

移流分散現象における分散長と透水係数の空間分布特性の関係について

RELATIONSHIP BETWEEN SPATIAL DISTRIBUTIONS OF HYDRAULIC CONDUCTIVITY AND DISPERSIVITY IN ADVECTION DISPERSION PHENOMENA

齋藤 雅彦¹・川谷 健²
Masahiko SAITO and Takeshi KAWATANI

¹正会員 博士（工学） 神戸大学助手 都市安全研究センター（〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1）

²フェロー会員 Ph. D. 神戸大学教授 都市安全研究センター（〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1）

It is known that observed macroscopic dispersivity depends on observation scale, so that a single value cannot represent the field property for dispersion. In this study, numerical simulations of the advection dispersion phenomena in various random-permeability fields generated by using stochastic fractal model were carried out to investigate the relationship between spatial distributions of hydraulic conductivity and dispersivity. The results show that various concentration distributions occur even when the hydraulic conductivities of flow fields are statistically the same. It is also shown that a dispersivity distribution model expressed by function of scale can well reproduce the ensemble mean of concentration distributions.

Key Words: groundwater, dispersivity, hydraulic conductivity, heterogeneity, fractal, solute transport

1. 序論

地下水汚染問題等の地盤内における水溶性物質の輸送について解析する場合、通常は浸透流の基礎式と移流分散方程式が用いられる。とくに移流分散方程式を用いる際には、分散係数を適切に設定する必要がある。分散係数は、実流速と分散長を用いて表現されるが、間隙内の流路の不規則性によって生じる微視的分散、および浸透場の不均一性に由来する流速分布の不規則性によって生じる巨視的分散に区別される。しかしながら、巨視的分散長は、汚染の拡大範囲（観測スケール）に依存することが明らかになっており^{1), 2)}、単一の値で代表することは困難であると考えられる。また、実際の汚染物質の拡散状況は、特定の水みちに沿って帯状に広がり、移流分散方程式では追跡が困難なケースも報告されている³⁾。

このような問題は、実際の帶水層における物性値（とくに透水係数）の空間分布を把握することが不可能であるために、均一な流れ場を用いて分散現象を拡散現象と同様に扱わざるを得ないことに起因すると思われる。言い換えれば、透水係数の空間分布が既知であるならば、流速分布の不規則性は移流項に反映されるため、巨視的分散長は不要となり、分散項は透水係数空間分布の解像

度以下の分散（微視的分散）のみを考慮すればよいことになる。無論、空間分布を詳細に把握することは現実には不可能であるが、透水係数の空間分布モデルを用いることによって任意の統計的性質を持つ分布を数値的に発生することは可能である。たとえば中川ら⁴⁾は、自己回帰モデルに基づいて、透水係数の空間分布の性質を表す積分特性距離と巨視的分散の関係について考察している。ただし、積分特性距離も観測スケールに対する依存性を有しており、これを基準とした議論には疑問が残る。

本研究では、著者らによって提案されている確率的フラクタルモデル⁵⁾⁻⁸⁾に基づいた透水係数の空間分布モデルを用いて、いくつかの統計的性質の異なる透水係数分布を多数発生させ、平面2次元の移流分散現象の数値シミュレーションを行い、その空間分布特性と分散長の関係について考察した。

2. 基礎方程式と透水係数の空間分布モデル

(1) 浸透流の基礎方程式

平面2次元被圧帶水層内における定常地下水の基礎方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(BK_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(BK_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 x, y は空間座標、 h は水頭、 B は帶水層厚、 K_x, K_y はそれぞれ x 方向、 y 方向の透水係数である。

