

3次元一般座標系上の移流計算に対する 5次精度保存形スキームとフラックス制御法

FIFTH-ORDER CONSERVATIVE SCHEME WITH FLUX CONTROL
FOR CONVECTION EQUATIONS ON 3D CURVILINEAR COORDINATES

牛島 省¹・藤田 学²・瀬津 家久³

Satoru USHIJIMA, Manabu FUJITA and Iehisa NEZU

¹ 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 学生員 京都大学工学部 地球工学科

³ フェロー 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻

In the three-dimensional curvilinear coordinates, a fifth-order numerical scheme (FVM-QSI scheme) is proposed for convection equations which are discretized with a finite volume method. In the FVM-QSI scheme, fluxes on the cell boundaries are evaluated with quintic spline functions. In order to prevent numerical oscillations, the calculated fluxes are corrected with the flux control techniques (DC and FP methods), which are newly proposed in the 3D space in this paper. As a result of the computations of cubic cavity flows and its scalar convections, it was shown that the FVM-QSI scheme with the DC method enables us to obtain conservative and accurate results without numerical oscillations.

KeyWords : FVM-QSI scheme, finite volume method, flux control,
numerical oscillation, collocated grid, 3D BFC

1. はじめに

流体運動の支配方程式あるいは物質等の輸送方程式を離散化する手法として, 計算セル境界におけるフラックスに基づいてセル内の運動量や物質の収支を求める有限体積法は, 保存性という観点から有効な手法であると位置づけられている. この有限体積法に基づく非圧縮性流体の解法が水工学上の問題へ適用される例も少なくない¹⁾. しかし, 差分法と同様に, 計算精度の高いスキームを構成すること, あるいはスキームの高次精度化に伴う数値振動の取り扱い等に関しては検討すべき多くの課題が残されている.

有限体積法における風上法は, フラックスが適切に計算されれば解の単調性は維持されるが, 数値拡散のため精度の高い計算は困難である. 一方, 2次精度以上の高次精度スキームでは, TVD 条件²⁾が満足されないと, 保存性は満足しても数値解の振動が発生し, 非物理的な変数値が生じて解の信頼性が損なわれたり, 計算が破綻する場合がある.

有限体積法を用いる場合に, このような数値解の振動を抑制する方法の一つとして, QUICK-FRAM³⁾が提案されている. この手法は, QUICK スキーム⁴⁾による計算で数値振動が発生した場合に, FRAM⁵⁾と

同様の考えに基づき, TVD 条件を満足する風上法に切り替える手法である. また, 有限体積法で用いられる TVD 条件を満足するスキームとして, CO スキーム⁶⁾, ENO スキーム⁷⁾, MUSCL^{8),9)}などが提案されている. これらのスキームでは, 高次内挿の際に minmod 関数などの制限関数を利用するなどの方法により, 数値振動を起こさないスキームを構成している.

著者らは, このようなスキームとは異なる原理に基づく数値振動の抑制方法として, オーバシュートあるいはアンダーシュートの大きさに応じてフラックスを計算領域内で再配分することで, 数値解の振動を抑制する手法を提案した. そして, このフラックス制御法を, セル境界上の変数を5次スプライン関数により評価する5次精度保存形スキームと組み合わせることにより, 5次の TVD スキームよりも良好な数値解が得られることを示している¹⁰⁾.

本報では, 1次元あるいは2次元場で示された上記の解法を, 3次元一般座標系へ拡張し, 具体的な離散化法と計算手順を示す. 提案された解法を3次元キャビティ内における非圧縮性粘性流体の運動方程式および同領域内におけるスカラーの移流方程式に適用する. 計算結果に基づいて, スカラー総量の保存性, 数値振動および計算精度に関する検討を加える.

