

2成層場におけるソリトンに対する 新たなスキームの適用と検討

A new scheme for internal solitary
waves in a two layer system

中山恵介

正会員 工博 国土技術政策総合研究所 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

This paper describes the development of MEL2D-cv which combines a three-point combined compact difference scheme and the CIP-CSL2 scheme and the application of the model. A three-point combined compact difference scheme and the HS-MAC scheme were applied to solve momentum equations, and the CIP-CSL2 scheme was used for solving water temperature and salinity in MEL2D-cv. Five other models were compared with MEL2D-cv to verify the accuracy for the case when internal solitary waves occur in a two layer system. The diffusion of the interface due to numerical diffusion was almost the same in the case when the CIP-CSL2 scheme was used for solving density compared with the case when the CIP scheme is used. The predicted spatial shape of an internal solitary wave by MEL2D-cv was better than any other five models from the comparison with theoretical solutions.

Key Words : CIP scheme, CIP-CSL2 scheme, Residual cutting method, internal waves
, a three-point combined compact scheme, internal solitary waves

1. はじめに

成層場において発生する内部波は, 安定な成層構造を不安定なものへと変化させることがあり, 閉鎖性内湾における海水交換, 湖における鉛直混合に大きな影響を与えることが知られている^{1) 2)}. 成層状態について, 界面がはっきりと存在する場合, 連続的に成層している場合等さまざまなパターンが存在する. 特に, 界面がはっきりと存在する場合には, 斜面付近で低層の水深が浅くなると内部波により発生する流速が大きく, 物質循環に与える影響は大きい.

内部波の影響に対して解析を行う方法として, 観測, 模型実験, 数値実験が考えられる. それらの中で数値実験は, 詳細な情報を空間的, 時間的に得られるため, 重要なツールとして内部波の解析に用いられてきた. 例えば, Saffarinia & Kao³⁾やNakayama & Imberger⁴⁾等が代表的な計算手法として挙げられる. コード中に用いられている手法は異なるものの, 両者とも数値拡散を極力抑えるようにコードが開発されているという点では共通している. 前者は風上差分を改良したもの, 後者はCIP法を対流項の計算に用い, 数値拡散を抑えている. 後者は2

方程式系のLESまで考慮しており, スケールが大きくなる場合に対する数値計算手法の拡張性に富んでいる.

そこで, 後者の数値計算手法に着目する. 対流項の計算にCIP法を用いている以外, 乱流拡散に関する項は有限体積法, 他の項は中央差分を用いて計算されているため, 対流項以外の計算に対する精度が低い点が問題点として挙げられる. そこで, 対流項以外の計算にも高精度の計算スキームを適用し, 計算精度を向上させることが望まれる.

現在, 空間微分を高精度に計算する代表的なスキームとして, Compact Finite Difference Scheme(本論文ではCDSと呼ぶ)⁵⁾が存在する. CDSは空間微分を計算する際, 空間軸方向に陰的に補間式を解くことにより, 高次の空間微分を与えることができる手法であり, 対象とする微分方向に関してのみ繰り返し計算を行い微分量が計算されるため, コード化が容易であることが特徴である. Chuら⁶⁾によるポアソン方程式の解法にCDSを利用する方法を組み合わせることにより, HS-MACへの適用も容易である.

そこで本論文では, CDSとCIP法を組み合わせることにより, コードの計算精度の向上を図り, 計算精度の検証を行うことを目的とする.

2. 計算方法

(1) 基礎方程式

基礎方程式は、式(1)から式(13)で示される鉛直2次元 LESモデル(MEL2D-cv)とする。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i) = - \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \delta_{i3} \frac{g \rho'}{\rho} + \nu \nabla^2 u_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K_{hk} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) + \kappa \nabla^2 \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + u_k \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K_{hk} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} \right) + \kappa_s \nabla^2 \theta \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k E) + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -C_\epsilon E^{3/2} \Delta + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K_{hk} \frac{\partial E}{\partial x_k} \right) + \delta_{i3} g \frac{1}{\rho} \overline{u'_i \rho'} \quad (5)$$

$$\rho' = f(\theta, \theta_s) \quad (6)$$

$$R_{ik} = \overline{u'_i u'_k} \quad (7)$$

$$\overline{u'_i u'_k} = \delta_{i3} \frac{2}{3} E - K_{mk} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

$$\overline{u'_i \rho'} = K_{hi} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (9)$$

$$K_{m1}, K_{m2}, K_{m3} = C_m E^{1/2} \Delta \quad (10)$$

$$\begin{cases} K_{h1}, K_{h2} = C_m E^{1/2} \Delta / \text{Pr} \\ K_{h3} = C_m E^{1/2} \Delta / \text{Pr}_t \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Pr}_t = 1 + 0.3 \Delta^2 N^2 / E \quad (12)$$

$$\begin{cases} C_\epsilon = 0.845 \\ C_m = 0.0856 \\ \text{Pr} = 0.420 \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $i=1,2$: x, z に対応、 u_i : 流速、 θ : 水温、 θ_s : 塩分、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数、 κ, κ_s : 水

