

不等間隔格子と高次内挿法を利用する 格子ボルツマン法による流体解析法

LATTICE BOLTZMANN METHOD WITH NON-UNIFORM GRIDS
AND A HIGHER-ORDER SPATIAL INTERPOLATION METHOD

藤岡 奨¹・牛島 省²

Susumu FUJIOKA and Satoru USHIJIMA

¹ 学生員 京都大学工学部地球工学科

² 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper concerns a Lattice Boltzmann Method (LBM) with non-uniform grids and a higher-order spatial interpolation method, which is applicable to incompressible flows surrounded with complicated-shaped boundaries. In order to preserve numerical accuracy in the non-uniform grids, CIVA method is employed in the interpolation process. The proposed interpolation-supplemented LBM (ISLBM) was applied to a laminar flow and the numerical accuracy was investigated. In addition, the flow in the channel with a side-cavity was numerically predicted with ISLBM. As a result, it was shown that the computational time can be largely reduced with sufficient numerical accuracy by the proposed ISLBM.

KeyWords : ISLBM, LBM, BGK model, CIVA method, non-uniform grid

1. はじめに

水工学で主として扱われる非圧縮性粘性流体, あるいは各種の多相流現象に対して, 近年格子ボルツマン法 (LBM, Lattice Boltzmann Method) による流体解析の有効性が示されている。LBM は 1990 年代から盛んに利用されるようになった新しい流体解析法であり, Navier-Stokes 式を利用する非圧縮性流体解析法と比較して, 計算アルゴリズムが簡単であること, 質量および運動量の保存性を満足すること, また局所平衡分布関数のモデリングにより単相流から多相流までを扱えること, などの利点を有するといわれる¹⁾。

河川や貯水池の 2 次元あるいは 3 次元流況を把握する一つの方法として, Navier-Stokes 式あるいは Reynolds 方程式に基づく非圧縮性流体の計算法を用いることが一般的になっていることを考慮すると, 既往の解法を実現象へ応用する研究だけでなく, 新しい非圧縮性流体の解法を検討することも水工学上の重要な課題である。しかしながら, LBM が水工学上の問題に適用された例は現在までほとんどなく, その有効性と実現象の予測に適用可能であるかを確認することが必要である。

一方, LBM の数値モデルと解法はすでに確立されているものではなく, 重力などの外力の取り扱いを含め, 衝突項や局所平衡分布関数の取り扱い, また不等間隔格子や重合格子の利用, 連続的な表示とした基礎

方程式に対する有限体積法や有限要素法などの離散化手法の適用など, 現在多くの検討が行われている段階である²⁾。特に, 計算格子に関しては, LBM では計算対象領域を十分な分解能を有する規則的な格子で表現しなければならないという制約がある。例えば, 2 次元 9 速度モデル²⁾では, 計算領域は等間隔の正方形格子に分割される。このため, 計算領域内の一部に境界層が存在する場合, あるいは流体渦のスケールが領域内で大きく異なる場合などには, これらに対する最小の格子分割を計算領域全体にわたって設定しなければならない。したがって, 水工学上の課題に LBM を用いる場合には, 不等間隔格子や非構造格子を利用可能にするといった改善が必要である。

以上を考慮して, 本報では, 最初にアルゴリズムが簡単であるといわれる LBM の解法の手順を既往の流体解析法と比較し, 2 次元キャビティ流れを対象として, 計算時間や計算精度の比較を行う。次に, LBM を実現象へ適用する場合の課題の一つとされる, 格子分割の制約に関する検討を加え, 高次精度空間内挿法である CIVA 法³⁾を利用した不等間隔格子における LBM の解法 (ISLBM) について考察する。そして, 平板間の層流流れと, ワンド流れを単純化した側面にキャビティを有する 2 次元平面流れを対象として, 解法の有効性を検討する。

2. LBM の解法と基本特性

(1) LBM の基礎方程式

LBM では、流体を多数の仮想粒子の集合体と考え、そのアンサンブル平均に相当する速度分布関数に関する格子ボルツマン方程式を計算する。時刻 t および 2 次元空間中の位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ において、速度ベクトルが $\mathbf{c}_i$ である仮想粒子の速度分布関数 $f_i(t, \mathbf{x})$ に対する格子ボルツマン方程式は、次式で与えられる²⁾。

$$f_i(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t) - f_i(t, \mathbf{x}) = \Omega_i[f_i(t, \mathbf{x})] \quad (1)$$

