

分布モデル化による透水係数同定問題の 非適切性克服と解の観測更新感度向上

COUNTERMEASURES FOR ILL-POSEDNESS OF IDENTIFIED
PERMEABILITIES THROUGH A DISTRIBUTED MODEL AND ENHANCED
SENSITIVITY OF OBSERVATION UPDATING TO IDENTIFYING SOLUTION

浜口 俊雄¹
Toshio HAMAGUCHI

¹正会員 農博 京都大学防災研究所 (〒611-0011 宇治市五ヶ庄)

This study shows that the distributed model of permeabilities in geostatistics is proposed and uniquely solved in the numerical test. A hypothetical aquifer divided into twenty piecewise zones is designed. Twenty constant-permeabilities are individually identified and some of them result in inaccurate solution. The difficulties of an inverse problem with ill-posedness prevent us from getting the stable, unique and accurate solutions of identified permeabilities. A distribution model of permeabilities mapped through geostatistics is herein proposed. A sensitivity of observation updating to the parameters to be identified is then enhanced over the whole area. The mathematical foundation for the advances of the sensitivity is also investigated and discussed. It can be proven that the proposed approach is greatly helpful in identifying a spatial distribution of piecewise permeabilities.

Key Words : permeability, identification, sensitivity of observation updating, ill-posedness, distributed model

1. 序論

広域地下水解析では、観測データの量と質、さらには地層条件を鑑みて、地下水に関する物性値(例えば、透水係数、産出率/比産出率あるいは間隙率/有効間隙率、といった土中の物理定数)の空間分布を設定する。その設定は、解析だけで決める場合は試行錯誤的に順解析を行って決める方法や最適化アルゴリズムで数値計算的に決める方法が一般的である。そのいずれの方法でも観測データはパラメータ同定に重要な役割を果たし、異なる挙動を示すデータの数が多ければ多いほど、地下水モデルパラメータの空間分布は特定し易くなる。こうした所与の観測条件(数量・質・配置など)に対して求める透水係数の区域数が多い場合は非適切な(ill-posed)逆問題となる。例えば不均質な透水係数分布を同定しようとしても、観測点の存在する区域あるいはその隣接区域では観測値に対する更新感度は鋭敏だが、観測点から離れた区域ではその感度も鈍く、その区域の先験的推定値が結果的にあまり修正されず、妥当な同定値に至らないことも多い。本研究はこうした問題に対処し克服すべく、透水係数分布のモデル化をうまく利用し、解の一意性を確保し、領域全体に観測更新感度を高めて、同じ観測条件下であっても従来のモデル化より観測更新の反応が向上するような手法を提案する。さらにその観測更新感度についても、数学

的な観点からも更新感度向上のメカニズムと有益性を確認する。

2. 分布パラメータの逆問題に関する数理

(1) 一般同定解の分類

非適切な逆問題を解くことは、相当幸運な観測データや先験情報の入手がない限り、一般的に大変困難であるのは周知の事実である。ここではまず一般的な同定解について整理分類する。

数学的に厳密に言えば、同定解は未知数(パラメータ数)と観測数の関係から、

(a) 不能解：観測数 > 未知数であるが「解なし」

(b) 一意解：観測数 $\geq$ 未知数であって「解が唯一」

(c) 不定解：観測数 < 未知数のため「解が不特定多数」に分類される。項目(a)は全ての観測データを満たすような解がないだけであって、少なくとも2個以上の観測データを満たす解は数多く存在する。数学的には「解なし」に分類されてしまうが、実験や観測を行った場合では当たり前のような状態である。そこでは、各観測条件からの(重み付きの)誤差評価規準が最小となるパラメータ値を探り出せばよいとされている。その最も普及した手法は(重み付き)線形最小二乗法である。項目(b)は各観測データを全て同時に満たす解になっているのである。これは厳密解であると言える。項目(c)は工

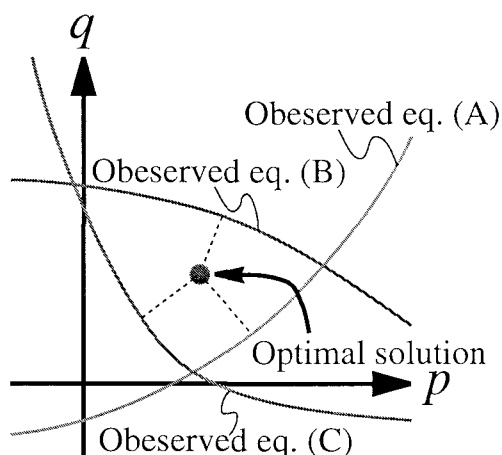


図-1 不能解となる解空間の例：パターン(a)