温と塩分に関する拡散係数、 ρ : 密度、 Δ : メッシュに代表される代表長さ、 N : 浮力振動数である。

式(2)は密度成層を考慮した運動方程式、式(4)は乱流運動エネルギーの方程式である。成層の効果による鉛直方向の渦拡散の影響を考慮するため、Schumannら⁷⁾により提案されているSecond-Order Closureの代数方程式から導かれたプラントル数を得る式(11)を用いている。LES定数は、慣性小領域の等方性乱流の考え(Lillyら⁸⁾、Schmidtら⁹⁾から導かれる値を用いている。

(2) 数値計算スキーム

スペクトル法などに代表されるように、運動方程式や乱流エネルギー式中の運動量や運動エネルギーは、波の成分に分解して再構成することが可能である。一方、塩分や水温のようなスカラー量は、界面の存在などの影響により、スカラー量が不連続に変化する場合、Gibbs現象により波の成分へと分解して再構成することが困難である場合が存在する。

CDSは、スペクトル法等と同様に、波の成分で構成される量に関して再現性がよく、CIP法は界面などの運動の再現性に優れている。そこで本論文では、運動量や乱流エネルギーに関してはCDSを用い、塩分や水温に関してはCIP法を用いて数値計算を行うものとする。その他、CDSを用いる効果は、運動方程式の保存性に関しても向上を促す可能性がある点である。CIP法を用いてHS-MACと組み合わせた場合、Time Splittingを2回行わなくてはならなくなる。一方、CDSを用いると、1回のTime Splittingで運動方程式を解くことができる。Time Splittingを行う際、高次の項の打ち切りによる数値計算誤差がその都度累積されるため、Time Splittingの回数は少ない方が望ましい。そのため、CDSを用いることにより、Time Splittingの回数を1回に減少することができることは、計算精度の向上にもつながると思われる。

まず、CDSについて簡単に説明する。ある変数 f (j : ノード) に関して6次精度の微分値が、式(14)、式(15)のように示される。1階微分、2階微分に関して、式(14)、式(15)は互いに参照しあっているため、繰り返し計算を行うことにより微分値を計算する。式の形から分かるとおり、計算したい微分方向に関する値のみの繰り返し計算であるため、コード化は容易である。繰り返し計算は、収束性が良く、6回程度で収束する。

$$\begin{aligned} & \frac{7}{16} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{j-1} \right\} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_j \\ & - \frac{\Delta x_i}{16} \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_{j+1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_{j-1} \right\} \\ & = \frac{15}{16 \Delta x_i} (f_{j+1} - f_{j-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

表-1 本論文で用いたモデルの種類.

スキームの種類	予測子の計算		修正子の計算		塩分, 水温の計算	
	CDS	CIP	CDM	CDS	CIP	CIP-CSL2
モデル1	○	—	○	—	—	○
モデル2	○	—	○	—	○	—
モデル3 (MEL2D-cv)	○	—	—	○	—	○
モデル4	○	—	—	○	○	—
モデル5	—	○	○	—	○	—
モデル6	—	○	—	○	○	—

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8\Delta x_i} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{j+1} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{j-1} \right\} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_j \\
& - \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_{j-1} \right\} \\
& = \frac{3}{(\Delta x_i)^2} (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \quad (15)
\end{aligned}$$

運動方程式の時間積分には, 式(16)から式(19)のようにHS-MAC法を用いる. 運動方程式の右辺 F_i は, 式(2)の右辺の圧力以外の項をまとめたものである.

$$\frac{\tilde{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i)^n = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (16)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^{n+1} = 0 \quad (18)$$

$$p^{n+1} - p^n = \phi \quad (19)$$

連続の式(18)を満たすためには, 式(20)で示されるポアソン方程式を繰り返し計算により解かなくてはならない. 本モデルでは, 残差切除法¹⁰⁾とCDSを組み合わせた方法により解を得ることとする.