ここで、 Ω_i は衝突による粒子分布の変化を表す衝突演算子である。また、下添字の i は、速度の方向を表しており、LBM では粒子の速度の方向は有限個の値に固定されている。式 (1) の数値解は、時刻 t 、位置 $\mathbf{x}$ の速度分布関数に対して衝突演算を行い、時刻 $t + \Delta t$ 、位置 $\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t$ の値を定めるという時間発展的な計算を行うことにより求められる。LBM では、格子点配置を移動後の $\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t$ に一致するように設定するので、仮想粒子は常に格子点上に存在することになる。

速度の方向とそれに対応する格子の設定方法にはいくつかのモデルが提案されている。本報では、密度が一定である 2 次元非圧縮性粘性流体に対する 9 速度モデル (2D9V モデル)²⁾ を対象とした考察を行うこととする。2D9V モデルでは、図 1 に示すように、正方形の格子点上において、8 方向の速度と、速度 0 (静止粒子) の合計 9 成分の速度が用いられる。このモデルでは、速度ベクトル $\mathbf{c}_i$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{c}_i = c \mathbf{e}_i \quad (2)$$

ここに、 $c = \Delta / \Delta t$ 、 Δ は図 1 に示される格子間隔である。また、ベクトル $\mathbf{e}_i$ は、 $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ および

$$\mathbf{e}_i = \left(\cos \left[\frac{(i-1)\pi}{2} \right], \sin \left[\frac{(i-1)\pi}{2} \right] \right), \quad [i = 1, 2, 3, 4]$$

$$\mathbf{e}_i = \sqrt{2} \left(\cos \left[\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad [i = 5, 6, 7, 8] \quad (3)$$

で与えられる。

巨視的変数、すなわち流体を連続体と考えたときの変数である圧力 p と流速ベクトル $\mathbf{u}$ は、速度分布関数と以下のように関係づけられる。

$$p = \sum_i c_s^2 f_i \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i f_i \mathbf{c}_i \quad (5)$$

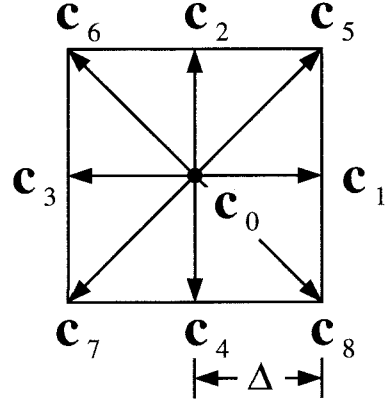


図-1 計算セルと変数の定義位置

ここに、 c_s は音速に相当し、2D9V モデルでは $c/\sqrt{3}$ で与えられる。密度 ρ は、次式で与えられる。

$$\rho = \sum_i f_i \quad (6)$$

衝突演算子には、取り扱いが比較的簡単である以下の BGK モデル²⁾ を利用する。

$$\Omega_i[f_i(t, \mathbf{x})] = -\frac{1}{\tau} [f_i(t, \mathbf{x}) - f_{i0}(t, \mathbf{x})] \quad (7)$$

ここに、 τ は緩和時間、 f_{i0} は局所平衡分布関数である。数値的な安定性のためには、 $0.5 < \tau$ であることが必要とされる。また、局所平衡分布関数は、Chapman-Enskog 展開により、上記の基礎方程式が Navier-Stokes 式に近似的に一致するように定められている²⁾。なお、BGK モデルを用いる場合には、動粘性係数 ν は次式で定義される。

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{\Delta^2}{\Delta t} \quad (8)$$

(2) LBM の解法と基本特性

式 (1) に示されるように、LBM では、適当な境界条件のもとで初期値から陽的な計算を行って所定の時刻あるいは定常状態における流れ場の数値解が求められる。したがって、計算手順は Navier-Stokes 式に基づく非圧縮性流体計算の MAC 系のアルゴリズムと比較して簡単であり、以下のような計算手順が考えられる。

