{q}\tilde{r})$ を求める。その誘導過程は付録1を参照することとし、結果のみを以下に示す。

$$E(\tilde{q}\tilde{r}) = 0$$

また、式(25)中の右辺にある $E(\tilde{q}_{sr}\tilde{q}_s)(E(\tilde{q}_{sl}\tilde{q}_s))$ は、斜面長が l_r と $x(l_l$ と $x)$ のように異なる場合の単位幅流量 q_s の相関関数を表している。それぞれを、 $C_2(l_r, x)$ および $C_2(l_l, x)$ と置き換えると、式(25)は次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\beta\beta_s C_{2qs})}{\partial t} + \frac{\beta_s}{\epsilon} \frac{\partial C_{2qs}}{\partial y} + \frac{\beta}{\epsilon_s} \frac{\partial C_{2qs}}{\partial x} \\ = \frac{\beta_s}{\epsilon} C_2(l_r, x) + \frac{\beta_s}{\epsilon} C_2(l_l, x) \end{aligned} \quad (27)$$

斜面長の違いを (x_1, x_2) とし、単位幅流量 q_s の相関関数 $C_2(x_1, x_2)$ については、入力となる降雨強度 r が互いに独立な確率変数として、既に田中⁸⁾が誘導しているので結果のみを以下に示す。

$$\frac{\partial(\beta_{s1}\beta_{s2}C_2)}{\partial t} + \frac{\beta_{s2}}{\epsilon_s} \frac{\partial C_2}{\partial x_1} + \frac{\beta_{s1}}{\epsilon_s} \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = \frac{1}{\epsilon_s^2} c \sigma_r^2 \quad (28)$$

c : 大きさ1の時間の次元を持つ定数

なお、 (β_{s1}, β_{s2}) は、異なる斜面長 (x_1, x_2) に対して、それぞれ式(15)により定義される。

以上より、河道系での流量 q の平均値 $\bar{q}$ (1次モーメント)が、式(20), (21)を解くことで、一方、流量の分散 σ_q^2 (2次モーメント)は、式(24), (27)および式(28)を解くことで求められる。

4. 理論解の検証と考察

4.1 降雨流出システムの無次元化

本論文にて採用された降雨流出システム(式(1), (2))は、斜面、河道各系において一定値を有する四つのモデルパラメータ($\epsilon_s, p_s, \epsilon, p$)と、地形特性量として、連結された河道上にて変動する斜面長(l_r, l_l)、および河道長 l を含む。ここで、これらを集約化するため、次式により式(1), (2)を無次元変量を用いて記述する。

$$h = h_* H, q_s = q_* Q_s, r = r_* R, a = a_* A, q = q_* Q,$$

$$t = t_* T, x = x_* X, y = y_* Y$$

変量(H, Q_s, R, A, Q, T, X, Y)は、各々次元を有する変量(h, q_s, r, a, q, t, x, y)の無次元変量を表し

ている。なお、無次元化基準量(添え字, *)には、次式を採用した。

$$h_* = t_* r_*, q_{s_*} = x_* r_*, t_* = \varepsilon_s x_*^{p_s} r_*^{p_s - 1},$$

$$a_* = t_* q_{s_*}, q_* = y_* q_{s_*}$$

ただし、 $r_* = \bar{r}$ (平均降雨強度)、 $x_* = \bar{l}_s$ (平均斜面長)、 $y_* = 1$ 。結果のみを示すと、式(1)、(2)は、以下のように表される。

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q_s}{\partial X} = R, \\ H = Q_s^{p_s} \end{cases}, \quad 0 \leq X \leq L_{sm} \quad (29)$$

L_{sm} : 無次元最大斜面長

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial Y} = Q_{sr} + Q_{sl}, \\ A = EQ^p \end{cases}, \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad (30)$$

なお、

$$E = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} x_*^{p - p_s - 1} r_*^{p - p_s} y_*^p$$