$$0 = \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \quad (20)$$

乱流エネルギーの計算に関してはCDSを用い, 塩分と水温に関しては式(21)から式(24)で示されるCIP-CSL2を用いる.

$$\frac{\tilde{\theta} - \theta^n}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K_{hk} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right)^n + \kappa \nabla^2 \theta^n \quad (21)$$

$$\frac{\tilde{\theta}_s - \theta_s^n}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K_{hk} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} \right)^n + \kappa \nabla^2 \theta_s^n \quad (22)$$

$$\theta^{n+1} = \text{CIP-CSL2}(\tilde{\theta}, u_i^{n+1}) \quad (23)$$

$$\theta_s^{n+1} = \text{CIP-CSL2}(\tilde{\theta}_s, u_i^{n+1}) \quad (24)$$

(2) 比較計算スキームの一覧

本論文で用いるモデルが, 他のモデルと比べてどの程度精度の向上を図ることができるのかを検討するために, 5つのモデルとの比較検討を行う. 式(16)で示される計算を予測子の計算, 式(17)から式(19)で示される計算を修正子の計算と呼ぶ. 表-1に, 計算に用いた各種モデルの詳細を示す. CDMとは, 中央差分による計算を示しており, モデル1, モデル2, モデル5の修正子の計算のみに用いられている. CDMによるポアソン方程式の収束計算には, CDSと同様, 残差切除法が用いられている.

予測子の計算にCIP法を用いた場合は, 従来のCIP法との比較という観点から, 塩分, 水温の計算にCIP法のみを用いた検討を行うこととした. 本論文で提案しているモデルであるMEL2D-cvは, モデル3に対応する.

3. ソリトンの再現計算

(1) 計算条件

計算はコロケート座標系で行うこととする. 内部ソリトン波の再現は, Michallet&Ivey¹¹⁾を参考に, 図-1のような初期条件が与えて行われた. 上下層の密度差は

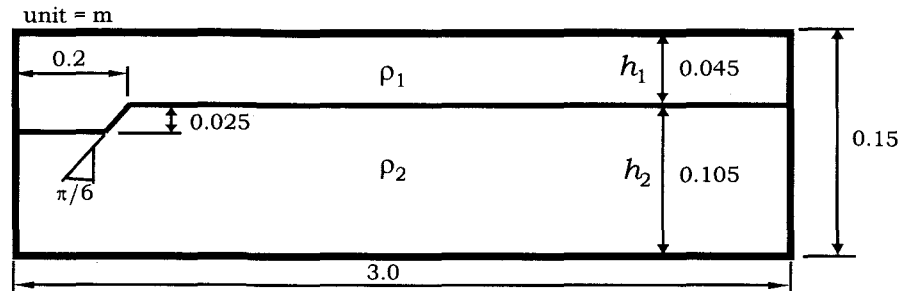


図-1 計算領域. 上下層の密度差は 40kg/m^3 . メッシュ数 750×75 . メッシュ間隔 $0.004\text{m} \times 0.002\text{m}$ の等間隔.