- 1) 初期値あるいは n ステップの速度分布関数 f_i^n から、 p および $\mathbf{u}$ などの巨視的変数を求める。
- 2) 巨視的変数から局所平衡分布関数 f_{i0}^n を求める。
- 3) 式 (1) と式 (7) から得られる次式により、衝突後の速度分布関数 f_i^* を求める。

$$f_i^*(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i^n(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tau} f_{i0}^n(\mathbf{x}) \quad (9)$$

- 4) f_i^* を $\mathbf{c}_i$ 方向へ移動させる。すなわち、

$$f_i^{n+1}(\mathbf{x}) = f_i^*(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta t) \quad (10)$$

5) 上記の手順を所定の時刻あるいは収束条件を満足するまで変数を更新して計算を継続する。

次に、LBM による非圧縮性流体計算の基本的な特性を把握するため、2次元キャビティ流れ⁴⁾の計算を行う。計算領域は一辺が1.0の正方形領域で、座標原点は領域の左下に置き、水平方向に x 座標、鉛直上方に y 座標を取る。キャビティの上部境界が1.0の速度で x 方向に移動し、内部流動が生ずる。ここでは、 $Re = 400$ の流れを計算対象とした。局所平衡分布関数の境界条件は、与えられた巨視的変数 p および u に対する境界条件に基づいて定められる。また、境界上の速度分布関数は、局所平衡分布関数と一致するものとする。

最初に、BGKモデルに用いられる緩和時間の影響を調べた結果を図2に示す。格子数は 45×45 とし、定常解を求めた。式(8)の関係から、BGKモデルを用いる場合には、 Δ と ν が与えられると、 τ を定めることにより、時間間隔 Δt が決定される。モデル上は、 τ は粒子分布が平衡状態に達するまでの時間に相当する。最適な数値解を与える緩和時間に関する条件は、既往研究例では明確に示されていないようであるが、図2に示されるように、 τ の数値解への影響は微小であることが確認された。

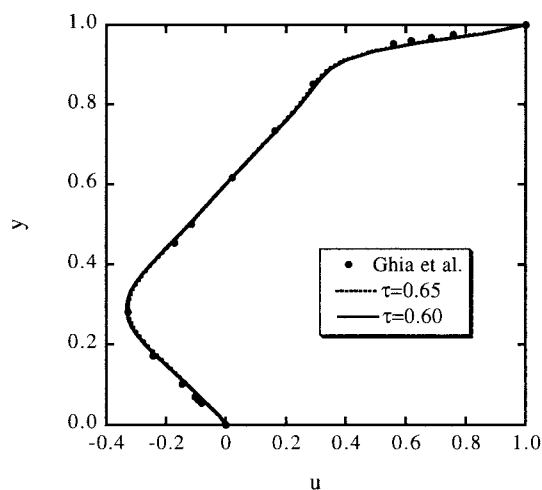


図-2 緩和時間 τ が計算結果に与える影響

次に、Navier-Stokes 式を差分法により離散化して、MAC 系の解法を適用する流体計算法 (以下、FDM) との比較を行う。FDM としては、コロケート格子上で保存形 5 次精度スキーム⁵⁾を移流項に用い、C-HSMAC 法で圧力計算を行う手法³⁾を選択した。予測段階には陽的な解法を用い、等間隔の 31×31 の計算セル分割を行った。また、LBM の計算では 45×45 の格子分割を行い、緩和時間は $\tau = 0.625$ という値を用いた。格

子分割数は、両手法とも同程度の精度の数値解を求めるのに必要となる最小の格子分割数を用いている。定常流速分布を比較した結果を図3に示す。両者および Ghia らの差分法による計算結果はほぼ一致した。LBM の計算に要した時間は、FDM の 1.3 倍程度であったので、両者の計算時間はほぼ同程度であると考えられる。FDM では、不等間隔格子や陰的な解法⁶⁾を利用することにより、さらに計算速度は向上する。このため、LBM でも FDM と同程度の計算効率を保持するためには、不等間隔格子などの導入が必要と考えられる。なお、3次元計算やさらに格子数が大きい大規模計算における計算時間は上記の傾向と異なる可能性があり、別途比較する必要がある。

