

水深積分モデルによる小規模河床波の 発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析

NUMERICAL SIMULATION ON DEVELOPMENT PROCESS OF DUNES AND FLOW RESISTANCE

音田 慎一郎¹・細田 尚²
Shinichiro ONDA and Takashi HOSODA

¹学生員 修(工) 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻博士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

A flow resistance in a river changes with development or attenuation of sand waves. Therefore, it is necessary to know how the flow resistance varies with transformation of sand bed, in order to predict the water surface variations. In this study, the numerical model to reproduce the formation processes of dunes was developed. A depth averaged flow model considering the effects of vertical acceleration and a non-equilibrium sediment transport model is combined. Calculated results on the temporal development processes, the shape characteristics of dunes and flow resistance are compared with previous experimental studies.

Key Words : micro-scale sand wave, depth-averaged flow model, numerical simulation, flow resistance

1. はじめに

河床には、流れの状態によって種々の河床波が生じる。河床波は、そのスケールに応じて中規模河床波と小規模河床波に分類されるが、本研究で対象する小規模河床波が生じると、その形態によって流れに及ぼす影響が異なるため、流れに対する抵抗も変化する。このような河床波の発生・発達あるいは遷移に伴う流れの抵抗変化については、抵抗予測という観点から河川工学的に重要なものであり、従来より実験的、理論的研究が数多く行われてきた。

発達過程に関する実験的研究の一つとして中川・辻本^{1), 2)}の研究が挙げられる。彼等は、平坦河床から河床波が形成される過程について波数スペクトルの時間的変化を調べ、発生過程において生じたスペクトルピークが発達とともに低波数側へ移行すること、平衡状態に達するといわゆる「-3乗則」が成立することを指摘している。

流れの抵抗則に関する研究として、Engelund³⁾の研究がある。彼は、抵抗の相似仮説と河床形態の概念を導入し、同一の河床形態をもつ流れにおいて、土砂輸送に用いられる有効せん断力が全せん断力の関数になることを表した。さらに、実験結果を整理することで、全せん断力と有効せん断力の関係を導いている。岸・黒木⁴⁾は、Engelundの研究を発展させ、有効せん断力が全せん断力と相対水深の関数になると修正している。また、山口・泉⁵⁾は、河床波

の遷移過程に見られる全抵抗と摩擦抵抗の間の二価性について1つの流量に対して2つの河床形状が存在するという観点から、砂堆の弱非線形安定解析を行い、理論的に説明している。

一方、細田ら⁶⁾は、鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルと非平衡流砂モデルを用いて、砂堆の発生・発達過程から平衡状態に至るまでの再現計算を行っている。しかし、砂堆の発達に伴う抵抗増加については明らかにしていない。

そこで本研究では、細田らのモデルを発展させ、流れの抵抗則をも評価できる数値解析モデルの構築を目的とする。流れの基礎式に、多次元モデルを用いることなく、流れと河床波をある程度再現できれば、実用的であると考えられるためである。小規模河床波の発生・発達過程に関する数値解析を行い、発達過程における非定常特性、平衡状態での河床波の形状特性、流れの抵抗則に関して、従来の研究と詳細に比較することにより、モデルの適用性を検討する。

2. 基礎式

流れの基礎式として、細田らと同様に、鉛直方向の流況の変化をモデルに組み込むため、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルを用いる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{gh^2}{2} \cos \phi \right) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{q^2}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2h} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2} \frac{d^2 y_b}{dx^2} \right) \\ & + \frac{dy_b}{dx} \left\{ gh \cos \theta - \frac{U^2}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} + \frac{U^2 h}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} \right. \\ & \left. + U^2 h \frac{d^2 y_b}{dx^2} \right\} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d}{dx} \left(\alpha h^2 U \frac{dU}{dx} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

ここに、 x ：空間座標、 h ：水深、 y_b ：基準面からの路床変動、 q ：単位幅流量、 U ：水深平均流速、 τ_{bx} ：底面せん断応力、 g ：重力加速度、 θ ：路床勾配、 ρ ：水の密度、 α ：渦動粘性係数の係数（本研究では0.05）。

