

非構造コロケート 格子を用いる 非圧縮性流体計算の圧力解法に関する考察

C-HSMAC METHOD FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS WITH UNSTRUCTURED COLLOCATED GRID SYSTEM

奥山 洋平¹・牛島 省²

Yohei OKUYAMA and Satoru USHIJIMA

¹ 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻 修士課程

² 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

A pressure computation method for incompressible fluid flows is investigated in the unstructured collocated grid system. The governing equations are discretized with a finite volume method. The CBP (Cell-Boundary Pressure) scheme, which was proposed in the structured grid, is used to calculate the cell-center velocity components in the prediction stage. The C-HSMAC method is applied to obtain the pressure distribution which makes the velocity field satisfy the continuity equation. In the unstructured grid, the pressure gradient used in the C-HSMAC method is evaluated on the cell boundary from the line integral around the neighboring two cells. In order to confirm the validity of the proposed computational method, it was applied to the flows in a cavity and meandering channels.

KeyWords : *incompressible flow, collocated grid, unstructured mesh, C-HSMAC method, FVM*

1. はじめに

河川周辺の環境を改善あるいは保持するために、河岸形状を自然の状態に近づける設計が行われたり、人工ワンドや水制の導入などが計画される例が見られる。このような場合に、流況を数値的に予測するためには、境界形状を適切に扱う必要がある。このために、構造格子を用いる一般座標系による解法¹⁾、また、有限体積法に基づき非構造格子を利用する解法などが検討されている^{2), 3)}。非構造格子は領域形状に対する自由度が高く、実用的な問題に対して有用である。しかしながら、非構造格子を用いる流体計算手法には、計算精度や圧力解法などに関する検討すべき課題が多く残されている。本報では、非圧縮性流体の基礎式を有限体積法で離散化し、非構造格子上で数値解析を行う場合の圧力計算法を対象として、その解法を考察する。

構造格子を用いる流体計算においては、圧力と流速の変数配置として、近年、コロケート配置に基づく解法が検討されている。コロケート配置では、すべての流速成分と圧力がセル中心点上で定義されるので、スタガード配置と比較してプログラムが簡単となり、また並列処理における領域分割を容易に行えるなどの利

点がある。著者らは、コロケート配置に基づくMAC系の流体計算法を対象として、予測段階における圧力項の取り扱いや圧力計算法などについて検討を加えた⁴⁾。また、圧力計算段階では、非圧縮性流体の連続条件に対する数値誤差を適切に制御することが重要であり、このための解法としてC-HSMAC法を示した⁵⁾。C-HSMAC法は、収束解を得るまでの計算時間がSOLA法と比較して短く、収束特性が優れていることなどが示されている⁶⁾。

本報では、上記のような構造格子で有効性が示された解法を、非構造コロケート格子を用いる流体計算法に適用する手順を示し、提案された解法の有効性を検討する。最初に、構造格子で示されたCBPスキーム⁴⁾を用いる予測段階の計算法を示す。次に、セル境界の両側に位置する2つの計算セルを利用して、セル境界上の圧力勾配を求める方法を示し、これにより構造格子で示されたC-HSMAC法のアルゴリズムを非構造格子上においても同様に展開できることを示す。得られた解法の有効性を確認するため、キャビティ流れの計算を行い、流速分布と流体の連続性に対する検討を加える。さらに、計算手法を河道模型内の流れに適用し、実用的な問題に応用可能であることを示す。

2. 数値解析手法

(1) 非構造コロケート格子

本報では、2次元場を対象とし、非構造格子として三角形の計算セルを用いる。以下では三角形の頂点を節点 (node)、辺をセル境界 (cell boundary) と表記する。Rhie and Chow ⁷⁾ が示した変数のコロケート格子配置は、構造格子に対するものであるが、ここでは同様の変数配置を非構造格子に対して用いる。すなわち、図-1 に示すように、計算セル中心点 (三角形セルの重心点) に圧力と2方向の流速成分を定義する。さらに、運動量フラックスとセル境界流速をセル境界節点 (cell boundary node) 上に定義する。セル境界節点は、セル境界を形成する両端の節点の midpoint とする。