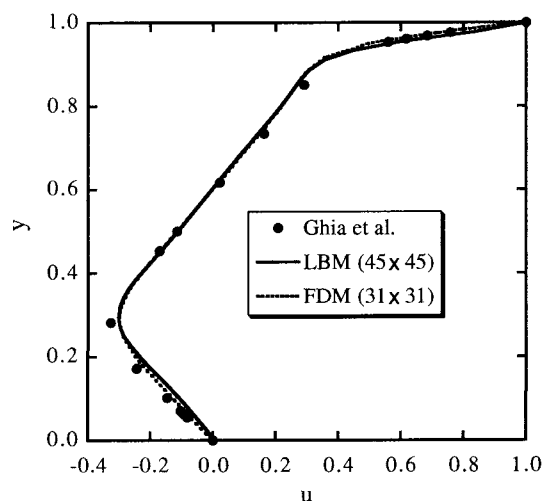


図-3 差分法による非圧縮性流体計算結果との比較 (図中の FDM が差分計算の結果)

3. 不等間隔格子と高次内挿法を用いる LBM

(1) 不等間隔格子を利用する LBM

上記のように、LBM では計算手順が簡単であり、緩和時間を適切に設定できれば従来の非圧縮性流体計算法と同程度の計算時間で適切な数値解が得られる。しかし、LBM では計算領域に等間隔の格子配置を設定する必要があり、この制約は計算効率あるいは複雑な境界形状への適用性という観点から改善が望まれる。

LBM に不等間隔格子あるいは非構造格子を利用するために、微分方程式として表現した基礎方程式に差分法や有限体積法、あるいは有限要素法などの離散化手法を適用する方法と、空間内挿を利用する方法 (ISLBM, interpolation-supplemented LBM) が主として検討されている²⁾。本報では、後者の手法に基づく解法である ISLBM を以下で考察する。

ISLBM では、不等間隔格子が用いられるため、移動した後の粒子位置が格子点と一致しない。このため、

位置が $\mathbf{x}$ である格子点上の分布関数を求めるためには、 $\mathbf{x} - c\Delta t$ なる位置における分布関数を空間的に内挿することが必要となる。すなわち、不等間隔格子を用いる解法では、式 (10) の並進過程において、 $f_i^*(\mathbf{x} - c_i\Delta t)$ を評価する点が一般に格子点と一致しないので、これを近傍の格子点の f_i^* から推定する。LBM と ISLBM の相違はこの内挿過程であり、LBM では、衝突過程と並進過程の繰り返しであったが、ISLBM では、並進過程の前に内挿過程が加わる。

(2) CIVA 法による三角形セル内の空間内挿

ISLBM では、格子形状に関する制約が取り除かれるが、空間内挿に伴う数値的な誤差が発生する。このため、内挿計算には精度の高い手法を用いる必要がある。本報では、非構造格子にも適用可能な 3 次精度の空間内挿法である CIVA 法³⁾を利用する。なお、有限要素法に基づく非構造格子を用いる LBM において CIVA 法が利用された報告がある⁷⁾。

CIVA 法は、CIP 法を三角形のセルに拡張した方法と見ることができる。三角形セルでは、直交座標系よりも取り扱いが容易な面積座標を用いてセル内の任意の点の位置が定められる。図 4 に示すように、三角形セルの各頂点における変数値 ϕ とその偏微分値 ϕ^x および ϕ^y の 3 変数を用いられ、これらの合計 9 変数の値から補間曲面が定められる。ここで、 ϕ^x は、 ϕ の x による偏微分を表す。

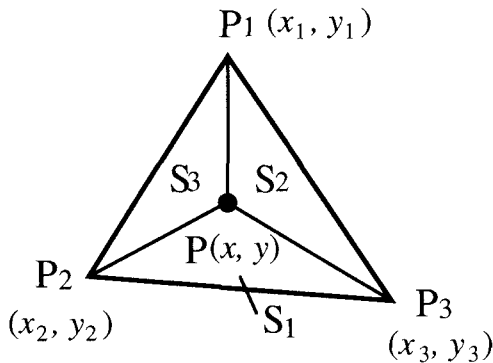


図- 4 CIVA 法で利用する三角形セル

三角形セル内部の任意の点の面積座標 (L_1, L_2, L_3) は、セルの面積 S と図 4 に示す 3 つの小領域の面積 S_m ($m = 1, 2, 3$; $S = \sum S_m$) を用いて、 $L_m = S_m/S$ と表される。なお、面積座標系 (L_1, L_2, L_3) と直交座標系 (x, y) の関係は一意的に関係づけられる。この面積座標系を用いて、三角形セル内部の変数 ϕ は次式か