(2) 移流分散方程式

2次元の地下水水流による水溶性物質の輸送過程の基礎式（移流分散方程式）は、吸脱着や湧き出し・吸い込みが生じない場合、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= -\frac{\partial(v_x c)}{\partial x} - \frac{\partial(v_y c)}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 t は時間、 c は濃度、 $D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{yy}$ はそれぞれ分散係数テンソルの成分、 v_x, v_y はそれぞれ x 方向、 y 方向の実流速である。また、式(2)における分散係数テンソルの成分は、次式で与えられる。

$$D_{xx} = \frac{\alpha_L v_x^2}{V} + \frac{\alpha_T v_y^2}{V} + D_M \quad (3)$$

$$D_{yy} = \frac{\alpha_T v_x^2}{V} + \frac{\alpha_L v_y^2}{V} + D_M \quad (4)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{(\alpha_L - \alpha_T)v_x v_y}{V} \quad (5)$$

ここに、 $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 、 α_L は縦方向分散長、 α_T は横方向分散長、 D_M は分子拡散係数である。

式(2)を通常のガラーキン法により離散化すると、移流項が卓越する場合に解が不安定になることが知られている。この不安定性を抑制するため、本研究では定常解析には風上有限要素法の一つである SUPG 法^[9-11]を用い、また非定常解析には特性曲線ガラーキン法^[12]を用いた。

(3) 透水係数の空間分布モデル

透水係数の空間分布は著者らによって提案されている確率的フラクタルモデル^[5-8]に基づいた空間分布モデルを用いて発生させた。これは、透水係数の対数変換値 ($\gamma = \log(K)$) のパワースペクトル密度関数が次式のように $f^{-\zeta}$ 型となるものであり、実地盤における透水係数の空間分布特性を容易に模擬し得ることを確認している^[6, 7]。

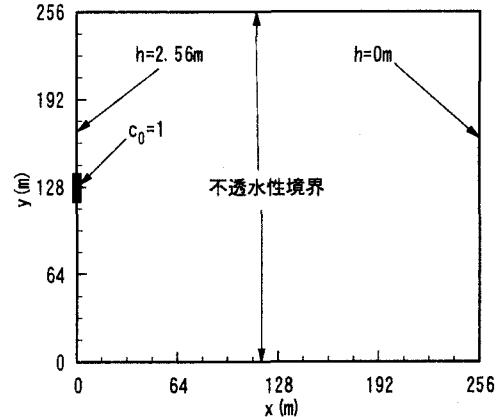


図-1 解析領域

$$S(|f|) \propto |f|^{-\zeta} \quad (6)$$

ここに、 f は空間周波数ベクトル、 $S(|f|)$ はパワースペクトル密度、 ζ は空間的な相関性を表すパラメータであり、2次元モデルの場合 $\zeta=2$ である。このとき、自己相関関数を指數関数で近似した場合の相関長（積分特性距離）は、解析対象スケールの0.1倍程度となる。

また、本モデルにおけるYの分散は、空間解像度の対数値に比例することがわかっている。すなわち、解像度を N 、比例定数を λ とすると以下のように表せる。

$$\sigma^2 = \lambda \log_{10} N \quad (7)$$

ここに、 σ は標準偏差、解像度 N は、ある正方形領域を $N \times N$ 個の正方形に分割することを意味する。

以上のように、本モデルでは透水係数の空間分布特性は、相関性を表すパラメータ ζ と、ばらつきの大きさを表すパラメータ λ によって特徴付けられる。

3. 解析条件

図-1に解析領域の概要を示す。解析領域は256 m × 256 mの正方形領域であり、 $x=0m$ 、 $124m \leq y \leq 132m$ において $c_0=1$ の濃度を境界条件として与える。流れ場の境界条件は、 $y=0m$ や $y=256m$ は不透水性境界、 $x=0m$ で $h=2.56m$ 、 $x=256m$ で $h=0m$ 、すなわち平均動水勾配は 1/100 である。透水係数の平均値は、 $K_m=10^3 \text{ cm/s}$ とし、帶水層の層厚は $B=1.0m$ とした。また、間隙率は $\phi=0.25$ とし、実流速はダルシー流速 q_x, q_y に対して $v_x=q_x/\phi, v_y=q_y/\phi$ とした。