2. 数値解析手法

本報では、3次元一般座標系上における移流方程式あるいは非圧縮性流体の運動方程式の移流項の解法について考察する。5次スプライン関数を利用して、計算セル境界上のフラックスを評価する保存形、すなわち有限体積型の5次精度のスキームを、コロケート格子配置上で導出する。次に、3次元空間中で数値振動を抑制するためのフラックス制御法を示す。

(1) 保存形表示された3次元移流方程式の離散化

問題を簡単にするため、スカラー量 c の移流方程式を対象として解法を示す。運動方程式の移流項に対しても以下と同様の解法を適用できる。移流方程式を一般座標系 (ξ, η, ζ) 上で強保存形¹¹⁾の表示とすれば、次式が得られる。

$$c^{n+1} = c^n - \frac{\Delta t}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (Jc^n U^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Jc^n V^n) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (Jc^n W^n) \right] \quad (1)$$

ここで、式(1)は時間方向にのみ Euler 陽解法により離散化されており、上添字の n は時間ステップ、 Δt は1ステップの時間増分、 J はヤコビアンである。また、 (U, V, W) は、流速の反変成分である。

写像空間中で式(1)を空間的に離散化する。変数の定義位置がコロケート格子配置に従うとし、セル境界上でフラックスを定義すれば、式(1)は次式のように離散化される。

$$c_{ijk}^{n+1} = c_{ijk}^n - \frac{1}{J_{ij}} [C_\xi (F_{ijk} - F_{i-1jk}) + C_\eta (G_{ijk} - G_{ij-1k}) + C_\zeta (H_{ijk} - H_{ijk-1})] \quad (2)$$

ここに、 $C_\xi = \Delta t / \Delta \xi$ 、 $C_\eta = \Delta t / \Delta \eta$ 、 $C_\zeta = \Delta t / \Delta \zeta$ であり、 $\Delta \xi$ 、 $\Delta \eta$ 、 $\Delta \zeta$ は写像空間中のセル間隔である。フラックス F_{ijk} 、 G_{ijk} 、 H_{ijk} は次式で与えられる。

$$F_{ijk} = (Jc^n)_{i+\frac{1}{2}jk} U_{ijk}^n \quad (3a)$$

$$G_{ijk} = (Jc^n)_{ij+\frac{1}{2}k} V_{ijk}^n \quad (3b)$$

$$H_{ijk} = (Jc^n)_{ijk+\frac{1}{2}} W_{ijk}^n \quad (3c)$$

図-1に写像空間中の計算セルに対する変数の配置を示す。スカラー c 、物理空間中の流速成分 (u, v, w) および圧力 p はセルの中心で定義されている。流速の反変成分は、非圧縮性流体の圧力計算の際にセル境界上で評価されるので、式(3)ではこれを利用できる。また、式(3)に含まれる $c_{i+\frac{1}{2}jk}^n$ 等はセル中心上で定義される c_{ijk} をセル境界に空間内挿して得られる。

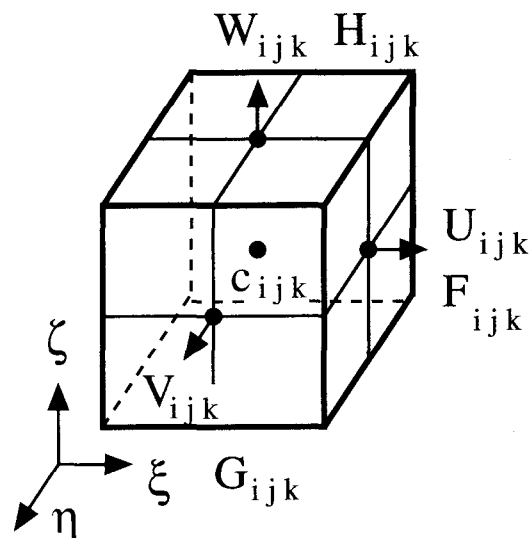


図-1 計算セルと変数の定義位置

(2) 保存形の5次精度スキーム

式(3)では、流速に関してはセル境界上の反変成分を利用できるが、セル境界における $c_{i+\frac{1}{2}jk}$ 等をセル中心の c_{ijk} から適切に空間内挿することが必要である。著者らは1次元あるいは2次元場において、5次スプライン関数を用いてセル境界上の変数を求める方法を提案している¹⁰⁾。本報では、同様の手法を3次元セルの境界面における c の空間内挿に利用する。

5次スプライン関数を利用する有限差分型のスキームとして、前報¹²⁾で非保存形の移流方程式に対するQSIスキームを示した。このスキームでは、セル中心における変数の1階微分量を5次スプライン関数を使用して求めたが、有限体積型のスキームでは、式(3)に示されるように、セル境界で変数値そのものを求めることが必要となる。両者を区別するため、ここで扱うスキームをFVM-QSI(有限体積法に基づくQSIスキーム)と表記する。