式(29)、(30)を解く上での境界条件および初期条件については、次元を有する場合と同様である。以後、式(29)、(30)を基礎式として議論を進める。

4.2 シミュレーション

降雨強度 R が互いに独立な確率変数の場合において理論的に推定された河道での流量 Q の平均値 $\bar{Q}$ および分散 σ_Q^2 は、Bras and Georgakakos¹⁰⁾ が提案する近似式(12)、(13)を、指数型の確率変数に用いることで導かれている。ここで、推定された理論解の妥当性をシミュレーションに基づいて検証する。シミュレーションとは、模擬的に発生された(離散的な)観測降雨時系列 R_{d_i} ($i=1, 2, 3, \dots$) を、基本となる降雨流出システム(式(29)、(30))に直接入力することで得られた標本(ハイドログラフ)より、その統計的特性を求めるものである。

観測降雨 R_{d_i} と降雨強度 R との間には、次式が成立しており、

$$R_{d_i} = \frac{1}{\Delta T} \int_{(i-1)\Delta T}^{i\Delta T} R(\tau) d\tau \quad (35)$$

ΔT : 観測間隔

R が互いに独立な確率変数の場合には、 R_{d_i} もまた確率変数とみなされ、 R のモーメント(平均値と分散)との間には以下の関係が成立する。誘導過程については、原論文^{3,4)}を参照されたい。

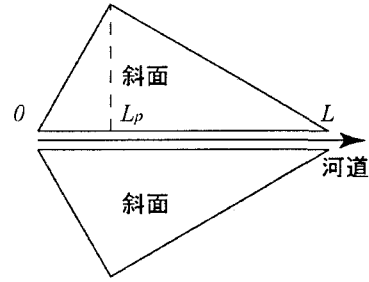


図-1 モデル化された単位流域

$$\bar{R}_{d_i} = \frac{1}{\Delta T} \int_{(i-1)\Delta T}^{i\Delta T} \bar{R}(\tau) d\tau \quad (36)$$

$$\sigma_{R_d}^2 = \frac{C\sigma_R^2}{\Delta T} \quad (37)$$

$\bar{R}_{d_i}$: 観測降雨 R_{d_i} の平均値;

$\sigma_{R_d}^2$: 観測降雨 R_{d_i} の分散; $c = c_* C$; $c_* = t_*$

シミュレーションに用いる確率変数とみなされた R_{d_i} ($= \bar{R}_{d_i} + \tilde{R}_{d_i}$; $\tilde{R}_{d_i}$: 平均値からの偏差)は、計算条件として与える降雨強度 R の平均値 $\bar{R}$ と式(36)よりその平均値 $\bar{R}_{d_i}$ を求め、偏差 $\tilde{R}_{d_i}$ については、実際の観測降雨の統計的解析に基づき、次の指数分布(λ : 定数)を満足するものとして与える。

$$f(\tilde{R}_{d_i}) = \lambda e^{-\lambda(\tilde{R}_{d_i} + \frac{1}{\lambda})}, \quad \tilde{R}_{d_i} \geq -\frac{1}{\lambda} \quad (38)$$

$$\sigma_{R_d}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (39)$$

計算条件として、 $\bar{R}$ には降雨継続時間 $T_r = 2.0$ の矩形降雨波形を採用し、確率変動特性については、以下により定めた。

$$\Delta T = 0.1, \quad \lambda = 2$$

また、斜面長分布は、同一の三角形斜面が河道兩岸に連結された単位流域を仮定し(図-1)、 $L_{sm} = 2.0$ 、その発生位置 L_p と河道長 L の比が異なる以下の三つのタイプ、

$$\frac{L_p}{L} = 0.0, 0.5, 1.0$$

と、 $L_{sm} = 1.0$ の矩形斜面を採用した。式(29)、(30)中のパラメータについては、表-1にまとめている。図-2は、式(20)と(21)より推定された流域末端($Y=1$)における流量の平均値 $\bar{Q}$ とシミュレーション結果、図-3は、式(24)、(27)および式(28)より推定された流量の分散 σ_Q^2 ($Y=1$) とシミュレーション結果との比較をそれぞれ示している。実線はシミュレーション結果を、破線は理論解をそれぞれ表している。四つのパ