底面せん断応力の評価式については、ポテンシャル流解析の流速分布形と路床近傍の局所的な加速・減速効果を考慮した次式で評価する⁷⁾。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} + \Delta \frac{dy_b}{dx} \right), \quad \Gamma = 2, \Delta = 1 \quad (2)$$

$$u_b = \frac{q}{h} + \frac{q}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} - \frac{q}{6} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{q}{2} \frac{d^2 y_b}{dx^2}$$

ここに、 f は摩擦損失係数である。

路床変動解析には、流砂の非平衡性を考慮した式(3)を用いる⁸⁾。

$$\frac{\partial y_b}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{A_3}{A_2} d(p_d - p_s) \quad (3)$$

ここに、 p_s ：pick-up rate、 p_d ：deposit-rate、 d ：河床材料の粒径、 λ ：河床の空隙率、 A_2 、 A_3 ：砂粒の2次元、3次元の形状係数（ $\pi/4$ 、 $\pi/6$ ）。

pick-up rateの算定には、中川・辻本⁹⁾による式(4)を用い、deposit-rateはpick-upされた土砂体積が式(5)で表されるstep lengthの確率密度関数に従って堆積するものとして計算する。

$$p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = 0.03\tau_* (1 - 0.035/\tau_*)^3 \quad (4)$$

$$f_s(s) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (5)$$

ここに、 σ ：砂粒の密度、 τ_* ：無次元掃流力、 s ：砂粒がpick-upされた地点からの距離、 Λ ：step length（ $=100d$ ）。

3. 数値解析法

流れの数値解析法として、細田らが波状跳水、砂堆の発生・発達過程を再現するために用いた解析法と同様な収束計算法を適用する^{6), 9)}。但し、彼等が行った砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーションでは、発達過程における流れの抵抗増加が明らかにされていない。この理由として、水深勾配がある一定値を超えると静水圧にし、鉛直加速度項を考慮していないためであると考えられる。従って、本研究では、水深勾配がある一定値を超えると、基礎式

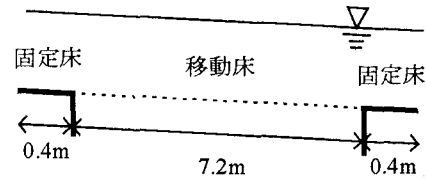


図-1 モデル水路の概要

表-1 計算の水利条件

Run	d (cm)	$\sin \theta$
D1	0.030	1/500
D2	0.040	1/500
D3	0.045	1/500
D4	0.050	1/500
D5	0.040	1/750
D6	0.045	1/750
D7	0.030	1/1000
D8	0.040	1/1000
D9	0.045	1/1000
D10	0.050	1/1000
A1	0.030	1/40
A2	0.040	1/40
A3	0.045	1/40
A4	0.050	1/50
A5	0.040	1/50
A6	0.045	1/50
A7	0.030	1/50

の鉛直加速度項に減衰関数を局所的に乘じ、モデルの改良を行っている。減衰関数を乗ずることで、水深勾配が大きい場合に生じる碎波をある程度再現できると考えられる。

計算法の詳細については参考文献^{6), 9)}に記載されているため、本論文では箇条書きにして簡単に紹介する。

- (1) ある計算ステップ k での h_i^k を既知とする。
- (2) 式(1)の離散式に h_i^k を代入して、各点での誤差 er_i^k を求める。この誤差と次式を用いて次のステップ $k+1$ での水深 h_i^{k+1} を計算した。

$$h_i^{k+1} = h_i^k + sig(k) \cdot \omega \cdot |er_i^k|, \quad \omega = 0.02$$

$$sig(k) = -1 \cdot sig(k-1) \quad \text{for} \quad |er_i^k| \geq |er_i^{k-1}|$$

$$sig(k) = 1 \cdot sig(k-1) \quad \text{for} \quad |er_i^k| < |er_i^{k-1}|$$

流れの収束計算を20万ステップ行った後、式(3)、(4)、(5)によって路床変動計算を2秒間($\Delta t=0.1s$)行い、再び流れの収束計算を行った。

4. 計算条件

図-1に示すように長さ8.0mの水路($\Delta x=2.0cm$)を考え、上下流端0.4mを固定床とし、その間0.4m－7.6mの区間を移動床とする。x座標系の原点は図-1に示した上流側固定床部の上流端である。計算条件を表-1に示す。単位幅流量 q および摩擦損失係数 f をそれぞれ $200(cm^3/s/cm)$ および0.01で固定し、路床勾