各節点には、計算領域全体にわたり、1 から総節点数までの連続的な番号が付けられている。一方、計算セルを構成する節点とセル境界節点には、図-1 に示すように局所節点番号 (1, 2, 3) が与えられる。

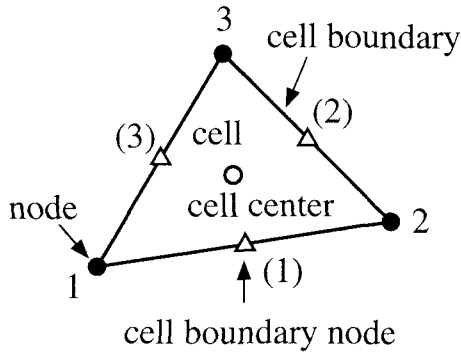


図-1 計算セルと変数の定義点

(2) 基礎方程式

本報では密度 ρ が一定な非圧縮性流体を扱う。また、簡単のため外力は考慮しない。基礎方程式は連続式と Navier-Stokes 式である。基礎式の離散化法として、有限体積法を用いる。有限体積法で利用される積分形の基礎式は以下のように表される。

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_i \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl = 0 \quad (2)$$

ここに、

$$\mathbf{F} = u_i \mathbf{u} + \frac{p}{\rho} \mathbf{k}_i - \nu \nabla u_i \quad (3)$$

以上の基礎式中で、 Ω はある有限な領域を表し、 $\partial\Omega$ はその境界を表す。 $\mathbf{n}$ は境界における領域外側へ向かう

単位法線ベクトルである。 $\mathbf{k}_i$ は直交座標系の座標成分 x_i 方向へ向かう単位ベクトルである。また、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 u_i は流速ベクトルの x_i 成分、 p は圧力、 ν は動粘性係数である。

(3) 予測段階の計算法

構造格子上で変数のコロケート配置を用いる場合の MAC 系解法の手順 ⁴⁾ と同様に、非構造格子を用いる場合でも、予測段階において、セル中心で流速ベクトルの推定値 $\mathbf{u}_c$ を求める。構造格子においては、セル中心における $\mathbf{u}_c$ の評価に圧力勾配を用いず、これがセル境界に空間内挿された段階で圧力を考慮する CBP スキームが有効であることが示されている ⁴⁾。ここでも同様に、セル中心における $\mathbf{u}_c$ を移流項と拡散項のみを含めた次式から計算する。

$$u_{c,i} = u_i^n - \frac{\Delta t}{S} \oint_{\partial\Omega} u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} \, dl + \nu \frac{\Delta t}{S} \oint_{\partial\Omega} \nabla u_i^n \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (4)$$

ここに、対象とする計算セル領域を Ω とし、その境界を $\partial\Omega$ 、またその面積を S とする。また、式 (4) では簡単のため時間方向の離散化には Euler 陽解法を用いており、 Δt は1ステップの時間増分である。

移流項の離散化式は以下ようになる。式 (4) 右辺第2項の積分を C_i と表す。すなわち、

$$C_i = \oint_{\partial\Omega} u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (5)$$

三角形の計算セルでは、式 (5) は次のように近似される。

$$C_i = \sum_{m=1}^3 f_{i,m} l_m \quad (6)$$

ここに、 $f_{i,m}$ はセル境界 m における $u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}$ の値を表す。また、 l_m はセル境界 m の長さである。 $f_{i,m}$ はセル境界節点で評価する。セル境界法線方向に1次元リーマン問題を仮定し、セル内の流速がセル中心流速で与えられるとして Roe の flux difference scheme ⁸⁾ を $f_{i,m}$ に適用すれば、1次精度の評価となる。一方、セル内の平均勾配 $\nabla u_{i,A}$ を求めて、セル内の $u_i(x, y)$ を次式のように評価すると高次精度の離散化が行える ⁹⁾。

$$u_i(x, y) = u_{i,A} + \nabla u_{i,A} \cdot \mathbf{r} \quad (7)$$

ここに、 $u_{i,A}$ はセル中心の u_i 、また $\mathbf{r}$ はセル中心を始点とする位置ベクトルである。本報では、後述する適用性の検討において、上記の方法に従い、1次および2次精度の離散化を移流項に用いる。