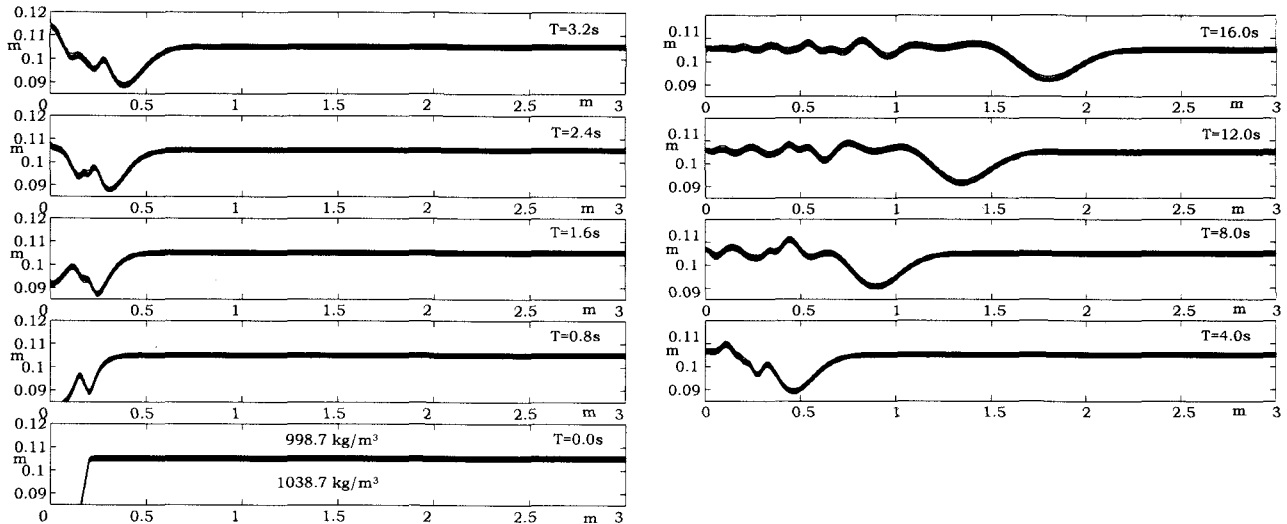


図-2 空間分布する密度コンタの時間変化.

コンタは 1010.7kg/m^3 から 1026.7kg/m^3 まで 4.0kg/m^3 毎に描かれている.

40kg/m^3 , メッシュ数 750×75 , メッシュ間隔は等間隔で $0.004\text{m} \times 0.002\text{m}$ である. 図に示されるように, 初期に密度界面で表現されるステップ状の偏差を与えておき, その偏差を保っている壁が突然取り払われたという仮定のもと計算を実行した. 時間ステップ間隔は 0.01s で, 40s まで計算を行った. 界面厚さをゼロとするために, ステップ的に密度が変化しているものとして, 初期条件を与えた.

Pentium Xeon 3GHz単体CPUによる計算実行時間は, モデル1, モデル2, モデル5はおよそ 4200s , その他はおよそ 11400s であった. 計算時間の差は, 修正子を計算する際にCDSを用いたためであり, 繰り返し計算の繰り返し回数自体も前者は平均およそ23.5回, 後者は43.5回であった. 繰り返し計算の収束判定は, 誤差の偏差が 10^{-6} 以下になった時点まで収束したものとして取り扱った.

(2) 内部ソリトン波の発生について

計算がどのように行われたかを知るために, モデル3(MEL2D-cv)による計算結果を示す(図-2). 計算領域内に発生する孤立波は, もっとも振幅が大きいため進行速度が最も速く, 後続部に相対的に小さな振幅の波を従え

ている. 初期に与えた密度界面の分布がステップ関数的に変化しているために, 高周波成分まで初期状態がエネルギーとして蓄えているためである. しかし, 卓越した進行速度ゆえ, 孤立波の前面にはそれら高周波の影響はみられず, きれいな孤立波を形成している.

4. モデルの検討

(1) 密度界面からの検討

モデルの再現性の検討のため, 密度界面の厚さに関して検討を行う. 密度界面の厚さに直接関係する変数は水温と塩分であり, 計算スキームの違いが計算結果の違いを生じさせる可能性がある. CIP-CSL2, CIP法を用いている点が, 6つのモデルで異なる点である. モデル1とモデル3にCIP-CSL2が用いられている. 本論文では, 代表的な比較ケースとして, モデル3とモデル6の密度分布を取り上げた(図-3). $T=18.08\text{s}$ における界面を検査対象界面とした. 両者とも, ほとんど界面厚さに関して違いは見られない. CIP-CSL2における密度分布の初期状態を, CIPから計算される密度の分布を参考にして与えたため

表-2 各モデルでのKdv理論解との誤差.

	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	model 6
error	0.0040	0.0047	0.0019	0.0023	0.0028	0.0020

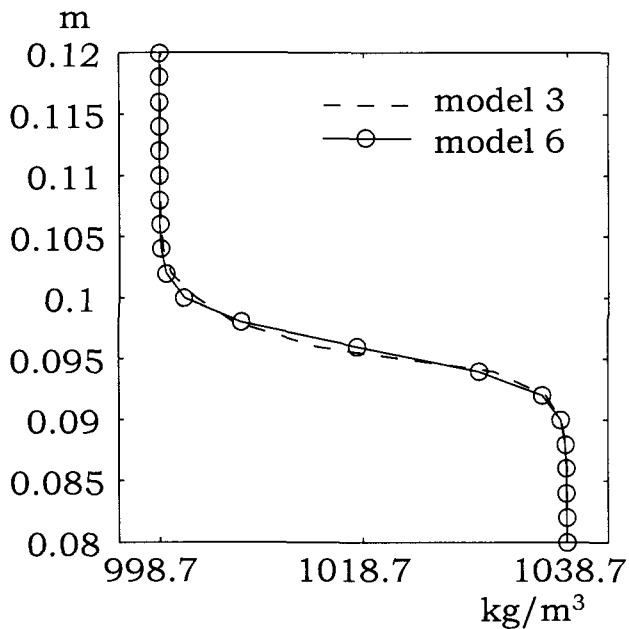


図-3 T=15.04sにおけるタンク左端から2.0mでの密度の鉛直分布. 破線: モデル3, 実線: モデル6.

