

侵食性河床上における ステップの発生に関する実験

Experiments of the step formation on purely erosional beds

島田 典和¹・泉 典洋²

Norikazu SHIMADA and Norihiro IZUMI

¹学生会員 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

²正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科

Steep channels with purely erosional beds are characterized by a series of steps formed on beds. In this paper, experiments were performed in order to study the formation and the evolution of the steps. In the experiments, the wavelength of steps were found to be of the order of ten to sixty times the initial flow depth before the formation of steps. It was observed that the wavelengths reduced over time. In order to investigate the inception of steps, a linear stability analysis is performed with the use of the spectral method with the Chebyshev polynomial. The experimental results were compared with the theoretical results derived from a linear stability analysis. The agreement between theory and experiments were found to be good.

Key Words : *erosional steps, purely erosional bed, steep channel, linear stability analysis*

1. はじめに

河道は、流量や河床勾配、土砂輸送量、河床構成材料など様々な条件により多種多様な河床形態を示すことが知られている。それら様々な条件下における河床形態の挙動を明らかにすることは、河川改修や流路管理、土砂管理などの工学的な観点から重要な問題である。

細砂や礫など非粘着性土砂で構成された河道の河床形状については古くより数多くの研究が行われてきた。それに対して、粘着性土砂や基盤岩で構成された河道についてはこれまでほとんど研究が行われていないのが現状である。粘着性土砂で構成される河床では侵食が卓越するため、河床面における堆積の効果を無視することができる。このとき侵食速度が底面せん断力の関数として表され、河床高さの時間変化は侵食速度で表される。また山間部における沢や小溪流など基盤岩が露出し侵食が卓越すると考えられるような河床においても、河床変動は粘着性土砂の場合とほぼ同一の式で表すことができると考えられる¹⁾。ここではこのような河床を侵食性河床と呼ぶことにする。

芦田・澤井²⁾は、粘着性土砂で構成された河道の縦断形状に関する実験を行い、流れが射流であるとき河床上には連続した段差（ステップ）が形成されるという結果を得ている。また同時に浅水流方程式を用いた線形安定解析を行い、流れが射流となる急勾配水路では、

平坦な侵食性河床は不安定となることを理論的に示している。Izumi and Parker³⁾は、同様の侵食性河床を対象に有限振幅を持ったステップの平衡形状を導き、十分発達したステップの形状とともに波長および波高を理論的に得ている。山口、泉⁴⁾は、芦田らと同様の線形安定解析を流下方向および水深方向二次元のレイノルズ方程式を用いて行い、卓越波長が水深の6から60倍程度となることを明らかにした。しかし得られた卓越波長と芦田らの実験結果の一致は必ずしも良くない。

本研究では、粘着性土砂を用いて侵食性河床を再現し、河床上に形成されるステップの形状特性およびその発達過程を明らかにすると同時に、山口らの解析に比べてより厳密な線形安定解析を行い、理論値との比較、検討を行った。

2. 実験の概要

実験に用いた水路は、図-1(a), (b) に示したような幅 1.0 cm, 長さ 2 m, 高さ 30 cm のアクリル板で作成されており、下流部に 1.7 m の水路部と上流部に長さ 0.3 m のタンク部を有している。またできるだけ横断変化の影響を廃するために水路幅は 1 cm とした。実験は二つのシリーズからなっている。シリーズ 1 では、図-1(a) に示すように、水路部中央付近に段差斜面を成型し、そこに形成されるステップ形状について観測し