次に、式 (4) により計算された $\mathbf{u}_c$ をセル境界へ空間内挿する。簡単な内挿法として、セル境界の両側に位置する計算セルのセル中心の値を用いて、これに各

セル面積の重み付けを行う線形内挿が考えられる。空間内挿された流速ベクトルを $\mathbf{u}_b^*$ とするとき、これに対して次式のように圧力 p^n を考慮する。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_b^* &= \mathbf{u}_b^* - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} \int_{\Omega_{b,m}} \nabla p^n d\Omega \\ &= \mathbf{u}_b^* - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} \oint_{\partial\Omega_{b,m}} p^n \mathbf{n} dl\end{aligned}\quad (8)$$

ここに、 $\Omega_{b,m}$ は図-2 に示すセル境界 m を挟む 2 つの計算セルから構成される領域であり、 $S_{b,m}$ はその面積、 $\partial\Omega_{b,m}$ はその境界を表す。

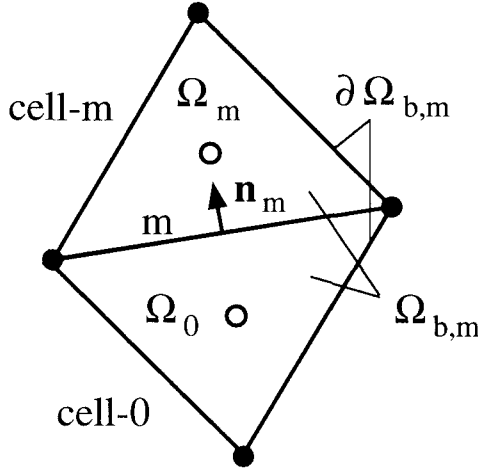


図-2 セル境界流速を評価する際のセルの構成

(4) 圧力計算の基礎式

式(8)に対して、 $n+1$ ステップの圧力を用いる場合には、次式が成り立つ。

$$\mathbf{u}_b^{n+1} = \mathbf{u}_b^* - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} \oint_{\partial\Omega_{b,m}} p^{n+1} \mathbf{n} dl \quad (9)$$

式(8)と式(9)の差を取ることで、次式が得られる。

$$\mathbf{u}_{b,m}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} \oint_{\partial\Omega_{b,m}} \phi \mathbf{n} dl \quad (10)$$

ここに、 $\phi = p^{n+1} - p^n$ である。

一方、計算セル Ω_0 に対する連続式は、次のように表される。

$$\oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{u}_b^{n+1} \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (11)$$

式(11)を三角形の計算セルで離散化すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^3 \mathbf{u}_{b,m}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_m l_m = 0 \quad (12)$$

式(10)を離散化して得られる $\mathbf{u}_b^{n+1}$ の表示式を式(12)に代入することにより、 ϕ に対する連立1次方程

式が得られる。図-2 に示された領域 $\Omega_{b,m}$ に対して、式(10)は次のように離散化される。

$$\mathbf{u}_{b,m}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} \sum_{k=1}^4 \phi_k \mathbf{n}_k l_k \quad (13)$$

ここで、 ϕ が各セル内で一定であると仮定する。領域 $\Omega_{b,m}$ を構成する 2 つの計算セルにわたる式(13)の和をセル境界 m で評価すると次式が導かれる。

$$\mathbf{u}_{b,m}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} (\phi_m - \phi_0) \mathbf{n}_m l_m \quad (14)$$

式(14)を式(12)に代入すれば、次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^3 \frac{l_m^2}{S_{b,m}} (\phi_m - \phi_0) = \frac{\rho}{\Delta t} D \quad (15)$$

ここに、 D は次式で与えられる。

$$D = \sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{u}}_{b,m}^* \cdot \mathbf{n}_m l_m \quad (16)$$