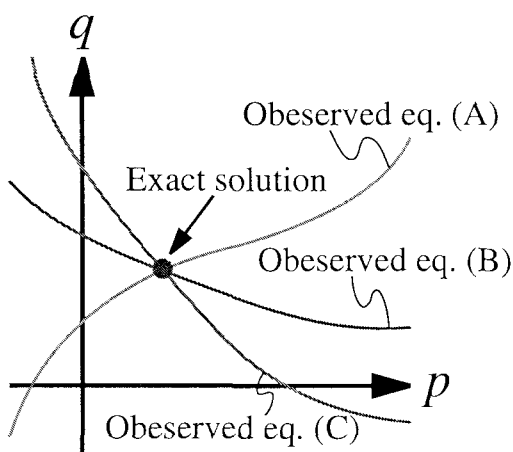


図-2 一意な厳密解となる解空間の例：パターン(b)

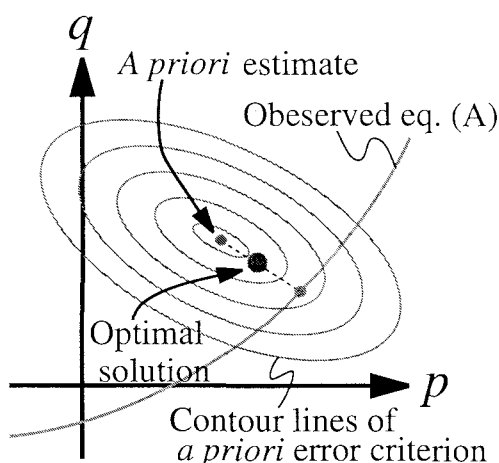


図-3 不定解となる解空間の例：パターン(c)

学的に非適切な逆問題と呼ばれ、我々が実務でよく直面する問題である。観測データ数に対して、求めるべき未知数が多すぎて解が定まらない状態に陥ってしまう。その中で比較的处理しやすいのは有限個の解に絞られている場合である。これは真の解と局所解との判別がついていないだけなので、各同定解を本題にフィードバックして解析を行い、モデル挙動のすり合わせを行って真の解を特定する、ないしは、すり合わせ前に真の解が持つ弱い拘束条件(不等式で解の存在範囲を示せる条件)を与えて、局所解と真の解を識別すればよい。

また無限個の解になる(解空間で直線や曲線、平面や曲面といった幾何的な形状の集合になる)場合は何らかの条件から最適解を定める必要が出てくる。上述のように個々の解に対してフィードバックしてすり合わせることは不可能である。結果的には、多数の解から唯一妥当な解を定めなければならないので、観測データ以外の情報を使わなければならない。現在最有力な手法として活用される頻度の高いものが先験/事前情報を利用した方法である。最も典型的な解の定め方は、「各観測データからの(信頼度などの重み付き)誤差」+「先験/事前情報による(信頼度などの重み付き)推定誤差」の規準が最小となる解を最適解とする方法である。

一例として、パラメータが p, q であったときの解空間を図-1～3に示す。1つの観測データが1つの観測方程式として作用し、解空間上の1曲線で表される。その曲線の交点が真の解の候補 $\hat{p}, \hat{q}$ となる。図-1では、観測方程式からの距離の和が最小となる点を最適解とした図になっている。図-2では、全ての観測方程式が1点で交差した図である。図-3では、観測方程式はその上の点全てが全ての解になり得る解集合なので、そこから最適な1点を定める必要がある。先験/事前情報の推定誤差の等高線を描いた上で、観測方程式の中で最小となる点を求め、その点を最適解と考える場合が多い。しかし、それでは先験/事前情報と観測情報のどちらを重要視しているのかが明確でないまま最適解として決めてしまうことになるので、超パラメータ¹⁾という先験/事前情報の重みを使って、その点と先験/事前情報で最適と推定された点との折衷的な内分点を最適解とすることを図に示した。あとは時系列観測データから最適解を逐次更新していき、最終的に解を収束させればよい。