表-1 解析ケース

		σ	ζ
Case-1	a	0.2	2
	b	0.3	
	c	0.4	
	d	0.5	
	e	0.6	
Case-2	a	0.2	2.2
	b	0.3	
	c	0.4	
	d	0.5	
	e	0.6	

解析メッシュの要素サイズは全要素で2m×2mの正方形要素、すなわち要素数は128×128個である。各要素に与える分散長（微視的分散長）は、縦方向分散長 $\alpha_L=0.1\text{m}$ 、横方向分散長 $\alpha_T=0.01\text{m}$ とし、このとき平均的なペクレ数は、以下のように10となり、移流項が卓越する。

$$P_e = \frac{v_x \Delta x}{2D_{xx}} = \frac{v_x \Delta x}{2 \times \alpha_L \times v_x} = \frac{2.0}{2 \times 0.1} = 10 \quad (8)$$

透水係数の空間分布は、式(6)における ζ 、および式(7)における σ を変化させて表-1に示す10ケースとした。

4. 定常移流分散解析と期待値

図-2は、Case-1cにおける透水係数分布($=\log_{10}K$)の例であり、(a)、(b)の統計的性質は同一で、使用した乱数系列が異なる。図-3はこれら透水係数分布を用いた場合の定常状態における濃度分布である。図-3より、透水係数分布の統計的性質が同じでも、濃度分布は大きく異なることがわかる。たとえば、図-3(a)は下流まで高濃度の領域が広がっているのに対し、図-3(b)では高濃度領域は汚染源付近のみであり、しかも大きく蛇行している。

このような濃度分布を従来の移流分散方程式で予測することは不可能であるが、濃度分布の期待値は何らかの形で透水係数分布の統計的性質を反映しているはずである。このため、以下では表-1に示した10ケースに対して、それぞれ1000個の透水係数分布を発生し、濃度の期待値分布($=\bar{c}$)を求めた。ここで、 \bar{c} は $y=128\text{m}$ の直線に対して対称であるべきだが、このようにして得られる期待値は厳密には対称にならないため、 $y=128\text{m}$ に対する対称点の平均値を求め対称となるように補正した。図-4は、Case-1aおよびCase-1cに対するこの分布である。透水係数のばらつきが大きいCase-1cでは横方向の広がりが大きくなっていることがわかる。

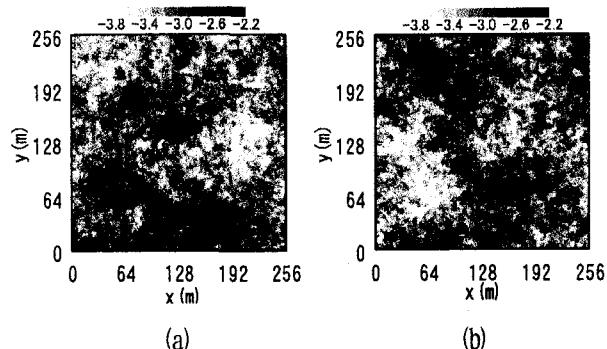


図-2 透水係数（対数値）分布の例 (Case-1c)

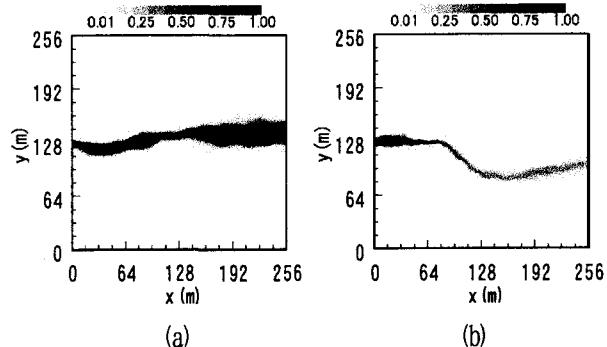
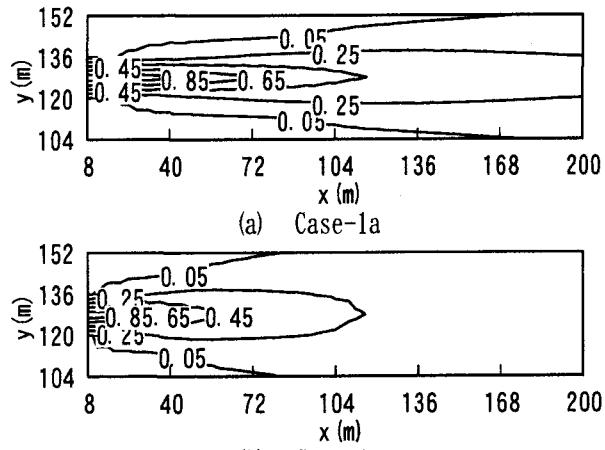