1次元場における5次スプライン関数の導出のアルゴリズムはHerriot¹³⁾により示されており、この手法では3個以上の節点を与えられれば対象とする区間の関数が得られる。セル境界上の c の空間内挿法は、前報¹²⁾と同様に、セル境界上の流速成分の符号により利用する格子点を定める。すなわち、風上側に4点、その反対方向に2点の格子点を利用して5次スプライン関数を定め、セル境界上の変数値を空間内挿する。図-2に1次元方向の空間内挿法を示す。3次元写像空間中では、計算セルの各境界面において、流速の反変成分の符号から風上方向を定め、図-2に示す空間内挿をセル境界面と直交する方向に行うことで、セル境界上の c の値を求めることができる。境界付近では、

図-2 (c) に示すように、利用する格子点の配置をシフトさせて、合計 6 点の格子点を用いて同様に内挿を行う。このため、高次精度の差分スキームでしばしば用いられる、境界近傍で低次スキームに接続するという操作は不要である。

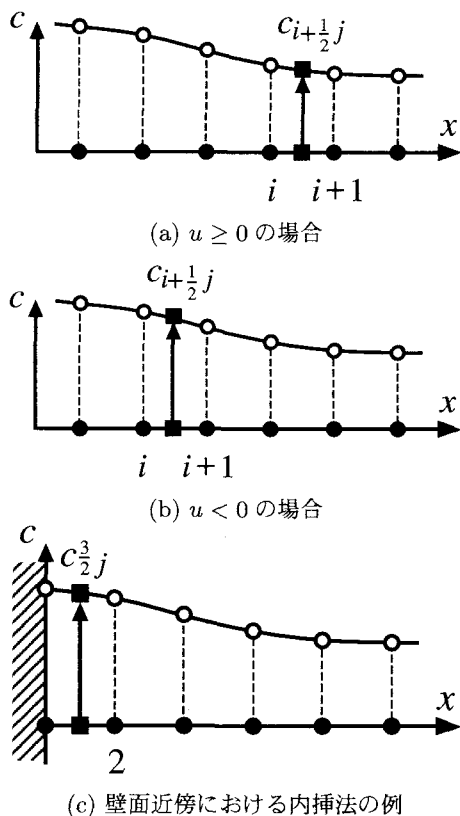


図-2 セル境界上の変数の 5 次スプライン内挿 (図中の●はセル中心, ■はセル境界を表す)

(3) 数値振動抑制のためのフラックス制御法

FVM-QSI スキームによりセル境界上で求められたフラックスを F^* , G^* および H^* と表す。これらのフラックスを式 (2) に用いて計算された c の値を c^* とする。すなわち、

$$c_{ijk}^* = c_{ijk}^n - \frac{1}{J_{ij}} [C_\xi (F_{ijk}^* - F_{i-1jk}^*) + C_\eta (G_{ijk}^* - G_{ij-1k}^*) + C_\zeta (H_{ijk}^* - H_{ijk-1}^*)] \quad (4)$$

c^* をそのまま c^{n+1} とするときには、TVD 条件は満足されず数値振動が生ずる場合がある。数値振動を回避するためには、MMT フィルタ¹⁴⁾ のように、計算された c^* の値を変更してしまう方法がある。しかし、 c^* に対するこのような操作を行うと、一般に保存性が満足されなくなり、有限体積型の離散化法を用いる利点が見失われる。このため、計算された c^* の値ではなく、フラックスを制御する方法を式 (4) へ適用する。

移流方程式の計算が適切に行われる場合、上流域に分布する c^n の最大値よりも過大、あるいは最小値よりも過小な c^{n+1} は発生しない。ここではその原理を利用して、 c^* のオーバーシュートあるいはアンダーシュートの大きさ dc を評価する。すなわち、

$$dc_{ijk} = \max\{c_{ijk}^* - c_{\max}, 0\} \geq 0 \quad (5)$$

$$dc_{ijk} = \min\{c_{ijk}^* - c_{\min}, 0\} \leq 0 \quad (6)$$

を求める。 $dc_{ijk} \neq 0$ の場合には数値振動が生じており、フラックスの補正が必要となる。ここに、 $c_{\max}$ と $c_{\min}$ は、 n ステップにおける上流側の 8 個のセル中心の c の最大値と最小値である。