表-1 流出モデルのパラメータ

p_s	p	E
0.6	0.690	0.4315

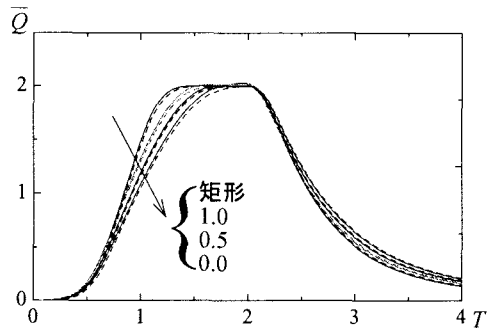


図-2 シミュレーション結果(平均値)

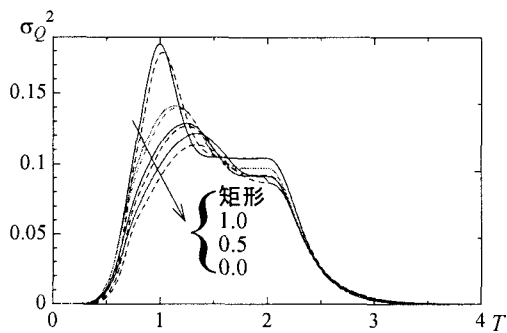


図-3 シミュレーション結果(分散)

ラメータ($\alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta$)については、式(14)~(17)の第一項のみを採用し与えた。流量の平均値(図-2)においては、両者は非常に良く一致している。分散(図-3)においても、河道での到達時間近傍で両者の間に若干の差異が見られるものの、全体としてその一致度は良好であると言える。

4.3 斜面と河道効果を考慮した確率応答特性

計算に用いた観測降雨量 R_{d_i} については、前節同様の矩形降雨波形に加え、降雨強度 R の平均値 $\bar{R}$ のピーク時刻 T_p と T_r の比が0.2(0.3)0.8と異なる三つのタイプの三角形降雨波形(図-4)となるように式(36)より $\bar{R}_{d_i}$ を定義し、分散 $\sigma_{R_d}^2=0.25(\lambda=2.0)$ とする。斜面長分布については、 $L_{sm}=1.0$ の矩形斜面と、 $L_{sm}=2.0$ 、その発生位置 L_p と河道長 L の比が0.1(0.2)0.9の三角形斜面とする。流域面積は、全て2.0となっている。

図-5, 6は、流域末端($Y=1$)からの流量の平均値 $\bar{Q}$ および分散 σ_Q^2 について、降雨波形ごとに斜面長分布を変化させた計算例を示している。斜面系でのKinematic Waveモデルの確率応答特性²⁾同様、河道での到達時間近傍で σ_Q^2 の最大値を有し、その値は、最大斜面長の発生位置 L_p が流域末端に近づくほど

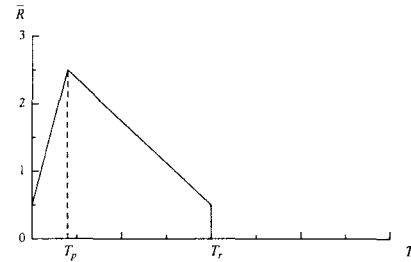


図-4 三角形降雨波形の例

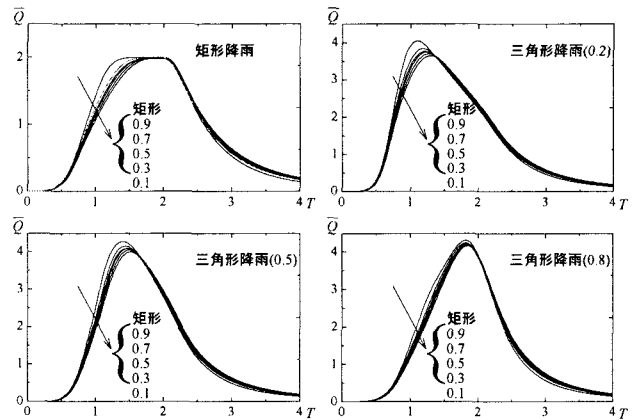


図-5 確率応答特性(平均値)