(2) 一意な分布同定解の取得条件

実務では、パラメータ同定に非適切な問題、特に「観測数<未知数」となるケースに頻繁に遭遇する。そこで同ケースに直面しても観測データから安定した一意の同定解を得る策を講じる。いま前節の分類項目(a)の最適解も連立解として認めた上で同定解を考察すると、少なくとも

条件1： 観測数 $\geq$ 未知数

条件2： 共線性のあるデータを除いても条件1を満たしているような観測データの採取と確認

条件3： パラメータの区域化に伴う各区域での観測更新感度の確保

に掲げた3条件が満たされていないといけない。条件1は方程式の可解性、つまり「連立方程式の数」と「未知パラメータの数」の関係から自明である。条件2は類似性データを除いても、パラメータ同定のためのデータ数は充足しているという条件を意味する。一般に類似した観測データは、近接した観測点や空間周期的変動場で同じ位相にある観測点に多く見受けられるが、そ

の場合、それらは同一のデータとして処理せざるを得ない。それ故、実質の観測数はその分だけ減ってしまっていることになるので、独立したデータとして扱える数を確認するのである。結果的に最後まで残った時系列観測データは全て互いに類似性はないということになる。条件3は観測データからパラメータ同定値を更新する際の、データの影響圏とパラメータ区域化(分布化)との関係を述べたものである。1つの均一区区域の透水係数を求めるには、その値が直接的に反映される高感度の水位観測点とその区域内に1点以上必要なのである。区域毎の観測更新感度を向上させる方策としては、細かな地下水挙動(モデルの緻密さ)を犠牲にしても区域内の観測数を増やすべく、透水係数分布を粗い区域に設定し直し、その粗い分布で同定するのが既往の妥協策である。一方、区域化を変更せず先験/事前情報を用いて求める方策では、局所解を避けて正解を求め易くなる反面、“区域毎の観測更新感度が観測点の在る区域では鋭敏だが観測点の無い区域では遅鈍である”という短所は残ったままとなる。

3. 地下水モデルにおける透水係数分布同定

(1) 有限要素法による水位解

平面不圧地下水モデルの基礎式は、

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\} + \varepsilon \quad (1)$$

で表される。ここに λ :有効間隙率、 h :地下水位、 k :透水係数、 s :基盤高、 ε :地下水涵養量を表す。

実際の数値計算では式(1)を用いるが、ここでは厳密解を導出する際の読者の理解を容易にするため、式(1)を線形化した式とその境界条件は

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{境界条件: } h = \hat{h} \quad \text{on } S_h$$

$$q = -\hat{q} = k d_0 \frac{\partial h}{\partial n} \quad \text{on } S_q$$

(ただし、 S_h :水位境界、 S_q :流量境界)

で考察を進めるものとする。ここに、 d_0 :平均水深(要素毎の定数)であり、 $h-s$ の線形近似部である。本研究では数値計算に有限要素法(Finite Element Method; FEM)の利用を考える。この弱形式を求め、空間的に離散化して、 Δt による時間差分や θ 法によって時間展開する。得られた有限要素方程式は

$$A h_{t+1} = B h_t + \omega_{t+\theta} \quad (3)$$

ここに、

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S, \quad B = \frac{1}{\Delta t} M - (1-\theta) S \quad (4)$$

$$M = \int_V \lambda \phi^T \phi dV, \quad S = \int_V k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV \quad (5)$$

$$\omega_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (6)$$

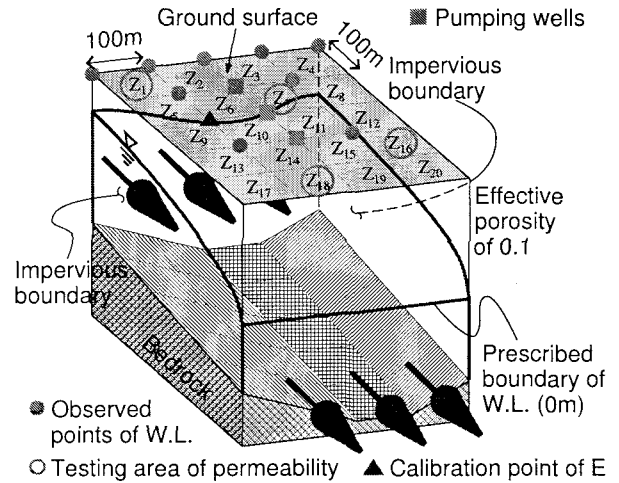


図-4 仮想帯水層の三次元図

と書ける。いま、 h_{t+1} を未知水位量 h_{t+1}^1 と既知境界水位量 h_{t+1}^2 に分解し、これに呼応して全行列/ベクトルを小行列/小ベクトルに分解すると、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$h_{t+1} = \begin{Bmatrix} h_{t+1}^1 \\ h_{t+1}^2 \end{Bmatrix}, \quad h_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ h_t^2 \end{Bmatrix}, \quad \omega_{t+\theta} = \begin{Bmatrix} \omega_{t+\theta}^1 \\ \omega_{t+\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