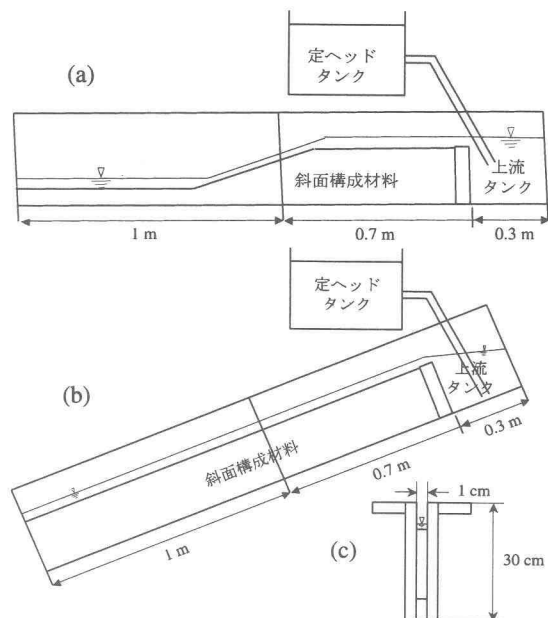


図-1 実験装置 (a) 側面図 (シリーズ 1) (b) 側面図 (シリーズ 2) (c) 断面図

た。実験ではステップの形成間隔が時間の経過とともに変化することが予想されたが、段差斜面部分が短かいためステップが 2, 3 個しか形成されず時間変化は観測できなかった。そこでシリーズ 2 では、十分に水路床の長さをとるため図-1(b) のような初期河床形状とした。水路部分は平坦床とし、水路全体を傾けることで河床勾配を調節している。またいずれのケースにおいても、流水は実験装置上部に設置した定ヘッドタンクから上流タンクに供給するものとし、その供給量を調整バルブにより調節した。水路部上流ではタンクから自然越流させ、下流では堰を設けず水を自由落下させている。斜面構成材料としては、粘着性材料であるカオリナイトと粒径が $70 \mu\text{m}$ のシリカを 8 対 2~7 対 3 の割合で混合したものを用いた。

河床勾配および流量の異なる 9 ケース (シリーズ 1 について 6 ケース、シリーズ 2 について 3 ケース) の実験を行った。実験中は流量を一定とし流水開始後の流量および最大水深とともに河床に擾乱が確認されたときの形成間隔を測定した。形成間隔は水路全体に形成された擾乱の形成間隔を平均で求めている。同様にしてステップが十分発達した後の形成間隔も測定した。また、河床形状の経時変化をビデオで記録した。

河床材料の含水比および粘着性により土砂輸送の侵食速度が変化することが知られている。実験でも、各ケースで含水比やカオリナイトとシリカの混合比の変化に応じてステップの形成される速さが異なる様子が観察された。本実験では河床の変動過程を時間的に

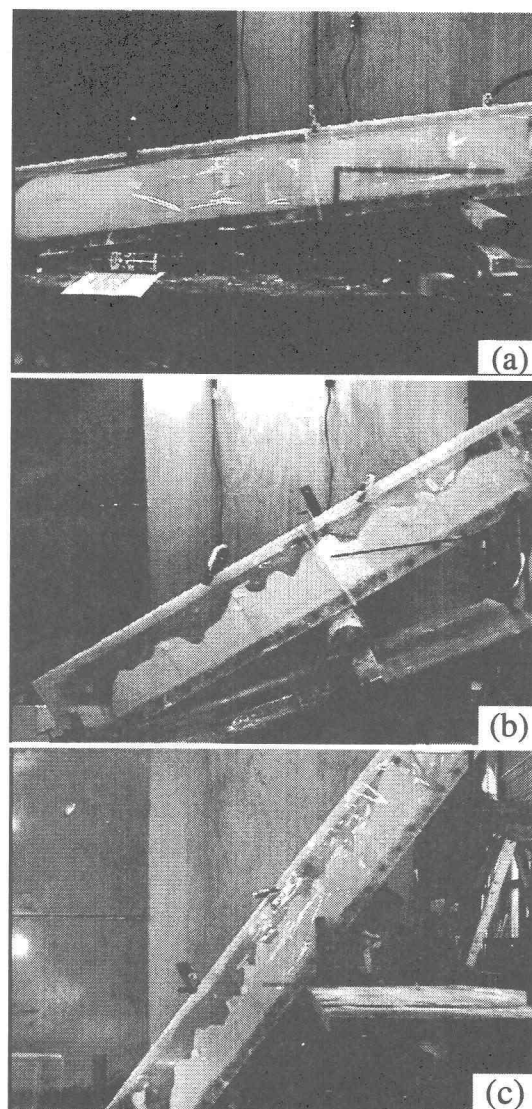


図-2 実験結果 (a)Run2.1 流水開始 24 時間後の形状, (b)Run2.2 流水開始 48 時間後の形状, (c)Run2.3 流水開始 36 時間後の形状