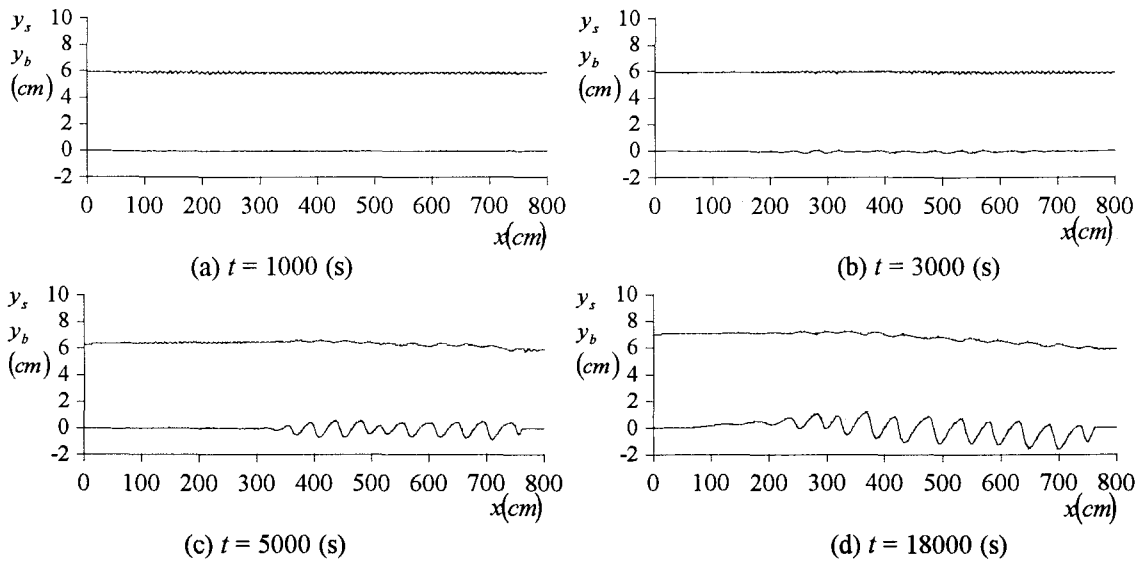


図-2 砂堆の発生・発達過程の計算結果

配, 砂粒の粒径を変化させた。また, 境界条件として, 常流の場合には下流端で, 射流の場合には上流端で等流水深を与え, 上下流端で $dh/dx=0$ とした。流砂量に関しては, 移動床部の平均河床が低下しないように固定床下流側から土砂を pick-up させ, 路床変動計算終了後, 河床高を 0 とした。

5. 計算結果と考察

計算結果の例として, RunD3における水面, 河床高の時間的変化を図-2に示した。移動床上流側から発生した微小擾乱が時間の経過とともに増幅していき, 砂堆が発達しながら下流側へ進行している様子が再現されている。また, 砂堆の発達に伴って, 鉛直加速度項例えば, 路床変動 y_b の空間微分項が形状抵抗として現れるため, 抵抗 (水深) の増加が確認される。但し, 剥離のモデル化については今後の検討を要する。

(1) 砂堆の形成機構

河床波の形成機構をより詳細に考察するため, 平坦河床から河床波が形成される過程について波数スペクトルの時間的変化を調べる。図-3, 4は, RunD3, D8における砂面波数スペクトルの時間的変化を示したものであり, 日野¹⁰⁾が次元解析的に求めた式(6)も併記している。

$$S(k) = \alpha(\phi) k^{-3} \quad (6)$$

ここで $\alpha(\phi)$ は定数である。また, RunD3における路床の拡大図, 波長 L , 波高 H , 波形勾配 H/L の時間的変化を図-5, 6に示す。

砂面波数スペクトルについて中川・辻本^{1), 2)}は実験結果から発達初期に鋭いスペクトルピークの存在が認められること, その後ピークは徐々に低波数側へ移行すること, さらに平衡状態に達すると高波数では3乗則が成立することを指摘している。計算結果の初期段階に注目すると, 波数 $k=0.1(\text{cm}^{-1})$ 付近で