となる。 h_{t+1}^2 の縮約処理を施して、

$$h_{t+1}^1 = A_{11}^{-1} [B_{11} h_t^1 + B_{12} h_t^2 - A_{12} h_{t+1}^2 + \omega_{t+\theta}^1] \quad (10)$$

を得る。

(2) 仮想帯水層

本研究では、領域下流斜方からの立体的視点で描くと図-4となるような不圧状態の仮想帯水層を数値実験の考察対象とした。この帯水層の不透水基盤面は、流れ断面が谷状になっており、流下方向に一定傾斜している。図中の●印は水位観測点(9点)、■印は揚水井(3点)、最下流点が水位境界である。また図の左端(地下水集水域)と上方(地表面)から地下水涵養があるものと設定して、有限要素法を用いた非定常平面地下水モデルの数値実験を試みた。実験では不均質な透水係数分布を想定し、その透水係数分布の同定時の観測感度と解の一意性について検討している。

(3) 通常同定手法の状態変数

平面地下水モデルの透水係数を同定するには観測値を反映させつつ逐次最尤値を求めてモデルにフィードバックする手法が非定常地下水モデルを扱う上では理想的である。そこで本研究では、逆解析手法に拡張 Kalman フィルタ有限要素法^{2),3)}を採用する。同手法はモデル誤差や異常値をフィルタしながら逐次的に観測値に見合うパラメータを同定できる処理機構を有するため、本稿では極めて理に適った方策である。同手法のアルゴ

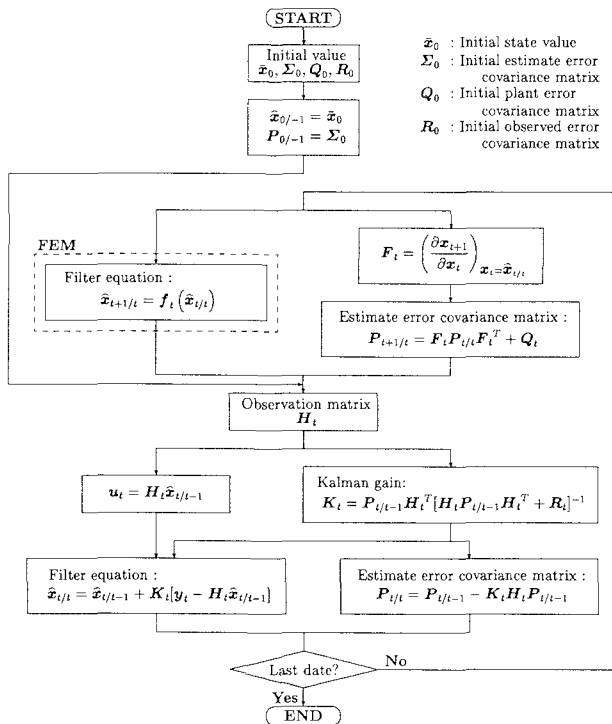


図-5 拡張 Kalman フィルタ FEM

リズムを図-5に示す。通常は状態変数 x_t を式 (11) のように与える。

$$x_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ k_t \end{Bmatrix} \quad \text{または} \quad x_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ L_t \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $L_t (= \log k_t)$ は常用対数透水係数を表す。前者は同程度の桁数からなる透水係数分布を、後者は地層などによる桁数の食い違う透水係数分布を扱う際にそれぞれ用いる。なお、後者は前者にも対応できる。

(4) 通常の透水係数分布同定

実際の透水係数分布は空間的に複雑な様相を呈していると思われるが、それを区域モデル化することで、各区域内での浸透流量と同等の流量になる等価透水係数を各区域毎に与える。ここで用いた透水係数の空間分布設定を図-6に示す。真の地下水挙動を得るための地下水モデルに上記を含めた諸元を設定し、これに対して順解析を行って図-4で示した9点の観測点での模擬観測値を作成した。