う変わっていくかを観測しているが、その時間スケールについては考えていない。したがって河床材料の含水比や粘着性等の測定は行っていない。

全ケースにおける実験条件とその結果を表-1 に示す。

3. 実験結果

(1) ステップ形成間隔

実験で得られた結果を表-1 に示す。表中 L はステップの波長であり、Run 1.1~1.7 (シリーズ 1 の 6 ケース) では初期擾乱の波長を、Run 2.1~2.3 (シリーズ 2 の 3 ケース) では初期擾乱の波長とともに十分ステップが発達したときの波長を示している。無次元波数 k は水深 D を用いて $k = 2\pi D/L$ と無次元化したものであ

表-1 実験条件

Run No	河床勾配 S	抵抗係数 C_f	単位幅流量 cm^2/s	最大水深 D (cm)	フルード数 Fr	波長 L (cm)	無次元波数 $k = 2\pi D/L$
1.1	0.77	0.054	10.58	0.2	3.78	9.7	0.13
1.2	0.38	0.082	11.05	0.3	2.15	12	0.16
1.4	0.65	0.044	10.7	0.2	3.83	10.3	0.12
1.5	0.57	0.055	10.4	0.22	3.22	11.2	0.12
1.6	0.48	0.067	11.7	0.27	2.66	13.8	0.12
1.7	0.63	0.077	11.2	0.25	2.87	16.8	0.093
2.1	0.18	0.027	28.62	0.5	2.59	44.4→40	0.071→0.079
2.2	0.65	0.035	34.06	0.4	4.3	17.7→14.5	0.14→0.175
2.3	2.24	0.081	32.2	0.35	5.0	34.7→18.9	0.063→0.12

り、0.063～0.18の値をとることがわかる。前述したように、初期擾乱および発達したステップの波長は、形成された擾乱およびステップの波長を水路越しに測定し平均をとったものである。Run 2.1～2.3の実験では4～8個のステップが観測された。

図-2(a), (b), (c)は流水を開始してステップが形成された時の写真である。図-2(a)のRun 2.1では、河床の変化はゆっくりであり、24時間後の河床の変化はわずかであった。図-2(b)および(c)はRun 2.2および2.3において十分時間がたってステップが十分発達したときの形状である。

(2) ステップ形成過程

Run 2.2を例に河床形状の経時変化過程の概要を述べる。実験では、通水を開始して数時間後に平坦床上に微小な擾乱が発生しはじめている様子が目視で確認された。図-3(a)には、この擾乱が流水開始2, 3時間で大きく発達し、河床の侵食が進む様子が観察された。水路床では侵食が進むにつれて堆積も見られたが、せいぜい5 mm程度であり侵食に比較すると無視できる程度であった。図-3(b)は通水7時間後の様子である。ある程度ステップが形成されるとステップによる抵抗により流水は侵食力を低下させ、形状変化は緩慢となった。図-2(c)はRun 2.3の36時間後の形状であるが、図-3(b)とほとんど変化していないことから形状変化が緩慢であったことがわかる。このとき、時間の経過とともにステップ形状を維持しながらゆっくりと上流方向に進行していく様子が観測された。またそれと同時にステップの波長がわずかながら短くなることが明らかとなった。