(5) C-HSMAC 法の適用

非圧縮性流体の計算では、各計算ステップで流体の連続性に対する誤差を十分小さく保つことが重要である。このために、C-HSMAC 法が有効であることが示されており⁵⁾、また同手法は SOLA 法よりも収束特性が優れていることが示されている⁶⁾。ここでは、非構造コロケート格子を用いる場合の C-HSMAC 法の利用方法を示す。

C-HSMAC 法を適用する場合には、以下の関係式を用いる。ここで、上添字 k ($k=1, 2, \dots$) は、C-HSMAC 法の反復計算ステップを表す。

$$D = \sum_{m=1}^3 \mathbf{u}_{b,m}^k \cdot \mathbf{n}_m l_m \quad (17)$$

$$\sum_{m=1}^3 \frac{l_m^2}{S_{b,m}} (\phi_m - \phi) = \frac{\rho}{\Delta t} D \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_{b,m}^{k+1} = \mathbf{u}_{b,m}^k - \frac{\Delta t}{\rho S_{b,m}} (\phi_m - \phi) \mathbf{n}_m l_m \quad (19)$$

$$p^{k+1} = p^k + \phi \quad (20)$$

これらの関係式を用いた C-HSMAC 法の計算手順は次のように要約される。

- 1) 式(17)を用いてセル境界流速ベクトル $\mathbf{u}_{b,m}^k$ の発散 D を計算する。 $\mathbf{u}_{b,m}^k$ の初期値には、 $\hat{\mathbf{u}}_{b,m}^*$ を用いる。与えられたしきい値 D_0 に対して、全ての計算セルで $|D| < D_0$ なる条件が満たされた場合には、C-HSMAC 法の反復計算を終了する。この条件が満足されない場合には、以下の手順を行う。

- 2) 得られた D を用いて、式 (18) に基づき ϕ の連立 1 次方程式を構成し、その数値解を求める。数値解の残差に対するしきい値を ϵ_p とするとき、 ϵ_p の値が適切でないと $|D|$ がある値以下にならない場合がある。これは、 D が ϕ の連立 1 次方程式の残差と直接関係するためである⁶⁾。 $|D|$ を D_0 以下の値に収束させるためには、 $\epsilon_p = \alpha^{k-1} \epsilon_0$ ($\alpha < 1$, ϵ_0 はしきい値の初期値, $k-1$ はべき乗) として、C-HSMAC 法の反復計算ごとにしきい値を 0 へ近づけることが有効である¹⁰⁾。
- 3) 得られた ϕ の数値解を式 (19) に用いて、 $u_{b,m}^{k+1}$ を求める。
- 4) 式 (20) に従い、 ϕ を用いて圧力 p を更新する。なお、 p の初期値には p^n を用いる。
- 5) $u_{b,m}^{k+1}$ を $u_{b,m}^k$, また p^{k+1} を p^k として、最初の手順に戻る。

以上の手順に従って C-HSMAC 法の反復計算を行うことにより、反復計算終了後には、すべての計算セルで連続性の誤差が D_0 以下となり、圧力 p^{n+1} が p^{k+1} として得られる。

なお、 u_i^{n+1} は、 p^{n+1} を用いて次式より計算される。

$$u_i^{n+1} = u_{c,i} - \frac{\Delta t}{S} \oint_{\partial\Omega} \frac{p^{n+1}}{\rho} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (21)$$

3. 計算手法の適用性

(1) キャビティ流れの計算

C-HSMAC 法は、連続性に関する誤差を圧力計算の収束判定基準として用いることに特徴がある。本節では、非構造格子を用いる場合でも、C-HSMAC 法が有効に機能することを確認するため、2 次元キャビティ流れに計算手法を適用する。座標原点は左下隅におき、水平右方向および鉛直方向に x, y 座標を取る。

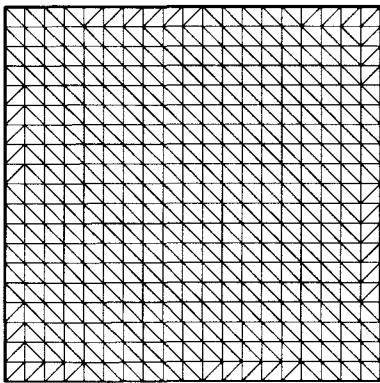


図-3 正方形キャビティに対する計算セル
(計算セル数は 400)