図-3 濃度分布の計算例 (Case-1c)

図-4 濃度の期待値 (\bar{c}) の計算例

5. 分散長の逆解析

(1) 単一の分散長による期待値分布の再現

先に求めた濃度の期待値分布に対し、従来の均一場における移流分散方程式によって再現を試みる。逆解析の推定対象パラメータは、縦方向分散長 α_L と横方向分散長 α_T である。また、再現の対象とする175個の観測点の配置を図-5に示す。

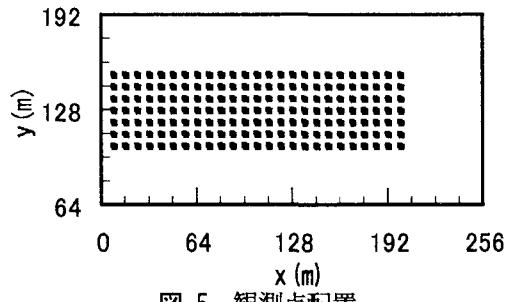


図-5 観測点配置

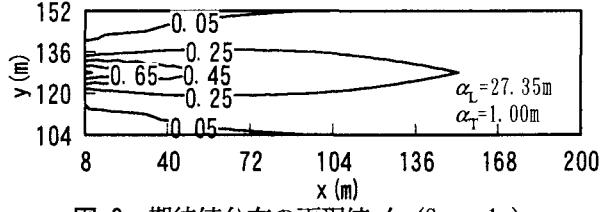


図-6 期待値分布の再現値 c' (Case-1c)

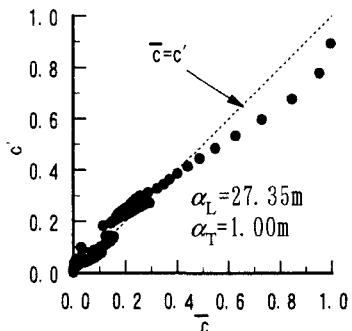


図-7 \bar{c} に対する c' のプロット (Case-1c)