数値振動を回避するためには、直接的には $c_{ijk}^* - dc_{ijk}$ に相当する補正を F^* , G^* および H^* に対して行えばよい。ただし、この修正により他の計算セルの dc が変化するため、反復計算等により、計算領域全体で dc を 0 に近づける操作が必要となる。ある計算セルにおいて各方向に均等なフラックスの修正を行うとすれば、反復計算の $k+1$ ステップのフラックスの修正値は、 k ステップの値を用いて以下のように求められる。

$$F_{ijk}^{k+1} = F_{ijk}^k - \frac{1}{6C_\xi} [(Jdc^k)_{i+1jk} - (Jdc^k)_{ijk}] \quad (7a)$$

$$G_{ijk}^{k+1} = G_{ijk}^k - \frac{1}{6C_\eta} [(Jdc^k)_{ij+1k} - (Jdc^k)_{ijk}] \quad (7b)$$

$$H_{ijk}^{k+1} = H_{ijk}^k - \frac{1}{6C_\zeta} [(Jdc^k)_{ijk+1} - (Jdc^k)_{ijk}] \quad (7c)$$

反復計算の初期値には、 $F^0 = F^*$, $G^0 = G^*$, $H^0 = H^*$ を用いる。また、反復計算の終了判定には、計算領域中の $|dc_{ijk}|$ の最大値や dc_{ijk} の二乗和などをしきい値 ϵ_d と比較すればよい。上記の方法は、オーバーシュートあるいはアンダーシュートを用いて直接フラックスを修正する DC (direct correction) 法、あるいはフラックスに対する DC 制御に相当する¹⁰⁾。

DC 法では、反復計算の各ステップ毎に修正されたフラックスの影響が 1 計算セルずつ伝播してゆくため、収束解を得るまでに比較的多くの反復計算が必要となる。反復計算回数を低減するために、フラックスの修正量に対するポテンシャルに相当する関数を用いる方法を示す。式 (7) を次のように表す。

$$F_{ijk}^{k+1} = F_{ijk}^k + \tilde{F}_{ijk}^k \quad (8a)$$

$$G_{ijk}^{k+1} = G_{ijk}^k + \tilde{G}_{ijk}^k \quad (8b)$$

$$H_{ijk}^{k+1} = H_{ijk}^k + \tilde{H}_{ijk}^k \quad (8c)$$

$\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ は修正フラックスである。修正フラックスのポテンシャルに相当する関数 ϕ を仮定し、これらが次式から計算されるとする。

$$\tilde{F}_{ijk}^k = -\Gamma_\xi g^{1m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \quad (9a)$$

$$\tilde{G}_{ijk}^k = -\Gamma_\eta g^{2m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \quad (9b)$$

$$\tilde{H}_{ijk}^k = -\Gamma_\zeta g^{3m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \quad (9c)$$

ここに、 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi, \eta, \zeta)$ であり、式 (9) では m に関する総和を取る。また、 Γ_ξ , Γ_η , Γ_ζ はある係数で、 g^{mn} は次式のような基本テンソルの反変成分である。

$$g^{mn} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_l} \quad (10)$$

一方、フラックス制御における反復計算の k ステップの c の値は、空間的な離散化を行う前の基礎式に基づけば、次式で与えられる。

$$c^k = c^n - \frac{\Delta t}{J} \left(\frac{\partial F^k}{\partial \xi} + \frac{\partial G^k}{\partial \eta} + \frac{\partial H^k}{\partial \zeta} \right) \quad (11)$$

また、 $k+1$ ステップでは次のようになる。

$$\begin{aligned} c^{k+1} &= c^k - dc^k \\ &= c^n - \frac{\Delta t}{J} \left(\frac{\partial F^{k+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial G^{k+1}}{\partial \eta} + \frac{\partial H^{k+1}}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

式 (11) と式 (12) の差を取り、式 (8) を考慮すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial \tilde{F}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}^k}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{H}^k}{\partial \zeta} = \frac{Jdc^k}{\Delta t} \quad (13)$$

これに式 (9) を代入すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma_\xi g^{1m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_\eta g^{2m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Gamma_\zeta g^{3m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \right) = -\frac{Jdc^k}{\Delta t} \end{aligned} \quad (14)$$