であると考えられる. つまり, CIP法とCIP-CSL2とでは, 界面厚さの再現性に関して, ほとんど差がないといえる.

(2) 内部ソリトン波の理論解との比較

2層近似できる流れ場が存在し, そこに孤立波が発生した場合, 浅水流的な近似が成り立つとすると, 内部波に関するKdv方程式の基本解により孤立波の形状が再現されることが知られている¹²⁾. 内部波に関する波形の基本解 η_0 は, 式(25)から式(27)で与えられる.

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - ct}{\lambda} \right) \quad (25)$$

$$\lambda = \left(-\frac{6}{r} \frac{s}{\tilde{c}_0} \frac{D}{\bar{\eta}} \right)^{1/2} \quad (26)$$

$$c = c_0 \left(1 + \frac{2}{3} r \frac{\bar{\eta}}{D} \right) \quad (27)$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{c_0}{\sqrt{gD}} \quad (28)$$

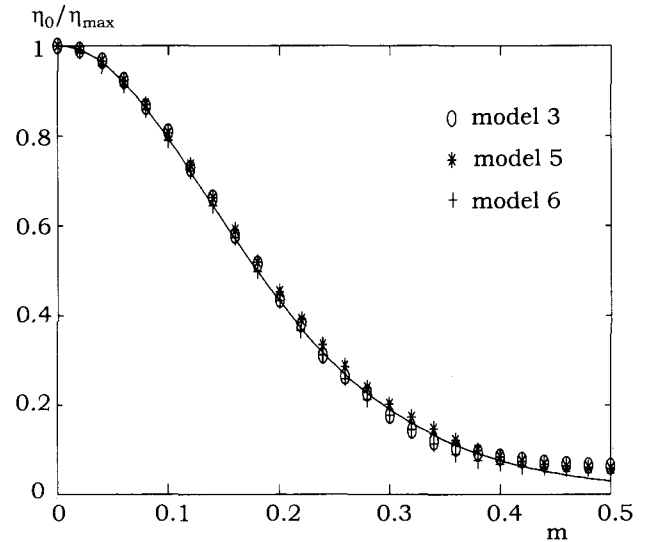


図-4 T=17.92sにおけるタンク左端から2.0mを頂点とした孤立波の形状. 実線: Kdv理論, ○: モデル3, *: モデル5, +: モデル6.

$$r = -\frac{3}{4} \frac{\int_0^1 \bar{\rho}' \phi_z^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}' \phi_z^2 dz} \quad (29)$$

$$r = -\frac{\tilde{c}_0}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho}' \phi^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}' \phi_z^2 dz} \quad (30)$$

ここで, η_0 : 振幅/2, λ : 波長, ϕ : モード関数, c_0 : モード解析により得られる波速, D : 全水深である.

代表的な比較として, モデル3(MEL2D-cv), モデル5, モデル6の比較結果を示す(図-4). 従来のCIP法を予測子の計算と水温, 塩分の計算に用い, 中央差分で修正子を計算した場合でも, 再現性がよいことが分かる. 一方, モデル5とモデル6を比較すると, 修正子の計算にCDSを用いることにより同様によい再現性が得られている. 重要な点は, 予測子および塩分水温の計算にCIP法を用いた場合, 修正子の計算にCDSに比べて精度が低いと思われるCDSを用いても, 他の方法と同様に計算による内部ソリトンの再現性が良い点である. つまり, 修正子の計算に6次の精度をもつCDSを用いなくとも, 本ケースの場