最小化する目的関数は、以下のとおりである。

$$f(\alpha_L, \alpha_T) = \sum_{i=1}^{175} (\bar{c}_i - c'_i)^2 \quad (9)$$

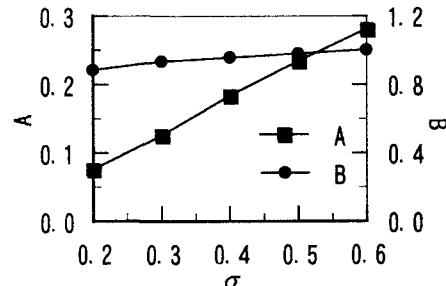
ここに、 i は観測点番号、 c' は濃度の推定値である。

目的関数の最小化手法は、非線形最適化手法の一種である制約つきシンプレックス法^{13), 14)}を用いた。

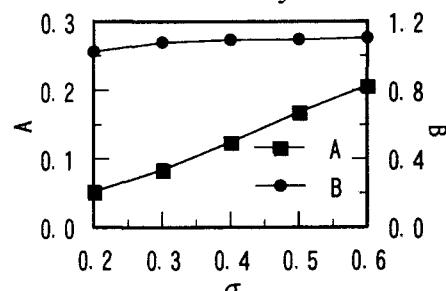
図-6は、Case-1cに対する再現結果、図-7は、 \bar{c} に対する c' のプロットである。また、このときの α_L と α_T の同定値は、それぞれ $\alpha_L = 27.35\text{m}$, $\alpha_T = 1.00\text{m}$ 、目的関数値は 0.227 となった。これは、 α_L については解析スケールの 1/10 程度、 α_T/α_L は約 1/27 であり、従来の知見¹⁾とほぼ一致している。しかしながら、図-7より、低濃度の領域では比較的良好に再現されているが、 $\bar{c} > 0.6$ においては総じて濃度を低く算出しており、単一の分散長による期待値の再現の限界が表れていると考える。

(2) 汚染原からの距離に依存する分散長を用いた逆解析

序論にて述べたように、巨視的分散長は流下距離に依存すると考えられる。このような性質を表現するために、分散長は汚染源からの距離に依存して分布するものと考え、以下の式を仮定した。



(a) Case-1 ($\zeta=2.0$)



(b) Case-2 ($\zeta=2.2$)

図-8 パラメータ (A, B) の同定結果 ($C=0.1$)

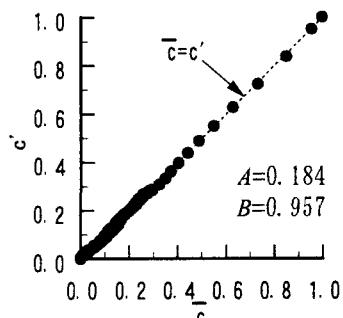


図-9 \bar{c} に対する c' のプロット ($C=0.1$, Case-1c)

$$\alpha_L = A \times r^B, \quad \alpha_T = C \times \alpha_L \quad (10)$$

ここに、 r は汚染源からの距離、 A 、 B および C はパラメータである。

図-8は、式(10)における C については $C=0.1$ とし、 A 、 B を同定の対象とした場合の同定結果である。これにより、パラメータ A は、透水係数のばらつきの大きさを表す σ にほぼ比例することがわかる。一方、パラメータ B の σ に対する依存性は非常に小さく、ほぼ一定値となる。また、 B の範囲は $\zeta=2.0$ のとき 0.9~1.0、 $\zeta=2.2$ のとき 1.0~1.1 となっており、相関性を表す ζ の変化に明確に対応していること、および分散長はほぼ汚染源からの距離に比例することがわかる。図-9は、図-7と同様に Case-1cにおける \bar{c} に対する c' のプロットである。図-7と比較すると、式(10)を用いることによって、低濃度から高濃度までほぼ完全に定常状態における濃度の期待値が再現可能であることがわかる。表-2にすべてのケースについて目的関数値と決定係数 (\bar{c} と c' の相関係数の 2乗値) を示す。 σ が大きくなると再現性はやや低下するが、決定係数はすべて 0.99 を上回っている。

表-2 目的関数値と決定係数 ($C=0.1$)

		目的関数値	決定係数
Case-1	a	0.0066	0.999
	b	0.0097	0.999
	c	0.0125	0.998
	d	0.0160	0.996
	e	0.0247	0.994
Case-2	a	0.0079	0.999
	b	0.0128	0.998
	c	0.0154	0.997
	d	0.0190	0.995
	e	0.0247	0.993

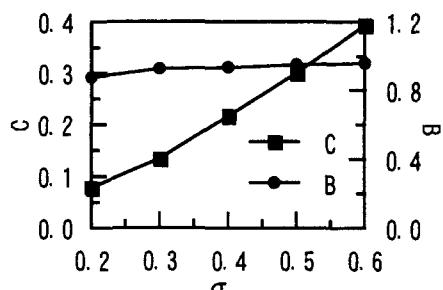


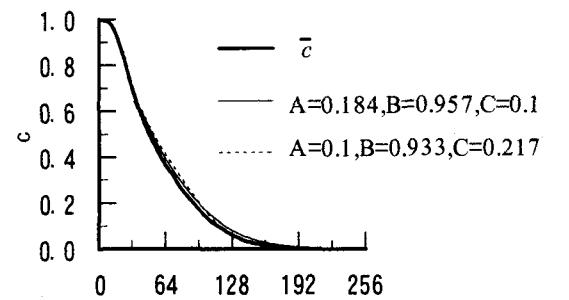
図-10 パラメータ (B, C) の同定結果
($A=0.1$, Case-1a~e)