特に、 $g^{ij} = 0$ (ただし $i \neq j$) が成り立つ格子分割が行われる場合、あるいはこのように仮定できる場合には、

$$\Gamma_\xi = \frac{\Delta \xi}{6C_\xi g^{11}} \quad (15a)$$

$$\Gamma_\eta = \frac{\Delta \eta}{6C_\eta g^{22}} \quad (15b)$$

$$\Gamma_\zeta = \frac{\Delta \zeta}{6C_\eta g^{33}} \quad (15c)$$

とすると、式 (14) を写像空間中で中央差分した離散化式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_{ijk}^k &= \frac{\alpha}{6} (\phi_{i+1jk}^k + \phi_{i-1jk}^k + \phi_{ij+1k}^k + \phi_{ij-1k}^k \\ &\quad + \phi_{ijk+1}^k + \phi_{ijk-1}^k) + Jdc^k \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $0 \leq \alpha \leq 1$ なるパラメータを導入した。 $\alpha = 0$ とすれば、すでに示した DC 法となる。一方、 $\alpha \neq 0$ の場合にはフラックスに対するポテンシャル ϕ を利用する解法、すなわち FP (flux potential) 法あるいは FP 制御となる¹⁰⁾。FP 法では、前報¹⁰⁾ に示されるように、DC 法と比較して精度が低下する可能性があるが、少ない反復回数でフラックスの修正を行うことができると考えられる。

なお、ここで提案された数値振動を抑制するためのフラックス制御法は、FVM-QSI スキームに限らず、QUICK スキームなどの TVD 条件を満足しない一般の高次精度スキームにも適用可能である。

3. 解法の適用性

(1) 計算条件

提案された手法の有効性を確認するため、3 次元立方体キャビティ内の流れの計算を行う。立方体の各辺の長さは 1.0 であり、上部の壁面が 1.0 の速度で移動する。その他の壁面上では流速を 0 とする。キャビティは単純な形状であるが、境界近傍に計算点が密に配置するように座標生成を行い、一般座標系を用いる場合の解法の検証が行える条件とした。座標系を図-3 に示す。

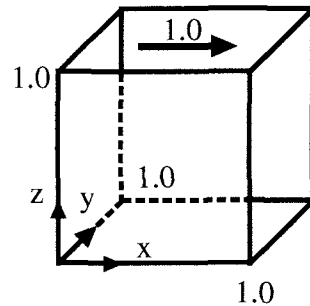


図-3 3次元キャビティと座標系

計算では、非圧縮性粘性流体の計算と、本報で示したパッシブスカラー c の移流計算を行った。計算対象となる流れのレイノルズ数は 400 とした。移流計算を行う際には、流体計算で得られた定常流れ場を初期の流速分布とし、 c の初期条件としては $c = 1.0$ ($z < 0.5$)、 $c = 0.0$ ($z \geq 0.5$) という分布を与え、 c が移流される過程を計算した。境界ではスカラーフラックスは 0 という条件とした。このため、計算領域内の c の総量は理論的には常に一定となる。なお、以下に示す FVM-QSI スキームの計算では、式 (16) において $\alpha = 0$ と

した DC 法によるフラックス制御を行っている。DC 法におけるオーバーシュートおよびアンダーシュートの最大値に対するしきい値 ϵ_d は 1.0×10^{-8} とした。

(2) 流体計算における解法の精度

最初に、流体の運動方程式の移流項に FVM-QSI スキームと 5 次精度の TVD スキームを用いたときの流速分布を比較する。両手法の相違を明確にするため、粗い格子分割 (計算セル数は $21 \times 21 \times 21$) を用いた計算を行った。 $x = y = 0.5$ における u の z 方向の分布のうち、底面近傍の結果を拡大して図-4 に示す。疑似スペクトル法を用いた Ku¹⁵⁾ の計算結果と比較すると、FVM-QSI スキームによる分布がそれに近いものとなっている。同図中には、計算セル数を $25 \times 25 \times 25$ としたときの 5 次精度の TVD スキームによる結果が合わせて示されている。格子分割を細かくすると解は改善されるが、粗い格子分割を用いた FVM-QSI スキームの結果と比較するとお十分な精度は得られていない。このときの 5 次精度の TVD スキームの流体計算に要した計算時間は、FVM-QSI スキームの約 1.2 倍であった。このため、2 次元計算の場合¹⁰⁾と同様に、FVM-QSI スキームは実用的な計算時間のもとで精度の高い結果が得られる手法であることが確認された。