同様なステップ形成過程がシリーズ2の各ケースに

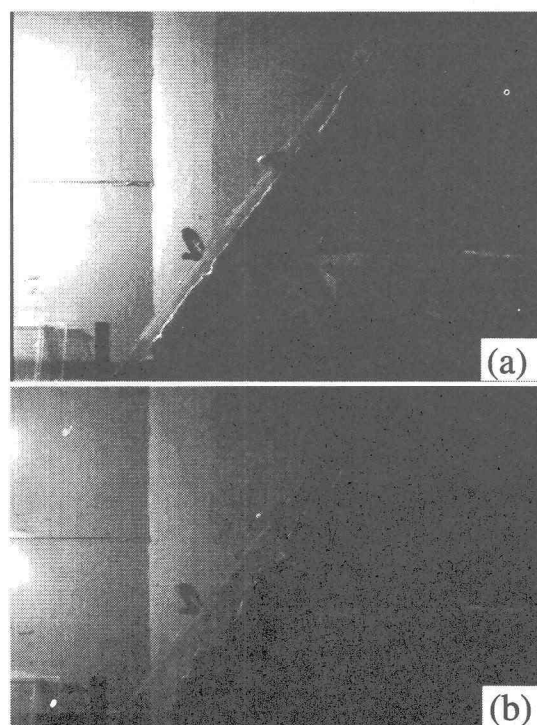


図-3 実験結果 Run2.3 (a) 微小擾乱の発生（流水開始後2時間後）(b) ステップへの発達（流水開始後7時間後）

において観測された。

4. 理論解析

(1) モデル

河床上では、微小擾乱が発生し、それがステップ形状へと発達すると考えられる。山口・泉⁴⁾はこの発生機構をレイノルズ方程式を用いた線形安定解析を行うこ

このとき、レイノルズ方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{(\tau_b - \theta)^3}{\cos \phi} \quad (21)$$

ここで ε は $U_f D$ で無次元化された渦動粘性係数であり 0.077^4), τ_b は無次元底面せん断力であり, $\theta = \tau_{th}/\tau_0$ である。この時, τ_0 は擾乱を与える前の等流状態での底面せん断力を表す。式 (18)-(21) に対して流関数を導入し, 支配方程式を次のように表す。

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} - \varepsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (22)$$

ただし, 流関数は次のように定義している。

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (23)$$

ここで次式で定義される座標変換を導入する。

$$\xi(x) = x, \quad \chi(x, y) = \frac{y - \eta(x)}{h(x) - \eta(x)} \quad (24)$$

(4) 基本解

線形安定解析を行うために, まず擾乱発生前の平坦床における基準状態の解を求めておく。式 (22) および境界条件により $\Psi_0(\chi)$ が次式のように得られる。

$$\Psi_0(\chi) = \frac{1}{6} (-6\kappa\chi - 3\chi^2 + \chi^3) \quad (25)$$

上式より次式の関係が導かれる。

$$\frac{U_f}{U} = \frac{\varepsilon}{(\kappa + 1/3)} \quad (26)$$

これより $[\varepsilon/(\kappa + 1/3)]^2$ が浅水流近似で用いられる抵抗係数 $C_f = (U_f/U)^2$ に相当していることがわかる。

(5) 線形安定解析

この基準状態に対して線形安定解析を行う。平坦床に振幅 A の微小擾乱を与えると, Ψ および p, h, η はそれぞれ次のように摂動展開される。

$$\Psi(\xi, \chi) = \Psi_0(\chi) + A\Psi_1(\chi) \exp[i(k\xi - \omega t)] + \text{c.c.} \quad (27)$$

$$p(\xi, \chi) = p_0(\chi) + Ap_1(\chi) \exp[i(k\xi - \omega t)] + \text{c.c.} \quad (28)$$

$$\eta(\xi) = A\eta_1(\chi) \exp[i(k\xi - \omega t)] + \text{c.c.} \quad (29)$$

$$h(\xi) = 1 + Ah_1(\chi) \exp[i(k\xi - \omega t)] + \text{c.c.} \quad (30)$$

ここで, Chebyshev 多項式を用いて Ψ_1 を次式のように展開する。

$$\Psi_1 = a_0 T_0(\zeta) + a_1 T_1(\zeta) + a_2 T_2(\zeta) + \cdots + a_n T_n(\zeta) \quad (31)$$