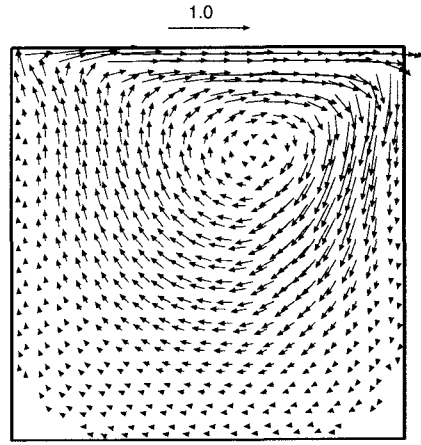


図-4 計算により得られた流速ベクトルの分布
($Re=100$, $t=20.0$)

図-3 は、一辺の長さが 1.0 である正方形キャビティに対して生成した非構造格子を示す。計算セル数は 400 である。本節の計算対象領域は単純な形状であるが、以下では格子生成法としてデローニー三角分割法に基づく自動格子生成法¹¹⁾を用いている。

計算により得られた $t=20.0$ における流速ベクトルの分布を図-4 に示す。レイノルズ数は 100 である。流速の境界条件は、キャビティ上面における水平方向のセル境界流速を 1.0 とし、他の境界面ではセル境界流速を 0 とした。また、移流項の計算には、2 次精度の離散化法を用いた。

$x=0.5$ における水平方向の流速成分 (u) の鉛直方向分布を Ghia ら¹²⁾ の計算値と比較した結果を図-5 に示す。ここで、 $x-y$ 座標系の原点は左下隅に定義し、水平右方向に x 軸、また鉛直上方に y 軸をとっている。本節の計算では、 $x=0.5$ の鉛直断面上に計算セル中心が位置していないため、この断面に近接するセル中心上の流速を図中に示した。このため、計算値には多少のばらつきが見られるが、Ghia らの結果とほぼ一致するものとなっている。

次に、連続性に関する誤差を把握するため、非定常計算の各ステップにおいて流速ベクトルの発散値を計算し、その絶対値の最大値 D_m を求めた。C-HSMAC 法および比較のために SMAC 法を用いて得られた D_m の時系列を図-6 に合わせて示す。計算条件は、C-HSMAC 法では $D_0 = 1.0 \times 10^{-8}$, $\epsilon_0 = 1.0 \times 10^{-2}$, $\alpha = 0.1$ とした。一方、SMAC 法では ϕ の連立 1 次方程式の数値解に対するしきい値のみが必要であり、これには C-HSMAC 法と同じ ϵ_0 を用いた。図-6 に示されるように、C-HSMAC 法を用いる本報の計算法では、すべての時刻において流速ベクトルの発散値は D_0 以下となり、非圧縮性流体の計算が適切に行われている。一

方、SMAC 法では ϕ の数値解に対する残差が圧力計算の収束判定基準となるので、流速ベクトルの発散値は直接的には制御されず、その結果連続性に関する誤差が比較的大きくなっている。以上のように、非構造格子を用いる場合においても、本報で示した解法により、C-HSMAC 法が適切に機能することが示された。

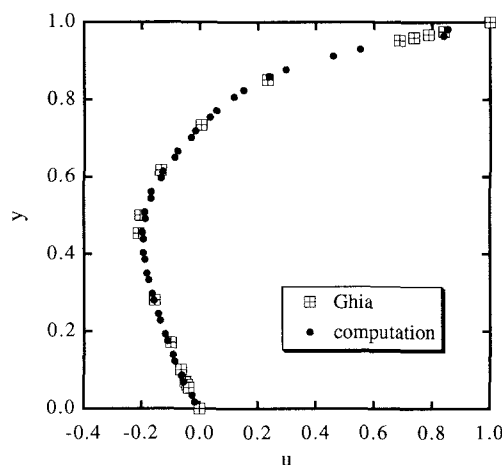


図-5 水平方向流速成分 (u) の比較 ($x = 0.5$)