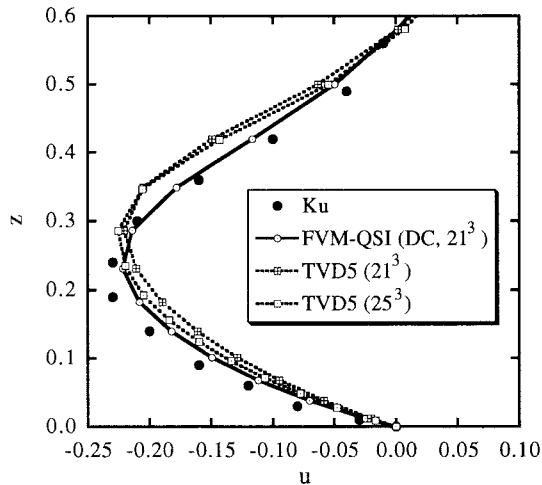


図-4 流速分布の比較 ($x = y = 0.5$, 底面近傍の結果)

(3) スカラーの保存性

次に、上記の FVM-QSI スキームで得られた定常な流速分布を $t = 0$ における初期値として、 $t = 2.0$ まで c の移流計算を行った。図-5 に、FVM-QSI スキームを用いた場合の c の等値面の分布を示す。

図-6 に計算領域内の c の総量 S_c を比較した結果を示す。ここに、 $S_c = (S_c^* - S_{c0}^*)/S_{c0}^*$ であり、 S_c^* と S_{c0}^* は、それぞれ時刻 t および初期のスカラーの総量であ

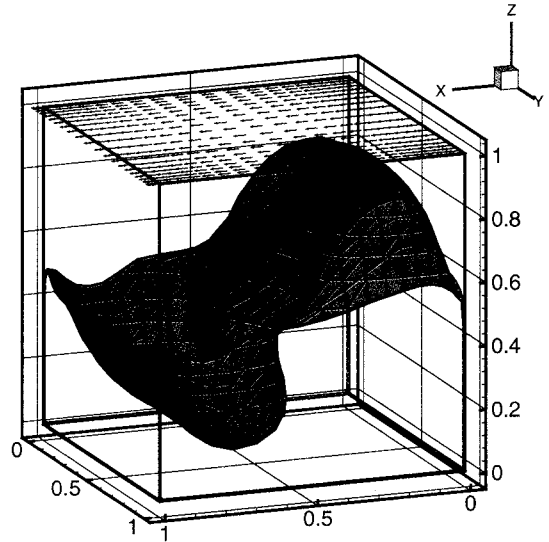


図-5 スカラー量の等値面 (0.5) の分布 (FVM-QSI スキームによる結果, $t = 2.0$)

る。隣接する 2 つのセルで、共通のセル境界のフラックスが移流計算に利用されれば、理論的に保存性は満足される。このため、図-6 に示した FVM-QSI スキームおよび QUICK スキームによる保存性の誤差は、いわゆるマシンゼロのレベルであると考えられる。しかしながら、QUICK スキームに対して MMT フィルタを作用させた場合には、図-6 に示されるように、保存性が大きく損なわれている。一方、FVM-QSI スキームの計算では、DC 法が用いられているが、これはフラックスに対する補正であるため、保存性は損なわれていない。

(4) 数値振動の比較

TVD 条件を満足しない高次スキームでは、ステップ状のスカラーの分布が与えられた場合などに数値振動を起すことが多い。図-7 は、 c の移流計算における数値振動を示すもので、物理的には生じないはずの 1.0 を越える c の値に対する $D_c = \max\{c_{ijk} - 1.0\}$ の時間的な変化を示している。QUICK スキームはそのままでは TVD 条件を満足しないので、 10^{-1} のオーダーに達する大きな数値振動が生じている。また、風上法においても、フラックスの計算値に基づくスカラーの収支がセル内で完全に満足されない場合には、微小な数値振動が生ずる。これらに対して、DC 法を用いた FVM-QSI スキームの計算では、数値振動のレベルは風上法よりもさらに低い値に制御されている。