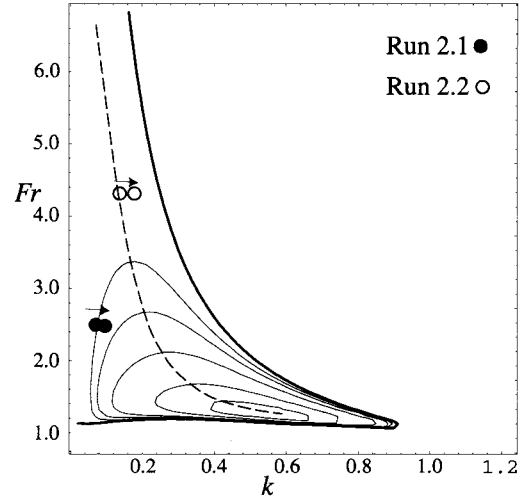


図-5 ω_i の等高線図. $\kappa=0.111(C_f=0.027)$

ここで ζ は次式で表される。

$$\zeta = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) = 2\chi - 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (32)$$

式 (31) を支配方程式 (22) および河床高さの時間変化式 (21), 境界条件に代入して $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ および h_1, η_1 について整理すると次式が得られる。

$$\mathbf{A}\mathbf{\bar{a}} = \omega\mathbf{B}\mathbf{\bar{a}}, \quad \mathbf{\bar{a}} = [a_0, a_1, \dots, a_n, h_1, \eta_1]^T \quad (33)$$

$\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は $a_0, a_1, \dots, a_n, h_1, \eta_1$ の係数で構成される $(n+2) \times (n+2)$ の行列である。上式は ω を固有値とする一般化固有値問題を構成している。ここでは $n=8$ とし, Mathematica を用いて ω を求めた。得られた ω の虚部 ω_i が発達速度となる。

5. 結果及び考察

それぞれ抵抗係数 $C_f = 0.027, 0.055, 0.08$ に相当する $\kappa = 0.111, 0.011, -0.06$ における発達速度 ω_i の等高線図をそれぞれ図-5～図-7 に示す。横軸が無次元波数 k , 縦軸がフルード数 Fr を表している。ここで実線が正のコンタ, 太い実線が中立曲線を表しており, 太い実線の内部で ω_i は正の値をとり河床が不安定になることを示している。また破線はピークの位置を示す。 k による ω_i の値の変化に着目すると, ある Fr の範囲で ω_i の値を最大にする波数 (卓越波数) が存在し, 無次元卓越波数は $0.1 \sim 0.6$ となることがわかる。またその範囲は κ の条件により多少異なることがわかる。この無次元卓越波数 k_c を用いて卓越波長 $\tilde{\lambda}$ は $\tilde{\lambda} = 2\pi D/k_c$ と表せることから, 卓越波長は水深の $10 \sim 60$ 倍程度となる。この結果は山口・泉⁴⁾の解析によって得られた結果とは若干異なり, 河床が不安定となり擾乱が発達する領域