次に、前節に記載の逆解析手法ならびに式 (11) を用いて、模擬観測値から各区域 $Z_1 \sim Z_{20}$ 毎に透水係数の最尤同定値を求めた。その結果を簡略に図-7に示す。

(5) 透水係数分布モデル

現場の透水係数に空間不均質性が顕著に出ていることを根拠に透水係数の区域モデル化を要素単位で設けると、同定時の未知の透水係数区域数が急増してしまい、観測更新に使う観測データ数の不足、観測点配置の拙さによる共線性のある観測データの発生や観測データへの影響が乏しい区域の存在などで同定の非適切さを強めてしまう。つまりパラメータ同定の状態方程式

Exact	215.3322 (Z_4)	255.5558 (Z_8)	321.1791 (Z_{12})	400.0000 (Z_{16})	383.3276 (Z_{20})
	173.9983 (Z_3)	200.0000 (Z_7)	272.5400 (Z_{11})	329.4123 (Z_{15})	346.6049 (Z_{19})
	136.6654 (Z_2)	171.4817 (Z_6)	226.1393 (Z_{10})	273.9904 (Z_{14})	300.0000 (Z_{18})
	100.0000 (Z_1)	146.4934 (Z_5)	194.3980 (Z_9)	235.9593 (Z_{13})	265.2360 (Z_{17})

Unit: m/day

図-6 予め設定した真の透水係数分布

Piece-wise	219.3408 (Z_4)	263.1140 (Z_8)	289.9044 (Z_{12})	382.6352 (Z_{16})	380.4207 (Z_{20})
	168.8113 (Z_3)	224.7142 (Z_7)	254.9413 (Z_{11})	348.1349 (Z_{15})	352.3683 (Z_{19})
	135.8332 (Z_2)	185.8441 (Z_6)	215.4022 (Z_{10})	273.9089 (Z_{14})	295.5448 (Z_{18})
	101.7502 (Z_1)	144.2885 (Z_5)	180.1621 (Z_9)	237.3977 (Z_{13})	260.8399 (Z_{17})

Unit: m/day

図-7 区域単位での透水係数分布の同定結果

が不定解を持ちやすく、結果的に高精度の同定解が一意的に求まりにくくなる。そこで一意な同定解を得るための既往の解決策として、透水係数の区域数を減らす、観測数を増やす、観測点配置を変更するといった手段が選択されてきた。しかし、それらでは不均質な浸透層に特有の局所的現象に対処できず、かえって工学的検討が出来なくなる場合があるため、状態方程式の解が不定となる場合でも或る程度の信頼を持って細部までの検討ができるように工夫もされてきた。上記の拡張 Kalman フィルタ有限要素法のように事前情報を反映させて逐次最適解を求めるものもその一つである。しかし、図-6に対する同定解が図-7のようになってしまったことから、十分な事前情報を与えなければ十分な同定結果も得られない場合も少なくないと言える。従って2.(2)節の3条件を出来る限り多く満足させることが望まれる。

そこで、透水係数値、ないしは、その常用対数値が空間連続的に分布しているという仮定の下で、地盤統計学を用いたこれまでの筆者の研究成果^{4),5)}を踏襲し、同分布モデルとして Ordinary block kriging(OBK) による地盤統計モデルを当てはめてみる⁶⁾。

この利点は透水係数の空間不均質性をひとまとめのモデルで扱うことで領域全体に観測更新の比較的高い感度となって条件3を満たすとともに、未知数を同一透水係数の区域数(=要素数)から OBK の未知パラメータ数(2個)まで減らして観測数>未知数(条件1)を同時に成立させる点にある。ただし、上述したように観測データに類似性があればその分の実質的な観測数は減ってしまうので、その点の確認は必要である。OBK による推定式は、

$$[\text{通常型分布}] \quad k^*(x) = \hat{k}_0 + c(x)^T C^{-1} \hat{w} \quad (12)$$

$$\text{ただし,} \quad \hat{k}_0 = \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \quad (13)$$

$$\hat{w} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \quad (14)$$

$$[\text{常用対数型分布}] \quad k^*(x) = \hat{k}_0 10^{v(x)^T V^{-1} \hat{u}} \quad (15)$$

$$\text{ただし,} \quad \hat{k}_0 = 10^{\beta^T V^{-1} \psi / \beta^T V^{-1} \beta} \quad (16)$$

$$\hat{u} = \psi - \alpha \frac{\beta^T V^{-1} \psi}{\beta^T V^{-1} \beta} \quad (17)$$