ら求められる。

$$\phi = \sum_{m=1}^3 \phi_m L_m + d \sum_{\substack{j,k=1, \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3) \quad (11)$$

また、三角形セル内部の ϕ^x および ϕ^y は以下の関係式から求められる。

$$\phi^x = \frac{y_2 - y_3}{J} \phi^{L_1} + \frac{y_3 - y_1}{J} \phi^{L_2} + \frac{y_1 - y_2}{J} \phi^{L_3} \quad (12)$$

$$\phi^y = \frac{x_3 - x_2}{J} \phi^{L_1} + \frac{x_1 - x_3}{J} \phi^{L_2} + \frac{x_2 - x_1}{J} \phi^{L_3} \quad (13)$$

以上の関係式中で、

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - x_j) \phi_j^x + (y_k - y_j) \phi_j^y \quad (14)$$

および

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \quad (15)$$

である。式 (11) のパラメータ d は、1 次補間では 0、また 3 次補間では 1 となる。本報では d を 1 とおき、オーバーシュートあるいはアンダーシュートが生じたときにはこれを 0 とした。また、 c は調節パラメータといわれ、本報では 0.5 に設定した。

本報の ISLBM では、図 5 に示すように、長方形の不等間隔格子を対角線を基準に 2 つの三角形セルに区分し、これに CIVA 法を用いる。粒子の移動方向は図 1 に示した 8 方向であるので、 c_5, c_6, c_7, c_8 方向の分布関数は図 5 のように一般に三角形セル内部の点 P 上で CIVA 法により空間内挿された分布関数から定められる。また、 c_1, c_2, c_3, c_4 方向の分布関数は格子線上の点で同様に空間内挿される。

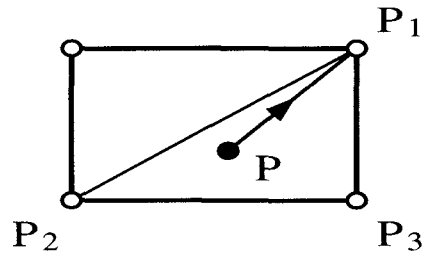


図- 5 不等間隔格子に対する CIVA 法の利用方法

CIVA 法では、三角形セルの各頂点における偏微分値 ϕ^x および ϕ^y を利用するので、CIP 法と同様に ϕ^x および ϕ^y に関する基礎方程式の数値計算が必要とな

る。このため、次のような分布関数の偏微分量に関する衝突および並進過程の基礎式の数値解を求める。

$$f_{i,\alpha}^*(x) = (1 - \frac{1}{\tau})f_{i,\alpha}^n(x) + \frac{1}{\tau}f_{i0,\alpha}^n(x) \quad (16)$$

および

$$f_{i,\alpha}^{n+1}(x) = f_{i,\alpha}^*(x - c_i \Delta t) \quad (17)$$

ここで、 α は x または y であり、 $f_{i,\alpha}$ は f_i の α による偏微分を表す。なお、本報では、 $f_{i,\alpha}$ の境界条件は、境界近傍における 3 点の f_i の値から 2 次関数を定めて、この微分値を与えた。

4. 計算手法の適用性

本報で提案した不等間隔格子を用いる ISLBM の有効性を検討するため、平行平板間の粘性流れと、ワンドを単純化した側面にキャピティを有する平面 2 次元流れに上記の解法を適用する。

(1) 平行平板間の流れに対する計算精度

等間隔格子を用いる LBM (以下、LBM と表現する。) の計算精度を ISLBM と比較するため、平行平板間における低レイノルズ数の流れであるクエット流に本報の解法を適用する。図 6 に計算領域と座標系等を示す。領域の長さスケールは LBM の格子幅を基準として正規化されており、 $L = 176$ 、 $h = 26$ である。2 つの平板のうち、上部の境界は $U = 1.0$ の速度で x 方向に移動する。 x 方向には圧力差 $\Delta P = 0.01$ が与えられ、流速に対しては上下流端で周期境界条件を用いる。定常流のレイノルズ数は 10 とした。