以上のように、本報で示したフラックス制御法は、保存性を損なわずに数値振動を抑制するために、有効であると考えられる。

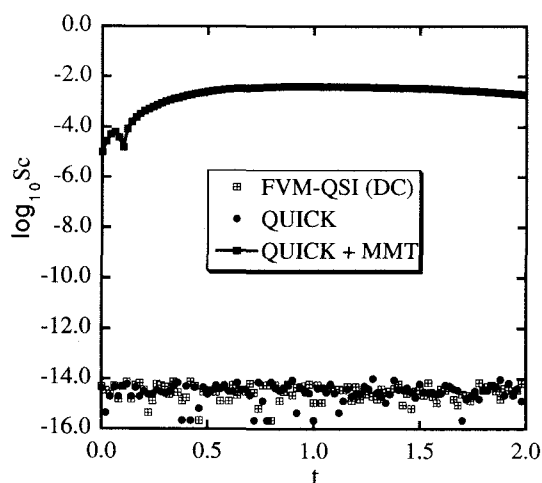


図-6 スカラーの総量の保存性の比較

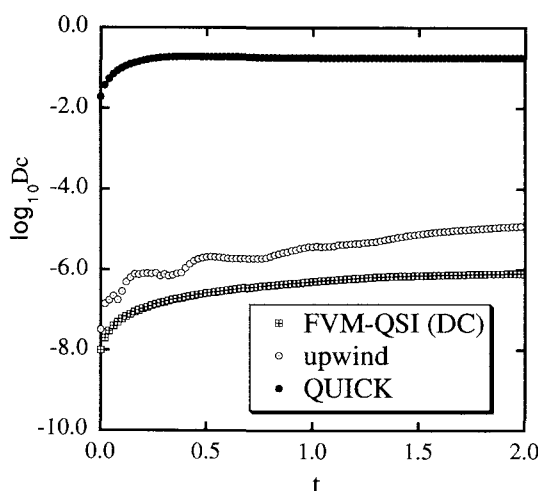


図-7 数値振動の比較

4. おわりに

本報では、3次元一般座標系上で有限体積法により離散化された移流方程式あるいは運動方程式の移流項を、保存性を損なわずに数値振動を抑制し、しかも高精度に計算するための手法について考察した。この解法を3次元キャビティ内の流体計算およびスカラーの移流計算に適用し、その妥当性を検討した。その結果、フラックス制御法を用いることで、保存性を維持しながら数値振動を抑制できることが確認された。また、5次スプライン関数を利用して計算セル境界のフラックスを評価するFVM-QSIスキームを3次元場に拡張し、これにフラックス制御法を用いて流体計算を行った結果、5次精度TVDスキームと比較して良好な数値解が得られることが示された。

参考文献

1) 木村一郎, 細田尚, 音田慎一郎, 富永晃宏: 越流型水制周辺の非定常三次元流れ構造に及ぼす水制設置角度の影響, 水工学論文集, Vol. 47, pp. 841-846, 2003.

2) Harten, A.: on a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes, *SIAM Journal*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-12, 1984.

3) 前川勇: 多次元伝熱流動計算における数値拡散, (II), 日本原子力学会誌, Vol. 29, No. 9, pp. 823-833, 1987.

4) Leonard, B. P.: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59-98, 1979.

5) Chapman, M.: FRAM — Nonlinear damping algorithms for the continuity equation, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 25-38, 1981.

6) Chakravarthy, S. R. and Osher, S.: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws, *AIAA Paper*, 85-0363, 1985.

7) Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S. R.: Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III, *J. Comput. Phys.*, Vol. 71, pp. 231-303, 1987.

8) van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, pp. 101-136, 1979.

9) Yamamoto, S. and Daiguji, H.: Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Computers Fluids*, Vol. 22, No. 2/3, pp. 259-270, 1993.

10) 牛島省, 吉田圭介, 竹村雅樹, 瀬津家久: フラックス制御を利用する移流方程式の5次精度保存形スキーム, 土木学会論文集 (掲載予定), No. 747/II-65, 2003.

11) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.

12) 牛島省, 瀬津家久, 山上路生, 坂根由季子: 局所5次スプライン内挿法(QSI法)を利用したコロケート格子による流体解析手法, 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73-83, 2001.

13) Herriot, J. G. and Reinsch, C. H.: Procedures for quintic natural spline interpolation, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 2, No. 3, pp. 281-289, 1976.

14) Koshizuka, S., Oka, Y., Kondo, S. and Togo, Y.: Interpolating matrix method: A finite difference method for arbitrary arrangement of mesh points, *J. Comput. Phys.*, Vol. 75, pp. 444-468, 1988.

15) Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D.: A pseudospectral methods for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 70, pp. 439-462, 1987.

(2003.9.30 受付)