と書ける。ここに、 $\hat{k}_0$ ：トレンドのドリフト[定数]、 ϕ ：観測値ベクトル $[n \times 1]$ 、 ψ ：常用対数観測値ベクトル $[n \times 1]$ 、 $\hat{w}$ ：観測点でのランダム成分ベクトル $[n \times 1]$ 、 $\hat{u}$ ：観測点での常用対数ランダム成分ベクトル $[n \times 1]$ 、 α ：成分が全て1の定数ベクトル $[n \times 1]$ 、 β ：成分が全て1の常用対数定数ベクトル $[n \times 1]$ 、 $c(x)$ ：求める推定点 x と各観測点間の共分散ベクトル $[n \times 1]$ 、 $v(x)$ ：求める推定点 x と各観測点間の常用対数共分散ベクトル $[n \times 1]$ 、 C ：各観測点間の $w(x)$ の共分散行列 $[n \times n]$ 、 V ：各観測点間の $u(x)$ の共分散行列 $[n \times n]$ である。

(6) 状態変数の変更と観測更新感度行列

同定時に用いる式(11)の状態変数 x_t の透水係数に関する成分を共分散関数の未知定数ベクトルに変更し、

$$x_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ \zeta_t \end{Bmatrix} \quad (18)$$

とする。ここに、 $\zeta_t = \{(\zeta_1)_t, (\zeta_2)_t\}^T = \{(\sigma^2)_t, a_t\}^T$ と定義した部分変数ベクトルを表す。なお $\hat{k}_0$ は ζ が定まると式(13)により決まる従属変数のため、状態変数に含めない。これに伴い、図-5の状態遷移行列 F_t も以下の4つの感度行列から構成される。

$$F_t = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1 = \hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial \zeta_t} \right)_{\zeta_t = \hat{\zeta}_{t/t}} \\ \left(\frac{\partial \zeta_{t+1}}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1 = \hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial \zeta_{t+1}}{\partial \zeta_t} \right)_{\zeta_t = \hat{\zeta}_{t/t}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{hh} & J_{h\zeta} \\ J_{\zeta h} & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

各感度行列は

$$J_{hh} = A_{11}^{-1} B_{11} \quad (21)$$

$$J_{h\zeta} = A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial B_{11}}{\partial \zeta_t} \hat{h}_{t/t}^1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial \zeta_t} h_t^2 - \frac{\partial A_{11}}{\partial \zeta_t} \hat{h}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial A_{12}}{\partial \zeta_t} h_{t+1}^2 \right] \quad (22)$$

$$J_{\zeta h} = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$J_{\zeta\zeta} = I_2 \quad (24)$$

となる。なお、上記の $J_{h\zeta}$ において、

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial \zeta_t} = \theta \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} T_{ij} \quad \left[T_{ij} \equiv \frac{\partial S_{ij}}{\partial k_t} \text{と定義} \right] \quad (25)$$

である。ここに、

$$\frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} = \frac{\partial \hat{k}_0}{\partial \zeta_t} + \frac{\partial}{\partial \zeta_t} \left(c(x)^T C^{-1} \hat{w} \right) \quad (26)$$

$$= \left\{ \left(\frac{c(x)^T C^{-1} \alpha - 1}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \alpha^T - c(x)^T \right) C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \zeta_t} + \frac{\partial c(x)}{\partial \zeta_t} \right\} \left\{ C^{-1} - \frac{1}{\alpha^T C^{-1} \alpha} C^{-1} \alpha \alpha^T C^{-1} \right\} \phi \quad (27)$$

と書ける。同様に、

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \zeta_t} = -(1 - \theta) \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} T_{ij} \quad (28)$$

と記述でき、最終的に

$$J_{h\zeta} = -A_{11}^{-1} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} \left[(1 - \theta) \left\{ T_{11} \hat{h}_{t/t}^1 + T_{12} h_t^2 \right\} + \theta \left\{ T_{11} \hat{h}_{t+1/t}^1 + T_{12} h_{t+1}^2 \right\} \right] \quad (29)$$