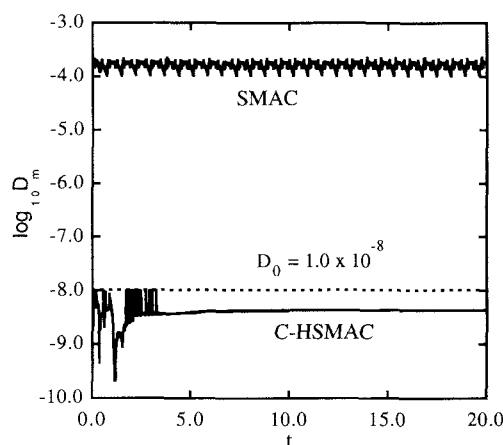


図-6 流速ベクトルの発散値 (絶対値の最大値) の時系列

(2) 河道模型に生ずる流れ

水流の変化やそれに伴う浮遊物の動きを鑑賞する目的で、幅や流下方向などを多様に变化させた小規模な水路が作成される例が報告されている^{13), 14)}。また、このような水路内の流れを把握するために、可視化計測法の適用なども試みられている¹⁵⁾。

本報の計算手法では非構造格子が用いられており、複雑な境界形状を有する流れを扱いやすい。このため、本節では河岸形状の変化が比較的顕著な河道模型に生ずる流れを対象として、その数値計算を行う。ただし、以下の計算では平面 2 次元流れを仮定しており、河床の抵抗や水深の変化がある実際の流れとは異なる条件

を用いている。

図-7 は、河道模型¹³⁾の一部の領域に対して格子生成を行った結果である。計算セル数は 3,073 である。なお、この領域に対する流入条件や水理条件は明確でないため、上流部水路幅と平均流速に基づくレイノルズ数を 4,000 とし、流入および流出境界には一様流速を与えた。移流項には 1 次精度の離散化法、また圧力解法には C-HSMAC 法を用いた。圧力計算の条件は、 $D_0 = 1.0 \times 10^{-6}$ 、 $\epsilon_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ 、 $\alpha = 0.1$ とした。

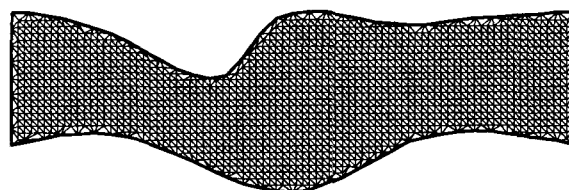


図-7 利用した計算格子の分布

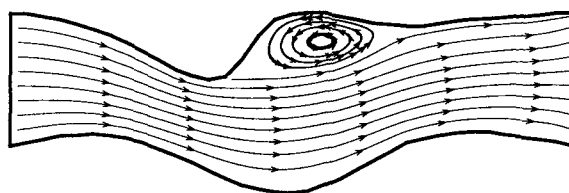


図-8 計算により得られた流線の分布



図-9 可視化実験により得られた流況 (文献¹³⁾より転載)

図-8 に計算で得られた流線の分布を示す。また、図-9 に示す可視化された流況¹³⁾と同様に、計算結果には逆流域の発生が見られる。

次に、より複雑な河道模型¹⁴⁾に対して同様の計算を行った結果を図-10 と図-11 に示す。図-10 に示す計算セルの数は 8,076、またレイノルズ数は 2,000 とした。淀み部分や州の周辺の流れなどがほぼ妥当に再現されていると見られるが、高レイノルズ数の流れを正確に予測するためには、移流項の計算精度の向上が今後の課題である。