顕著なスペクトルピークが確認される。これは, 図-5(a)に見られる波長約10cmの規則的な河床波と対応しており, 実験結果と同様に, Airyの関係を満たす波長の波に相当すると考えられる。

発達中期になると, 低波数側のスペクトル値が大きくなり, 初期ほど顕著なものではないが, 低波数側にスペクトルピークが現れる。このピークは平衡状態に近づくにしたがって若干低波数側へ移行するか, 或いはほとんど移動しない。また, 低波数側のスペクトルがさらに増大することによってピークが鈍くなっていく様子が見受けられる。この発達中期に現れるピークは, 図-5(b), (c)における波長約40-50cmの河床波に対応したものであり, 平衡状態で生じる河床波の波長とほぼ同じである。これは, 図6からも確認され, 波高は時間の経過とともに発達し, 平衡になるのに対し, 波長は初期段階から中期において急に発達し, それ以降はほとんど変化していない。中川・辻本の実験結果では, 波長, 波高, 波形勾配とも時間の平方根に従って発達しているが, 初期に発生する河床波と中期以降に発達する河床波では発達時間スケールが異なるため, 以上のような結果が得られたと考えられる。

最終的に平衡状態に達すると, 高波数領域では-2から-4乗則となっており, ほぼ-3乗則を満たしている。

図-7は, 河床波の発達時間スケールについて中川・辻本¹¹⁾の提案式(7)と比較したものである。

$$\begin{aligned} \Pi_T &\equiv \left\{ T_D \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd/h} \right\} (d/h)(\tau_*/\tau_c)^{3/2} \\ &= \frac{1-\rho_0}{2f_s(\alpha)} k_T k_L^2 \frac{\delta}{10\tau_* (\tau_*/\tau_c)^{1.5}} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに, T_D : 実際の発達スケール, $1-\rho_0 = 0.6$, $f_s(\alpha) = 0.08$, $k_L = 5.0$, $k_T = 2.0$, δ は, 後述の Yalin-Karahan による提案式(9)である。ただし, 計算結果の限界無次元掃流力 τ_{*c} については各々の粒径を岩垣の式に代入して算出し, 式(7)については, 代表値として粒径 $d=0.04\text{cm}$ から求めた。また, 計算結果にお

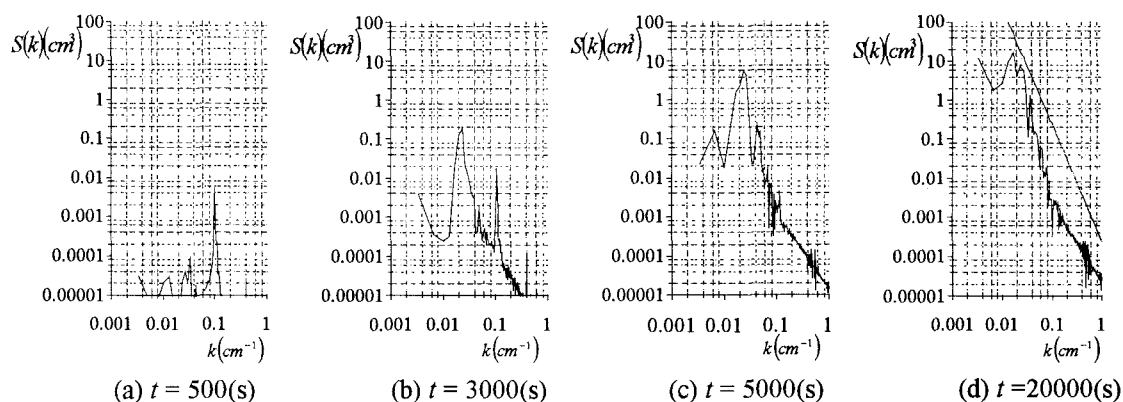


図-3 砂面波数スペクトルの時間的変化 (RunD3)