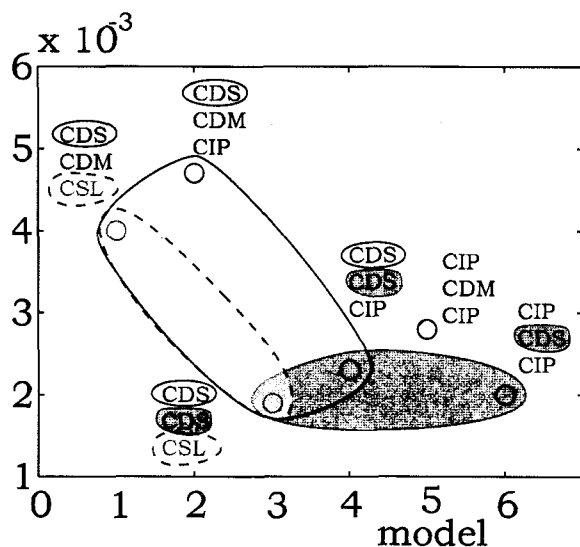


図-5 各モデルにおける、Kdv理論との誤差。

上段：予測子の計算，中段：修正子の計算，下段：水温，塩分の計算に対応する。

合，他のモデルと同様な再現性が得られることを示しており，通常のCIP法の計算効率のよさが伺える。

他のモデルとの比較も行うために，理論解との誤差の偏差を計算し，図化を試みた(図-5)。全てのモデルの誤差に関しては，表-2を参照いただきたい。全モデルにおいて，それほど大きな誤差が生じているとは考えにくい。その中でも，本論文で提案しているモデルの誤差はもっとも小さく，再現性が良いことが分かる。

図中で意外な点は，モデル5，モデル6の再現性がモデル1やモデル2に比べてよい点である。通常通りCIP法を予測子の計算とスカラー量の推移計算に用いることの有効性がみられる。モデル5との比較でも明らかである。

また，予測子の計算にCDSを用いた場合，スカラー量の計算に高いCIP法を用いた方が，CIP-CSL2法を用いるよりも誤差を小さくするという点で有効であることも分かった。CDSを計算に用いる際，予測子と修正子の計算の両方に用いることが，内部ソリトンの再現性の向上に有効であることが分かった。

その他，再現性の検証のため，内部波の波速による理論値との比較も行った。理論値0.116m/s，計算結果0.115m/sであり，良好な再現計算結果が得られていた。

5. まとめ

- (1) Compact SchemeとCIP-CSL2を組み合わせた計算スキームを提案し，内部ソリトン波の再現計算を行った。
- (2) 密度界面の再現精度の観点から，CIP-CSL2による水温，塩分の計算とCIP法によるものを比較した結果，

界面の再現性には，ほとんど差がないことが分かった。

- (3) Kdv理論による波形の比較を行い，本論文で提案している手法が良好に再現していることが分かった。また，CDSは予測子と修正子の両方の計算に用いられることが必要であるのではないかということが分かった。

参考文献

- 1) Wallace B.C., and Wilkinson D.L.: Run-up of internal waves on a gentle slope in a two-layered system, J. Fluid Mech., Vol.191, pp. 419-442, 1988.
- 2) Gloor, M., Wuest, A. and Munnich, M.: Benthic boundary mixing and resuspension induced by internal seiches, Hydrobiologia, vol.284, pp.59-68, 1994.
- 3) Saffarini K., and Kao T.W.: A numerical study of the breaking of an internal soliton and its interaction with a slope, Dynamics of atmospheres and oceans, Vol.23, pp. 379-391, 1996.
- 4) Nakayama K., and Imberger J.: Residual circulation due to internal waves shoaling on a slope, Submitted, 2003.
- 5) Lele, S. K.: Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, Journal of Computational Physics, vol.103, pp.16-42, 1992.
- 6) Chu, P. C. and F. Fan: A three-point combined compact difference scheme, Journal of Computational Physics, vol.140, pp.370-399, 1998.
- 7) Schumann, U., 1991. Subgrid Length-Scales for Large-Eddy Simulation of Stratified Turbulence, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 2, 279-290.
- 8) Lilly D. K., Waco D. E., and Adelfang S. I.: The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments, Proc. IBM Sci. Comput. Symp. on Environmental Science, pp.195-210, 1967.
- 9) Schmidt H. and Schumann U.: Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations, J. Fluid Mech., 200, pp.511-562, 1989.
- 10) Tamura A., K. Kikuchi and T. Takahashi: Residual cutting method for elliptic boundary value problems: application to Poisson's equation, Journal of Computational Physics, vol.137, pp.247-264, 1997.
- 11) Michallet, H. and Ivey, G. N.: Experiments on mixing due to internal solitary waves breaking on uniform slopes, Journal of Geophysical Research, Vol.104, pp.3467-13477.
- 12) Koop C. G. and G. Butler: An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system, Journal of Fluid Mechanics, Vol.112, pp.225-251, 1981.

(2003. 9. 30受付)