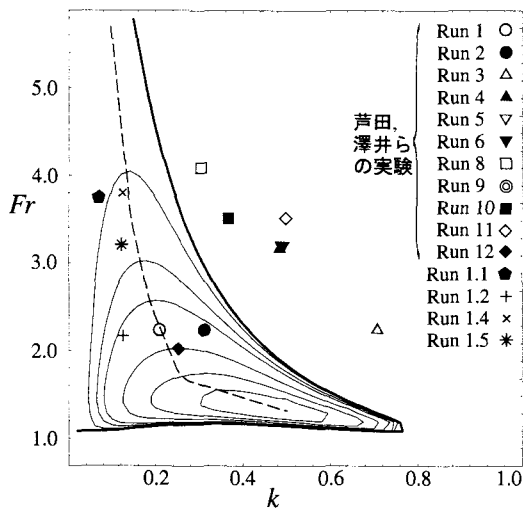


図-6 ω_i の等高線図. $\kappa=0.011(C_f=0.05)$

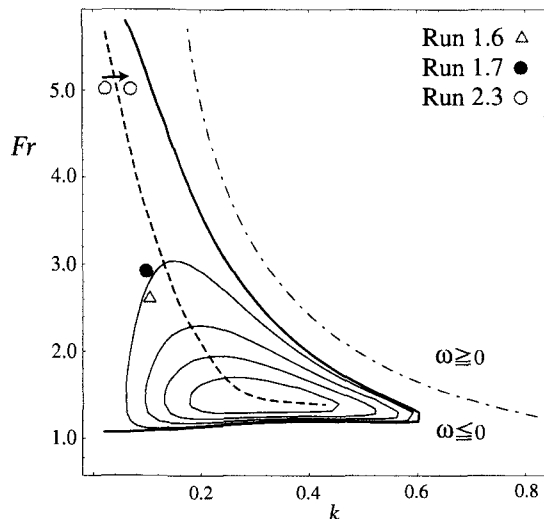


図-7 ω_i の等高線図. $\kappa=-0.06(C_f=0.08)$

および卓越波長は小さくなっている。図中には本実験で得られた値を Run 1.1-2.3 としてプロットした。また、芦田・澤井²⁾ による実験の結果についても Run 1-12 としてプロットした。芦田らの実験では $C_f=0.043$ であるが、 $C_f=0.05$ と近似して図-6 に示してある。

筆者らが行った実験の結果は理論解析で求められた卓越波数とよく合う結果となった。理論解析の結果から得られた卓越波長は初期擾乱の波長を表すので、実験結果の初期の波長と合っている。しかし、時間が経過するとステップ波長が短くなり、無次元波数 k が右方向へずれる結果となった。

芦田・澤井²⁾ の実験値との比較を行った結果、図-6 に見られるように一般に卓越波数の値より大きな値を示し、半数以上のケースで発達速度がマイナスの領域

に存在することがわかった。彼らの実験では、測定された波長が、ある程度時間が経過し十分発達したステップの波長であるためと考えられる。以上の結果から、時間が経過し、擾乱が振幅の大きなステップへと発達していくと無次元波数が線形安定解析によって得られた理論値と比較してかなり大きくなることがわかった。これはステップが発達し振幅が大きくなると、線形解析では考慮できない非線形性の影響が無視できなくなるためと考えられる。また、Run 2.1 では他の実験とは異なり斜面の侵食が小さく、初期擾乱の波長を正確に測定することが困難であった。これによって理論値とのずれが生じたものと考えられる。

ステップが上流側へ移動する現象が観測された Run 2.3 について位相速度を考えてみる。図-7 に示す一点鎖線は $\omega=0$ であり、その右上方で正、左下方で負となっている。それに対して Run 2.3 は $\omega \leq 0$ の領域に位置しており、ステップは上流へ移動することになる。これは実験の結果と一致している。

6. 結論

侵食河床上におけるステップ発生機構に関する実験を行った結果、次のようなことが明らかになった。時間が経過しステップが発達すると、侵食力が低下し形状の変化が緩慢となる。それに伴いステップの波長が発生初期の波長より短くなる。

線形安定解析において Chebyshev 多項式展開を用い、より厳密な擾乱の発達速度を導いた結果、次のようなことが明らかとなった。河床が不安定となる領域は山口・泉⁴⁾ による結果と比べ狭い範囲となり、その発生初期の擾乱の卓越波長は水深の 10~60 倍程度になる。理論解析と実験結果は良い一致を示し、発生初期の擾乱の波長は理論によって説明できることが明らかとなった。しかし、十分に発達したときのステップの波長は非線形性の影響が強いため本研究の線形解析では説明できない。

参考文献

- 1) 泉 典洋, 山口里実: 基盤岩を侵食する河川の縦断河床形状, 水工学論文集, Vol. 41, pp. 871-876, 1997.
- 2) 芦田和男, 澤井健二: 裸地斜面における流路の形成過程に関する研究 (3), 京都大学防災研究所年報, 第 20 号, B-2, 1977.
- 3) Gary Parker and Norihiro Izumi: Purely erosional cyclic and solitary steps created by flow over a cohesive bed, *J. Fluid Mech.*, Vol. 419, pp. 203-238, 2000.
- 4) 山口里実, 泉 典洋: 侵食性河床におけるステップ発生の線形安定性理論, 水工学論文集, Vol. 45, pp. 751-756, 2001.

(2003. 9. 30 受付)