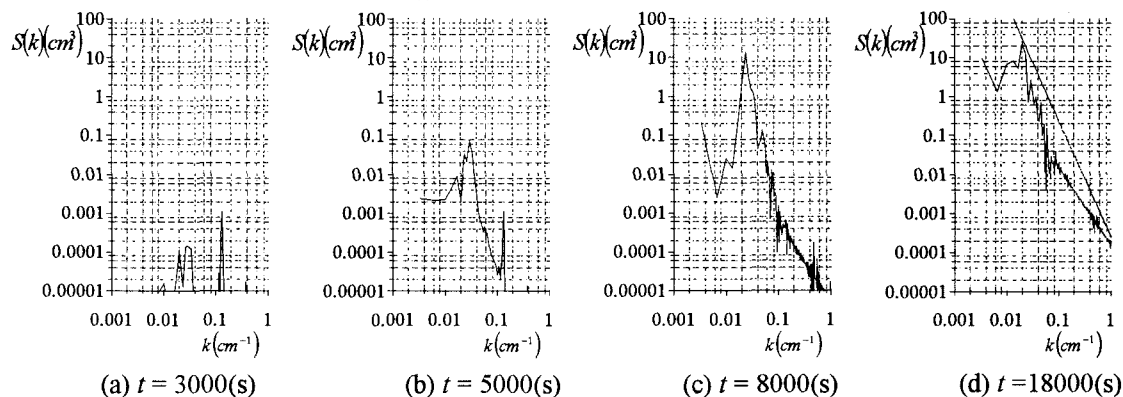


図-4 砂面波数スペクトルの時間的変化 (RunD8)

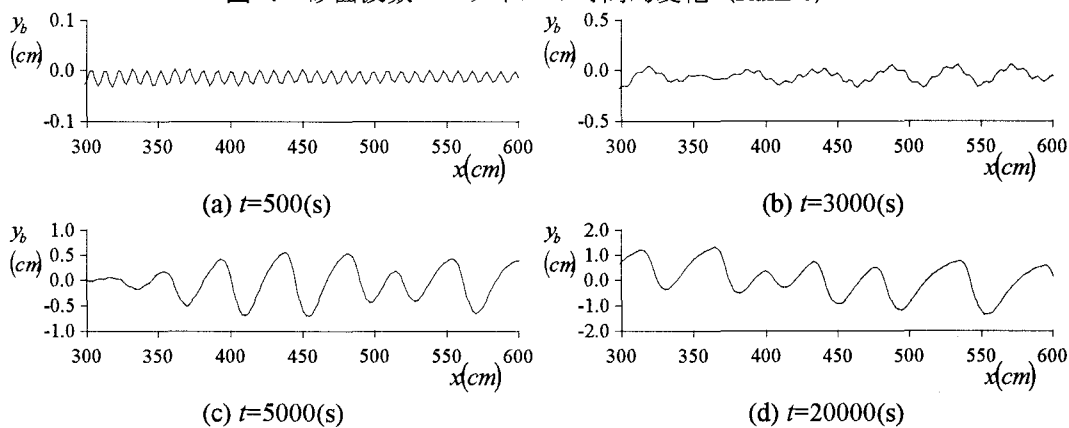


図-5 河床波の時間的変化 (RunD3)

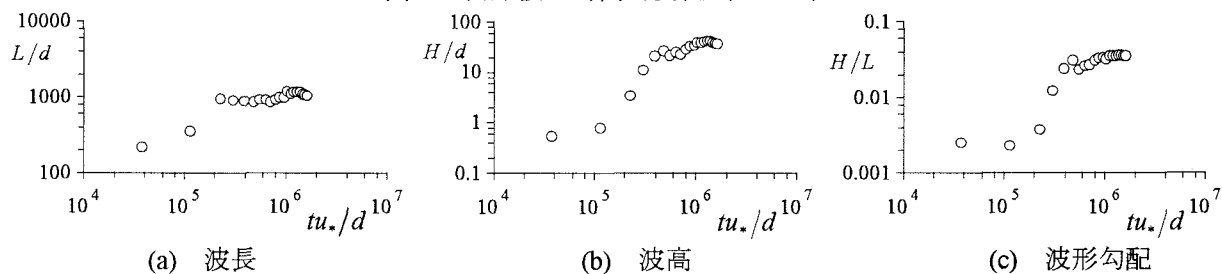


図-6 波長、波高、波形勾配の時間的変化 (RunD3)