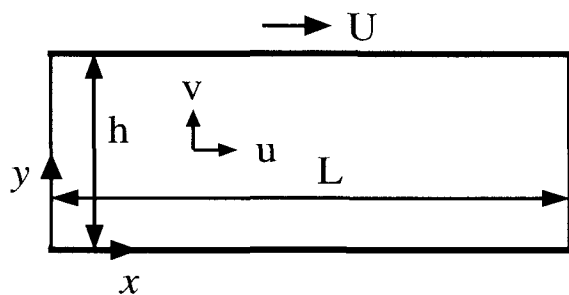


図-6 平行平板間流れの計算領域

LBM では、図 6 に示す 2 次元領域に対して、 176×26 の等間隔格子分割を行った。緩和時間 $\tau = 0.6065$ とし、定常解を求めた。定常解は、 $x = 88.0$ の断面における時間ステップ間の u の変化量の平均値が 2.0×10^{-5} 以下となったときの数値解とした。また、ISLBM では、 88×26 の格子分割を行い、LBM と同様の計算条件で定常解を求めた。

図 7 に $x = 88.0$ の断面における u の分布を示す。図

中の理論解は、次式で与えられる。

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (18)$$

図 7 に示されるように、LBM および ISLBM は理論解とほぼ一致しており、不等間隔格子を用いることで若干の流量の損失が認められるものの、計算精度の著しい低下は生じないことが確認された。なお、上記の計算では、ISLBM の計算速度は LBM の約 1.5 倍であった。

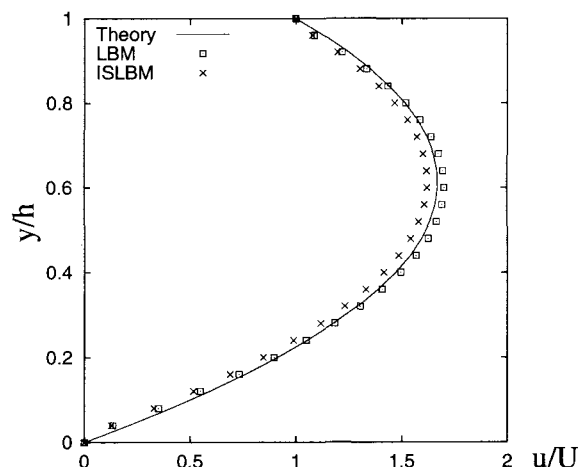


図-7 平行平板間流れの計算結果

(2) 側面キャピティ流れへの適用

実用的な問題への ISLBM の適用性と計算時間に関する有効性を確認することを目的として、側面にキャピティを有する平面 2 次元流れの計算を行う。図 8 と図 9 に計算領域に対する格子分割を示す。左右の側面が上下流端に相当し、これに圧力差 $\Delta P = 0.1$ を与えた。流速の境界条件は、上下流端で周期境界条件、上部壁面は free-slip 条件とし、その他の境界面では non-slip 条件とした。領域の長さスケールは、LBM の格子間隔を基準に正規化されており、流下方向は 111、横断方向には 91 までの領域を計算の対象としている。LBM では 111×91 の格子分割を行い、ISLBM では 71×51 の格子分割とした。同一の緩和時間 $\tau = 0.6065$ を用

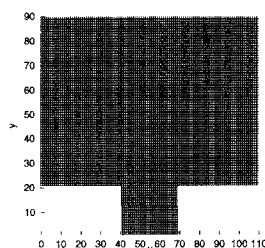


図-8 正方形格子の格子分割

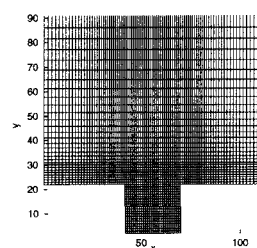


図-9 不等間隔格子の格子分割

いて 2500 ステップまで計算した結果を図 10 と図 11

に示す。また、キャビティ付近の流況を図 12 と図 13 に示す。このときのレイノルズ数は約 1,000 である。ISLBM による結果では、計算の主たる対象であるキャビティ付近の流況は LBM と同様に計算されている。このときの ISLBM の計算速度は LBM の約 2.0 倍であり、不等間隔格子を用いることにより格子点数が削減され、高速な計算が可能となることが確認された。