図-10は、Case-1a~eに対し $A=0.1$ として B, C を同定した場合の同定結果である。この場合、 C は σ にほぼ比例し、 B は C を固定した場合と同様に0.9~1.0の範囲にある。また、再現精度は $C=0.1$ とした場合より σ が大きい場合にわずかながら良好であった。これより、定常状態の期待値分布の再現には、パラメータ B がとくに重要であり、 A と C は明確に区別されないことがわかる。これは定常状態を再現しているためと考える。

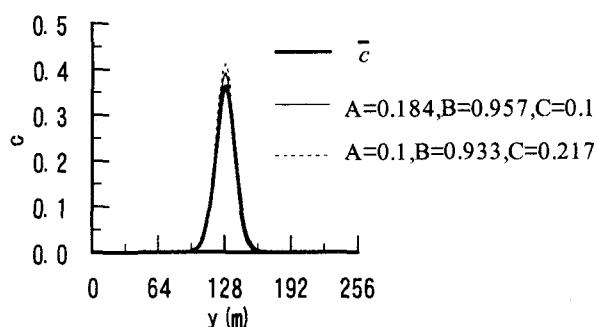
また、ここでは解析領域を $256\text{m} \times 256\text{m}$ 、解像度 $N=128$ と設定したが、同一解像度で解析領域を M 倍に拡大すると、要素サイズが M 倍となる。ここで $\zeta \approx 2.0$ ならば自己相似性により式(7)が成り立つので、分散 σ^2 は変化しない。従って、ペクレ数を同じ値に設定する(=微視的分散長も M 倍する)ならば、解析スケールを変化させても今回と同様の結果が得られると考えられる。

6. 非定常解析による検証

ここでは、先に得られた同定結果を用いて非定常移流分散解析を行い、その妥当性を検証する。表-1に示したCase-1cについて、透水係数分布を800回発生させ、各時刻における濃度の期待値 \bar{c} を求める。次に、定常解析で同定された式(10)のパラメータを用いてその再現性を検討する。図-11は、 $t=3000$ 日の $y=128\text{m}$ 断面と $x=64\text{m}$ 断面における濃度分布を示している。これより、非定常過程でも概ね良好な再現性を有していることがわかる。

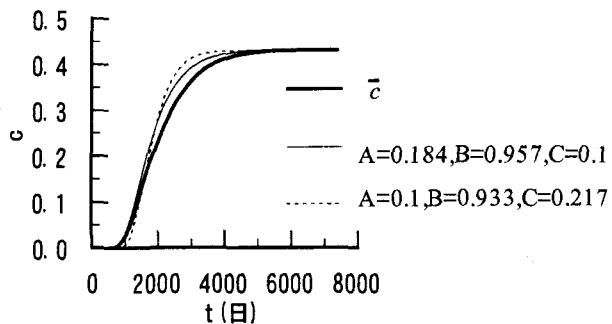


(a) $y=128\text{m}$ 断面

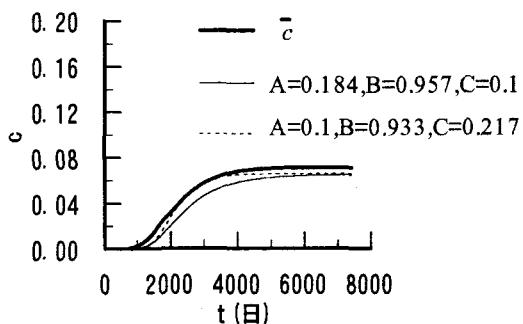


(b) $x=64\text{m}$ 断面

図-11 濃度分布 ($t=3000$ 日)