ける河床波の発達スケール T_D については、図-6を参考に波形勾配の時間的変化から平衡状態に達したと考えられる時間を用いた。図をみると、計算結果と式(7)はほぼ一致している。

(2) 砂堆の形状特性

表-2は、 $x=3.0\text{m}$ から 6.0m の区間の平衡状態における計算結果を用い、平均波長、平均水深について整

理したものである。砂堆の平均波長については、従来の研究から水深の5倍程度と見積もられており、計算結果はある程度妥当なものである。

また、表-2の結果から、波形勾配 H/L と無次元掃流力 τ_b の関係についてまとめたものが図-8である。計算結果は、Fredsoe¹²⁾、Yalin-Karahan¹³⁾の提案式(8)、(9)とほぼ適合していることがわかる。

[Fredsoe]

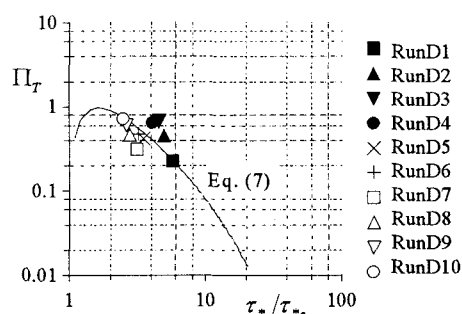


図-7 河床波の発達時間スケール

表-2 平均水深, 平均波高に関する計算結果

Run	平均水深 $h(\text{cm})$	平均波長 $L(\text{cm})$
D1	7.4	42.3
D2	7.1	50.0
D3	6.7	47.0
D4	6.2	58.8
D5	7.4	37.4
D6	7.1	48.0
D7	8.0	32.2
D8	7.8	52.0
D9	7.7	54.4
D10	7.6	46.7

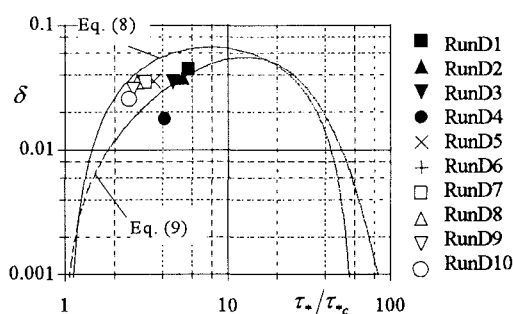


図-8 波形勾配 H/L と τ_* の関係

$$\delta = \frac{H}{L} = \frac{1}{8.4} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} - 0.4\tau_* \right)^2 \quad (8)$$

[Yalin-Karahan]

$$\delta = \frac{H}{L} = \delta_{\max} \frac{\eta - 1}{\eta} \exp \left(\frac{\eta - \eta}{\eta - 1} \right)$$

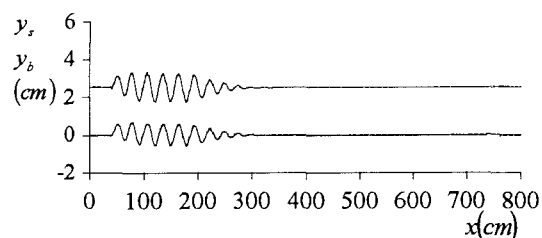
$$\delta_{\max} = 0.0047(\eta - 1), \quad \eta = \tau_* / \tau_{*c}$$

$$\bar{\eta} = 12.84 \quad \text{for} \quad 100 \leq h_0/d \leq 1.04 \times 10^5 \quad (9)$$

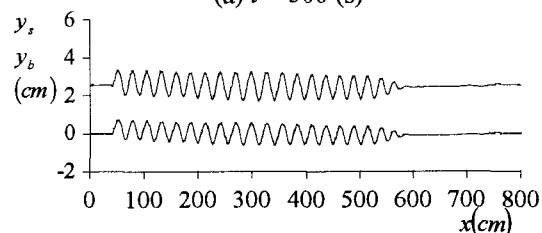
(3) 反砂堆

反砂堆の計算結果として, RunA2の水面, 河床高の時間的変化を示したものが図-9である. 水面形状と河床波形が同位相となっており, 定性的に反砂堆の様相を呈している. 図-9(d)は, $x=4.0\text{m}$ から 5.0m の範囲の路床を拡大したものであり, 反砂堆が上流に向かって進んでいるのがわかる.