を得る。拡張Kalmanフィルタの観測更新感度は、カルマンゲイン行列 K_t と時間更新後の推定誤差共分散行列 $P_{t/t-1}$ が

$$K_t = P_{t/t-1} H_t^T \left[H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t \right]^{-1} \quad (30)$$

$$P_{t/t-1} = F_t P_{t-1/t-1} F_t^T + Q_t \quad (31)$$

で求まることを踏まえると、観測行列 H_t やプロセス誤差共分散行列 Q_t がほとんど変動しないならば、状態遷移行列 F_t の変動が支配的となって K_t は変動することになるため、この F_t を間接的に評価すればよい。

一方、区域で同定している時の F_t は、式(11)の様に常用対数透水係数を用いた場合、先の結果で式(21)～(24)の異なる箇所だけ抜き出すと、

$$J_{Lh} = \mathbf{0} \quad (32)$$

$$J_{hL} = A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial B_{11}}{\partial L_t} \hat{h}_{t/t}^1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial L_t} h_t^2 - \frac{\partial A_{11}}{\partial L_t} \hat{h}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial A_{12}}{\partial L_t} h_{t+1}^2 \right] \quad (33)$$

$$J_{LL} = I_{20} \quad (34)$$

であり、 J_{hL} は、対角行列 $D_t \equiv \text{Diag}(k_t)$ を用いて、

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial L_t} = \theta (\ln 10) D_t U_{ij} \quad \left[U_{ij} \equiv \frac{\partial S_{ij}}{\partial k_t} \text{と定義} \right] \quad (35)$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial L_t} = -(1 - \theta) (\ln 10) D_t U_{ij} \quad (36)$$

と表記すると、最終的には

$$J_{hL} = -(\ln 10) A_{11}^{-1} D_t \left[(1 - \theta) \left\{ U_{11} \hat{h}_{t/t}^1 + U_{12} h_t^2 \right\} + \theta \left\{ U_{11} \hat{h}_{t+1/t}^1 + U_{12} h_{t+1}^2 \right\} \right] \quad (37)$$

が得られる。

また、分布モデルの場合と比較するのに、本稿では扱っていないが、通常の透水係数を変数成分に用いた状態変数の場合の式群と比較した後で、常用対数を取った場合とを比較した方が理解しやすい。よって、その状態変数の場合で異なる箇所だけを抜き出すと、

$$J_{kh} = \mathbf{0} \quad (38)$$

$$J_{hk} = A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial B_{11}}{\partial k_t} \hat{h}_{t/t}^1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial k_t} h_t^2 - \frac{\partial A_{11}}{\partial k_t} \hat{h}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial A_{12}}{\partial k_t} h_{t+1}^2 \right] \quad (39)$$

$$J_{kk} = I_{20} \quad (40)$$

となり、 J_{hk} は

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial k_t} = \theta U_{ij} \quad (41)$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial k_t} = -(1 - \theta)U_{ij} \quad (42)$$

と表記することで、

$$\begin{aligned} J_{hk} = & -A_{11}^{-1} \left[(1 - \theta) \left\{ U_{11} \hat{h}_{t/t}^1 + U_{12} h_t^2 \right\} \right. \\ & \left. + \theta \left\{ U_{11} \hat{h}_{t+1/t}^1 + U_{12} h_{t+1}^2 \right\} \right] \quad (43) \end{aligned}$$

と書ける。

これら各場合の結果を総じて比較検討する。まず式(29)と式(43)との比較から、 $J_{h\zeta}$ と J_{hk} の両者は類似した感度行列の構造であることがわかる。後者に比べて前者は一見複雑そうであるが、前者はゼロ成分がなく領域全体に感度がある T_{ij} が利用されているため、 $T_{ij}h$ の成分も全てゼロでなく感度が高い。これに対して、後者は区域単位でしか感度を持たず、疎行列 U_{ij} が利用されていて、 $U_{ij}h$ も感度のない点での成分がゼロであるために、これに A_{11}^{-1} を左方から乗じてもその影響が大きく出てしまう。前者はまた $\partial k_t / \partial \zeta_t$ と $T_{ij}h$ とで構成される2階テンソルが効いていて、感度行列の成分数を大きく減らすことに寄与している。つまり、前者では状態変数に対するパラメータの更新感度ノルムが大きくなることで修正感度が大きくなり、かつ、パラメータ1つ当たりの修正感度範囲が広く領域全体に渡っていることがわかる。これに対して後者は3階テンソル U_{ij} やそれに h を乗じた後の2階テンソルにも多量のゼロ成分を有するため、感度行列の成分数を膨れあがらせている。状態変数に対するパラメータの更新感度も大きい成分とそうでない成分が明瞭に分かれてしまい、かつ、パラメータ1つ当たりの修正感度範囲が狭く(ほぼ区域単位)なることがわかる。