(a) 点 (64m, 128m)



(b) 点 (64m, 110m)

図-12 濃度の時間変化

また、図-12に、点(64m, 128m)および点(64m, 110m)における濃度の時間変化を示す。点(64m, 128m)では、パラメータを $C=0.1$ として同定したケースのほうが再現性は良いが、点(64m, 110m)では $A=0.1$ として同定したケースに近い。これより、最適なパラメータは非定常解析から直接同定する必要があると思われる。

7. 結論

本研究では、透水係数が $f^{-\alpha}$ 型のパワースペクトルを持つ空間分布モデルを用いて、定常状態における濃度分布の期待値を計算し、これを用いて透水係数の空間分布特性と移流分散方程式における分散長の関係について考察した。また、非定常解析により、その妥当性を検証した。これらによってえられた結論を以下にまとめる。

- 1) 透水係数分布の統計的性質と同じでもその分布形状によって濃度分布は大きく異なり、これを通常の均一場における移流分散方程式で追跡することは困難である。しかし、期待値を表現することはある程度は可能である。
- 2) 分散長を汚染源からの距離の関数として表現するモデルではほぼ完全に定常状態の期待値分布を再現することができた。その関数形は、スペクトルの傾き α に関するパラメータと標準偏差 σ に関するパラメータに明確に区別された。
- 3) 定常状態の期待値分布から同定されたパラメータは、非定常過程でも有効である。ただし、最適なパラメータを同定するためには非定常解析から直接同定する必要があると思われる。

参考文献

- 1) Gelhar, L.W., Welty, C. and Rehfeldt, K.R.: A Critical Review of Data on Field-Scale Dispersion in Aquifers. Water Resources Research, Vol.28, pp.1955-1974, 1992.
- 2) Neuman, S.P.: On advective transport in fractal velocity and permeability fields, Water Resources Research, Vol.31, pp.1455-1460, 1995.
- 3) 新藤静夫, 唐 常源, 杉江弘行: 地下水環境における地形・地質要因と物質の挙動、及びそれらにかかる人為要因について、文部省環境科学研究報告集, B293-R 12-14, pp.79-99, 1986.
- 4) 中川 啓, 神野健二, 細川土佐男: 不均一浸透場におけるトレーサー輸送の微視的分散と巨視的分散に対する水理学的考察: 水工学論文集, 第42巻, pp. 385-390, 1998.
- 5) 斎藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布に関する理論的考察, 土木学会論文集, No. 645/III-50, pp. 103-114, 2000.
- 6) 斎藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察, 土木学会論文集, No. 694/III-57, pp. 245-258, 2001.
- 7) 斎藤雅彦, 川谷健: 確率的フラクタルモデルを用いた1次元不均質浸透場における透水係数分布の統計的性質について, 応用力学論文集, Vol. 5, pp. 491-498, 2002.
- 8) 斎藤雅彦, 川谷健: 1次元および2次元フラクタル浸透場の数値モデルとその性質について, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第6号, pp. 193-200, 2002.
- 9) T. J. R. Hughes and A. Brooks: A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion, Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, ASME, AMD-34, pp.19-35, 1979.
- 10) A. N. Brooks and T. J. R. Hughes: Streamline-upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 32, pp.199-259, 1982.
- 11) T. J. R. Hughes and A. Brooks: A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure, Finite Elements in Fluids, 4 John Wiley & Sons, London, pp.47-65, 1982.
- 12) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: The Finite Element Method, Vol.3, (5th ed.), Butterworth-Heinemann, pp.13-63, 2000.
- 13) 清水清孝: システム最適化理論, コロナ社, pp. 92-99, 1976.
- 14) 川谷健, 斎藤雅彦: 制約付きシングルエクス法による地下水流の逆解析, 土地造成工学研究施設報告, 7, pp. 105-124, 1989.

(2004. 9. 30 受付)