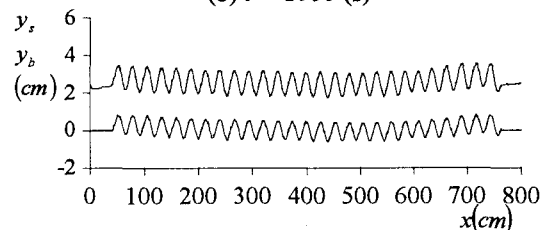
図-10は, RunA2における波数スペクトルの時間的変化を示したものである. 不規則な波の集合である砂堆の場合とは異なり, ある波数でピークをもち, 規則的な河床波が形成されていることがわかる.



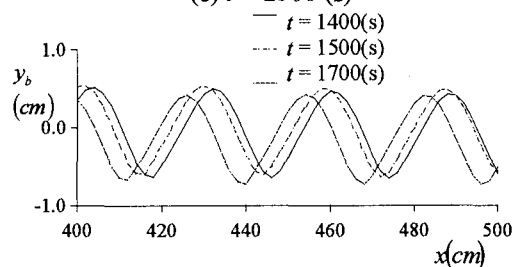
(a) $t = 500$ (s)



(b) $t = 1000$ (s)



(c) $t = 2500$ (s)



(d) 反砂堆の移動方向

図-9 反砂堆の発生・発達過程の計算結果

(4) 無次元波数 kh とフルード数 Fr による領域区分

図-11は, 無次元波数 kh とフルード数 Fr による領域区分を示したものであり, 図中の曲線は, 安定解析¹⁴⁾によって導かれる砂堆と反砂堆の区分曲線(10)とゼロ振幅曲線(11)を表している. 但し, $k=2\pi/L$ である.

$$Fr^2 = \tanh kh / kh \quad (10)$$

$$Fr^2 = 1/kh \quad (11)$$

計算結果は, 従来の実験結果同様, 砂堆・反砂堆の領域区分図と適合している.

(5) 流れの抵抗則

岸・黒木⁴⁾はEngelund³⁾の理論を発展させ, 各河床形態に対する抵抗則を導いている. 抵抗則(流速係数 φ と無次元掃流力の関係)と領域区分を示すと以下ようになる.

$$\text{[砂堆河床I]} \quad \varphi = 2.4(h/d)^{1/6} \tau_{*c}^{-1/3} \quad (12)$$

$$\text{[砂堆河床II]} \quad \varphi = 8.9 \quad (13)$$

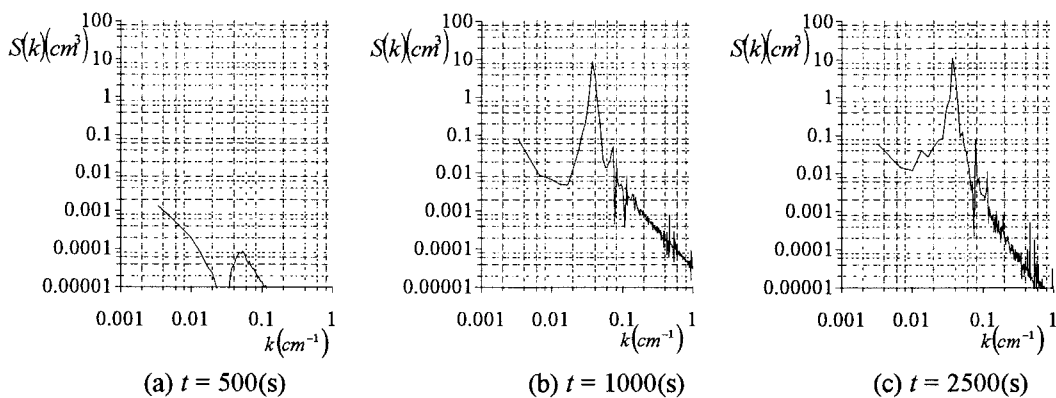


図-10 砂面波数スペクトルの時間的変化 (RunA2)