次に式(37)と式(43)との比較によって、 J_{hL} と J_{hk} の両者は基本的にかなり類似した感度行列の構造であることが見て取れる。透水係数を状態変数に組み込む際に常用対数化したか否かの違いが A_{11}^{-1} に乘じるテンソル D_t や定数係数($\ln 10$)となって現れているのみである。

最後に、式(29)と式(37)との比較に関しては、 J_{hz} と J_{hL} の両者は比較的類似した感度行列の構造であることがわかる。この比較検討は最初の J_{hz} と J_{hk} の検討とほとんど同じであるので以降は省略する。

(7) モデル分布同定とモデル誤差の数値実験

ここで提案した分布モデルに対しての同定精度、モデル誤差、観測更新感度について検討すべく、前節の変更を反映して、数値実験を行った。透水係数の観測は、 Z_1, Z_7, Z_{16}, Z_{18} にて、本稿での一要素以上に大きくならない影響圏での原位置試験ないしは室内要素試験で観測値が得られたと考える。その他の境界条件や観測条件は3.(4)節の数値実験と同じとして、同定を行ったところ、 $\sigma^2 = 20.0(\text{m}^2/\text{day}^2)$, $a = 1000.0(\text{m})$, $\hat{k}_0 = 243.7905(\text{m}/\text{day})$ が得られた。この同定値を用いたOBKモデル分布の推定結果が図-8である。これは図-6

Using OBK	215.3322 (Z_4)	255.5558 (Z_8)	321.1791 (Z_{12})	400.0000 (Z_{16})	383.3276 (Z_{20})
	173.9983 (Z_3)	200.0000 (Z_7)	272.5400 (Z_{11})	329.4123 (Z_{15})	346.6049 (Z_{19})
	136.6654 (Z_2)	171.4817 (Z_6)	226.1393 (Z_{10})	273.9904 (Z_{14})	300.0000 (Z_{18})
	100.0000 (Z_1)	146.4934 (Z_5)	194.3980 (Z_9)	235.9593 (Z_{13})	265.2360 (Z_{17})

Unit: m/day

図-8 OBKモデルに基づく分布同定結果

と比較しても同じ結果が得られているとわかる。このように空間相関性が強い場合、地盤統計学に基づいて分布モデル化してやれば、観測更新感度を領域全体に向上させられ、不均質な透水係数分布を比較的容易に同定できるようになる。また、モデルの同定すべき未知数が2個であるため、さほどの観測数がなくても、一意性のある同定解を求めるには有用であるとわかる。

4. 結論

観測数が同定すべき透水係数分布の設定未知数を下回ると、同定解が不定となって高精度な一意解が得られず、非適切性の解消には至らない場合が多い。本研究では、透水係数の空間不均質性を地盤統計学の一手法であるOBKによってモデル化し、地下水モデルの透水係数分布として組み込んで同定することで、同定解の非適切性を克服する手法を提案した。このモデル化は観測更新感度を領域全体に向上させ、その同定結果に非常に高精度な一意解をもたらした。また、従来の J_{hk} や J_{hL} の疎行列に比べ、 $J_{h\zeta}$ のゼロ成分の少なさが提案手法モデルの観測更新感度の向上や領域全体に対する感度の広がり性を示しているとわかった。

参考文献

- 1) 奥野哲夫, 鈴木 誠, 本城勇介: ABICと拡張カルマンフィルタを用いた最適な地下水解析モデルの推定, 土木学会論文集, No.575/III-40, pp.179-198, 1997.
- 2) 長谷川高士, 村上 章, 浜口俊雄: 拡張Kalmanフィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III-29, 1994.
- 3) 浜口俊雄, 村上 章, 長谷川高士: 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145, 1997.
- 4) 浜口俊雄: 地下水流況推定における地盤統計学のアプローチの効用, 京都大学防災研究所年報, 第44号B-2, pp.455-463, 2001.
- 5) 浜口俊雄: 統計学的に評価した空間不確定量の地下水流動モデルへの適用, 京都大学防災研究所年報, 第45号B-2, pp.677-685, 2002.
- 6) 浜口俊雄: 透水係数を変量とした地下水位変分量の厳密解と透水係数の不均一分布構造の同定, 水工学論文集, 第48巻, pp.361-366, 2004.

(2004.9.30 受付)