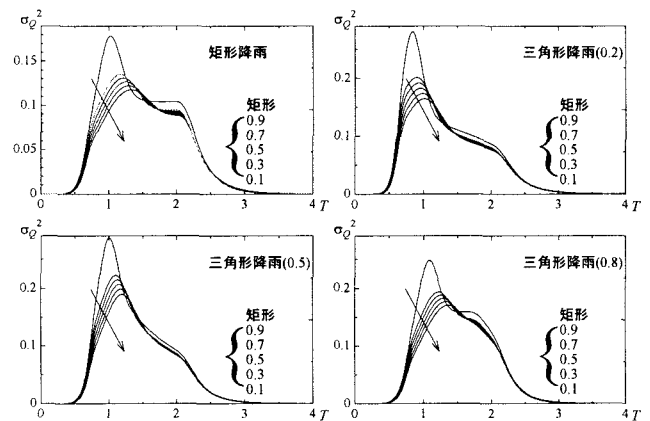


図-6 確率応答特性(分散)

大きくなるが見て取れる。到達時間近傍でのこれらの変化においては、斜面長分布に伴う流域末端での流出変化と対応している。また、非線形系($p_s \neq 1$, $p \neq 1$)の場合には、平均降雨強度の影響を受けて、 σ_Q^2 が時間的に変動することが、図-6からもまた誘導された理論式からもわかる。図-5, 6から、降雨波形の違いに依らず、矩形斜面として扱う場合が、最大の $\bar{Q}$ を発生させ、その発生時の σ_Q^2 も最大となる。このことは、降雨流出現象を集中化する際に、斜面長分布の取り扱いが推定精度に関わることを示唆している。ただし、今回の計算例では、斜面形状の違いが最大の $\bar{Q}$ 発生時の確率特性に与える影響が、降雨波形が後方集中型になる(ピーク時刻 T_p と T_r の比

が1.0に近づく)につれて、弱まる傾向にあると言える。

5. まとめ

本論文では、空間的に一様な降雨量の確率特性が既知の条件下(互いに独立な確率変数として)、斜面系、河道系共にKinematic Waveモデルを採用し、斜面長分布と河道流れの効果を考慮した流域末端での流量の確率特性(平均値および分散)を理論的に求める手法を提案した。本論文にて提案した降雨流出システムの確率応答特性を推定する手法を用いることで、降雨量の確率分布や左右岸斜面の斜面長分布に依らず、流域末端における流量の確率分布型および時間変化する確率密度関数の推定と、これらを考慮した降雨流出システムの集中化の評価も可能となる。

付録1 $E(\tilde{q}\tilde{r})$ の推定

式(22), (23)より、以下の特性方程式が得られる。

$$\frac{d\tilde{q}_s}{dt} + D_s \tilde{q}_s = \frac{\tilde{r}}{\epsilon_s \beta_s}, \quad D_s = \frac{1}{\beta_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial t} \quad (a1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\epsilon_s \beta_s} \quad (a2)$$

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} + D\tilde{q} = \frac{1}{\epsilon\beta}(\tilde{q}_{sr} + \tilde{q}_{sl}), \quad D = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (a3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\epsilon\beta} \quad (a4)$$