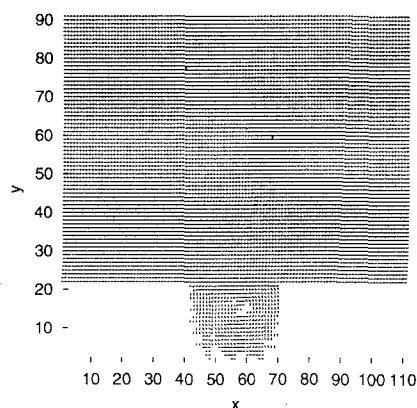


図- 10 側面キャビティ流れの計算結果 (LBM)

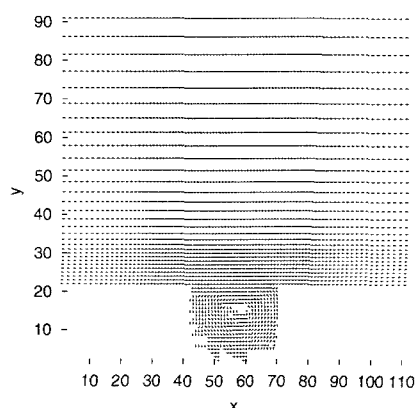


図- 11 側面キャビティ流れの計算結果 (ISLBM)

5. おわりに

本報では、アルゴリズムが簡単といわれる LBM の解法の手順を示し、2次元キャビティ流れを対象として、既往の流体解析法と計算時間および計算精度の比較を行った。さらに、LBM を実現現象へ適用する場合の課題の一つとされる、格子分割の制約に関する検討を加え、高次精度空間内挿法である CIVA 法に基づく不等間隔格子を用いた解法 (ISLBM) を提案した。ISLBM を平行平板間の流れと側面キャビティ流れに適用した結果、ISLBM により精度の著しい低下は見られず、しかも格子点数の低減により計算時間が短縮されることが示された。

今後、計算精度に関するより詳細な検討と解法の改良を進めるとともに、LBM が有効であるとされる多相流れへの適用も考察する予定である。

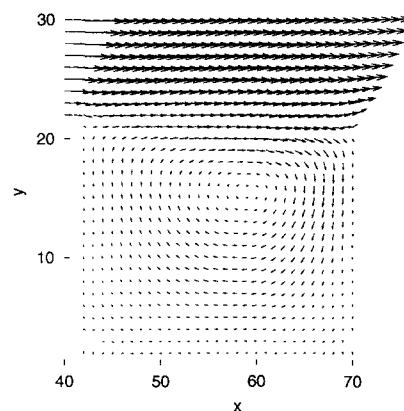


図- 12 キャビティ付近の流況 (LBM)

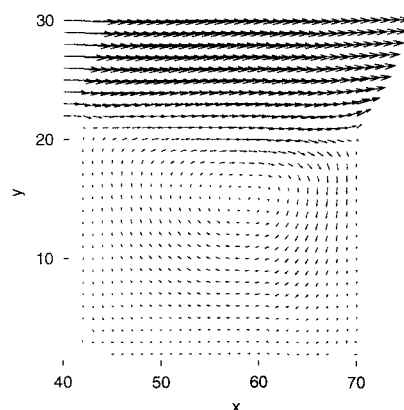


図- 13 キャビティ付近の流況 (ISLBM)

参考文献

- 1) 稲室隆二：格子ボルツマン法－新しい流体シミュレーション法－，物性研究，Vol. 77, pp. 197-232, 2001.
- 2) S.Succi, : *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, CLARENDON PRESS OXFORD, 2001.
- 3) 牛島省, 奥山洋平：非圧縮性流体計算における C-HSMAC 法と SOLA 法の収束特性，土木学会論文集，(掲載予定)，No. 747/II-65, 2003.
- 4) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: High-Resolution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- 5) 牛島省, 吉田圭介, 竹村雅樹, 瀬津家久：フラックス制御を利用する移流方程式の 5 次精度保存形式スキーム，土木学会論文集 (掲載予定)，No. 747/II-65, 2003.
- 6) 牛島省, 瀬津家久：陰解法を用いたコロケート格子による高次精度の流体解析手法の提案，土木学会論文集，No. 719/II-61, pp. 21-30, 2002.
- 7) 立石純也, 檜山和男：CIP 有限要素法を用いた格子ボルツマン法による非圧縮粘性流体解析，計算工学講演会論文集，Vol. 8, pp. 735-738, 2003.

(2003.9.30 受付)