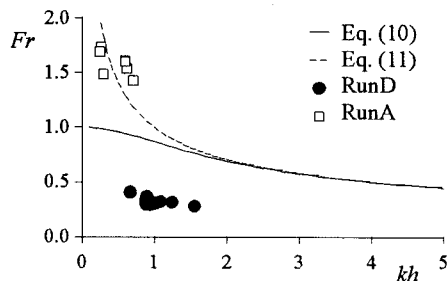


図-11 kh と Fr による領域区分図

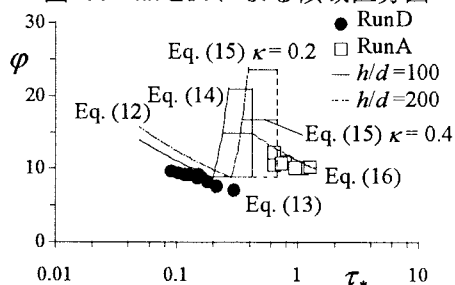


図-12 流速係数の比較

$$[\text{遷移河床I}] \quad \varphi = 1.1 \times 10^6 (h/d)^{-3/2} \tau_*^3 \quad (14)$$

$$[\text{平坦河床}] \quad \varphi = 6.9 (\kappa_0/\kappa)^{1/2} (h/d)^{1/6} \quad (15)$$

$$[\text{反砂堆河床}] \quad \varphi = 2.8 (h/d)^{3/10} \tau_*^{-1/3} \quad (16)$$

ここに κ , κ_0 はそれぞれ清水流, 流砂を含んだ流れでのカルマン定数である。

図-12は, 流速係数に関して計算結果と抵抗則(12)-(16)を比較したものである。なお, 相対水深 h/d には, 計算結果を参考に100と200を代入している。図をみると, 計算結果における流速係数は, 提案式とほぼ一致しており, 本解析モデルは流れの抵抗則を評価できると考えられる。今後, 遷移領域, 或いは平坦河床の場合について検討したい。

5. おわりに

本研究は, 鉛直加速度を考慮した開水路流れの基礎式と非平衡流砂モデルを用いて, 小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析を行ったものである。発達過程における非定常特性, 河床波の形状特性, 流れの抵抗則に関して従来の研究と詳細に検討することにより, 妥当な結果が得られたこ

とを示した。今後, 剥離のモデル化を組み込み, 更なるモデルの発展について検討したい。

参考文献

- 1) 中川博次, 辻本哲郎: 河床波の発達性状に関する実験的考察, 京都大学防災研究所年報, 第19号B-2, pp. 289-309, 1976.
- 2) 中川博次, 辻本哲郎: 河床波スペクトルの形成に関する研究, 土木学会論文集, No.335, pp.107-115, 1983.
- 3) Engelund, F.: Closure to "Hydraulic Division, ASCE, Vol. 117, Paper No. 2528, 1952.
- 4) 岸 力, 黒木幹男: 移動床流れにおける河床形状と流体抵抗(I), 北海道大学工学部研究報告, pp. 1-23, 1972.
- 5) 山口里実, 泉 典洋: デューン-平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp. 75-94, 2003.
- 6) 細田 尚, 加藤隆彰: 水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第44巻, pp. 617-622, 2000.
- 7) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章: 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.81-89, 1997.
- 8) Nakagawa H. and Tsujimoto T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Proc. ASCE*, Vol.106, HY 12, pp.2029-2051, 1980.
- 9) 細田 尚, 多田章秀: 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集, 第38巻, pp. 457-462, 1994.
- 10) Hino M.: Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water, *J. Fluid Mech.*, Vol.34, part3, pp. 565-576, 1986.
- 11) 中川博次, 辻本哲郎: Lower Regimeにおける非定常移動床流れの抵抗の遅れ形状, 第25回水理講演会論文集, pp. 1-7, 1981.
- 12) Fredsoe, J.: The friction factor and height-length relation in flow over a dune-covered bed, *Progressive Report 37*, Institute of Hydrodynamics, Technical University of Denmark, 1975.
- 13) Yalin, M.S. and E. Karahan: Steepness of sedimentary dunes, *Proc. ASCE*, Vol.105, HY4, pp. 381-392, 1979.
- 14) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol.16, Part4, pp. 521-554, 1963.

(2003. 9. 30受付)