式(a1), (a3)をそれぞれ解き、式(a1)の結果を式(a3)に代入することで、

$$\begin{aligned} \tilde{q} = & e^{-\int^t D(\tau) d\tau} \\ & \times \int_{t_0}^t \frac{1}{\epsilon\beta} \left(e^{-\int^{\tau_1} D_s(\tau_3) d\tau_3} \int_{\tau_{0r}}^{\tau_1} \frac{\tilde{r}(\tau_4)}{\epsilon_s \beta_s} e^{\int^{\tau_4} D_s(\tau_5) d\tau_5} d\tau_4 \right. \\ & \left. + e^{-\int^{\tau_1} D_s(\tau_3) d\tau_3} \int_{\tau_{0l}}^{\tau_1} \frac{\tilde{r}(\tau_4)}{\epsilon_s \beta_s} e^{\int^{\tau_4} D_s(\tau_5) d\tau_5} d\tau_4 \right) e^{\int^{\tau_1} D(\tau_2) d\tau_2} d\tau_1 \end{aligned} \quad (a5)$$

なお、 t_0 , τ_{0r} および τ_{0l} は、各特性曲線の起点を意味する。上式の両辺に r を掛けて期待値を取り、式(26)を代入した後、若干の計算を施すと(ただし、第一項のみ記述)、

$$\begin{aligned} z_r = & e^{-\int^t D(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t \frac{1}{\epsilon\beta} e^{-\int^{\tau_1} D_s(\tau_3) d\tau_3} \\ & \times \left(\int_{\tau_{0r}}^{\tau_1} \frac{1}{\epsilon_s \beta_s} \sigma_r^2 \delta(t - \tau_4) e^{\int^{\tau_4} D_s(\tau_5) d\tau_5} d\tau_4 \right) e^{\int^{\tau_1} D(\tau_2) d\tau_2} d\tau_1 \quad (a6) \\ = & f_a(t) \int_{t_0}^t f_b(\tau_1) c \sigma_r^2 U(t - \tau_1) d\tau_1 = 0 \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$f_a(t) = \frac{1}{\epsilon_s \beta_s} e^{-\int^t D(\tau) d\tau + \int^t D_s(\tau) d\tau}$$

$$f_b(t) = \frac{1}{\epsilon\beta} e^{-\int^t D_s(\tau) d\tau + \int^t D(\tau) d\tau}$$

第二項も同様な結果をなるため、

$$E(\tilde{q}\tilde{r}) = 0$$

が導かれる。

参考文献

- 1) 高棹琢馬, 宝馨, 楠橋康広: 洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, pp. 221-235, 1985.
- 2) 田中岳, 藤田睦博, 工藤睦信, 内島邦秀: Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルの比較-周波数特性と確率特性-, 土木学会論文集, No. 614/II-46, pp. 21-36, 1999.
- 3) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆, 橋本識秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究-降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No. 515/II-31, pp. 1-11, 1995.
- 4) 田中岳, 藤田睦博, 熊谷進: 貯留型流出モデルの確率応答特性, 水工学論文集, 第43巻, pp. 1-6, 1999.
- 5) 田中岳, 藤田睦博, 熊谷進, 海藤勝: 貯留型流出モデルの確率応答特性(2), 水工学論文集, 第44巻, pp. 13-18, 2000.
- 6) Gaku Tanaka, Mutsuhiro Fujita and Susumu Kumagai: Estimating of the Probability Density Function of Discharge for Flood Runoff, Water 99 Joint Congress, 2nd International Conference on Water Resources & Environment Research, Handbook and Proceedings, Vol. 2, pp. 1160-1166, 1999.
- 7) 田中岳: Kinematic Waveモデルの確率応答特性に関する基礎的研究, 水工学論文集, 第47巻, pp. 229-234, 2003.
- 8) 田中岳: 斜面長分布を考慮したKinematic Waveモデルの確率応答特性-降雨量が独立な確率変数の場合-, 水工学論文集, 第48巻(1), pp. 49-54, 2004.
- 9) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文集, 第314号, pp. 75-86, 1980.
- 10) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting-A Statistical Linearization Approach-, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 95-105, 1980.

(2004. 9. 30 受付)