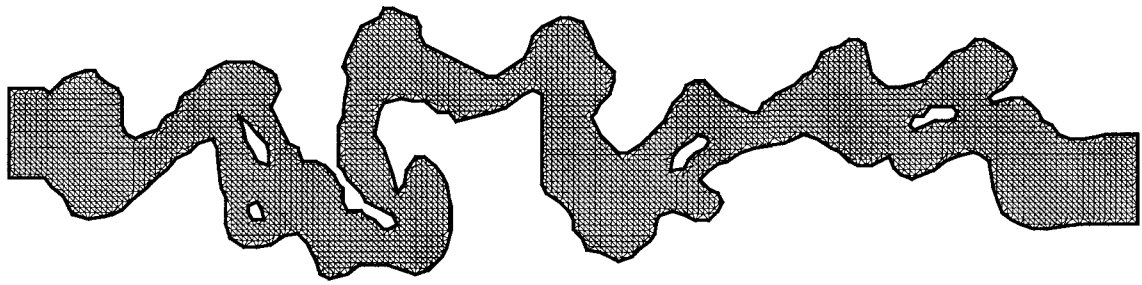


図-10 河道模型¹⁴⁾に対して生成した計算セルの分布

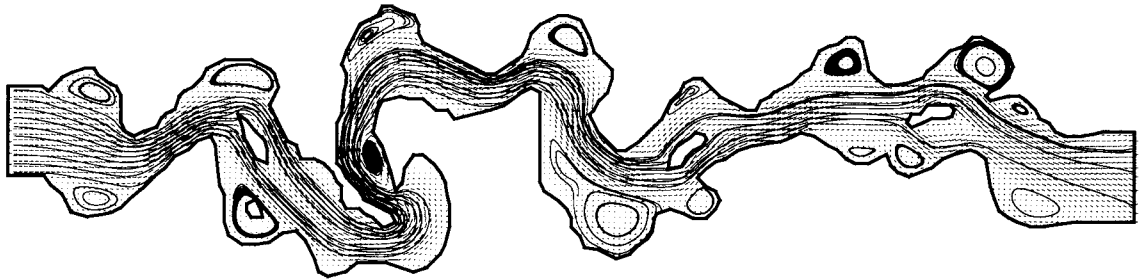


図-11 数値計算により得られた流況

4. おわりに

本報では、有限体積法により2次元非圧縮性流体の基礎式を離散化して、非構造コロケート格子上でその数値計算を行う場合を対象として、圧力計算にC-HSMAC法を用いる解法を示した。非構造格子では、セル境界を挟む2つの計算セルからセル境界上の圧力勾配を求めて、セル境界流速を修正することにより、構造格子におけるC-HSMAC法と同様の手順を取ることが可能である。この方法をキャビティ流れに用いて計算法の有効性を確認するとともに、複雑な境界形状を有する河道模型内の水流の計算に応用した。

参考文献

- 1) 木村一郎, 細田尚, 音田慎一郎, 富永晃宏: 越流型水制周辺の非定常三次元流れ構造に及ぼす水制設置角度の影響, 水工学論文集, Vol. 47, pp. 841-846, 2003.
- 2) 藤田一郎, 椿涼太: 中小都市河川に設置された側岸凹部構造物の非構造格子有限体積法による影響評価, 水工学論文集, Vol. 47, pp. 523-528, 2003.
- 3) 前野詩朗, 小川信: 非構造格子有限体積法による水理構造物周辺流れの数値解析, 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 857-864, 2003.
- 4) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久: コロケート格子配置を用いたMAC系解法の計算スキームに関する考察, 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 5) 牛島省, 瀬津家久: 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
- 6) 牛島省, 奥山洋平: 非圧縮性流体計算におけるC-HSMAC法とSOLA法の収束特性, 土木学会論文集, (掲載予定), No. 747/II-65, 2003.
- 7) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 8) Roe, P. L.: Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- 9) Barth, T. J. and Jespersen, D. C.: The design and application of upwind schemes on unstructured meshes, *AIAA Paper*, Vol. 89-0366, 1989.
- 10) 牛島省, 奥山洋平, 竹村雅樹, 瀬津家久: 3次元一般座標系における圧力場の並列計算法の提案, 水工学論文集, Vol. 47, pp. 385-390, 2003.
- 11) 谷口健男: FEMのための要素自動分割, 森北出版株式会社, 1994.
- 12) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- 13) Chang, K.-S.: Visualization of the historic remains of the Drifting cup on a meandering stream in Korea, *6th Asian symposium on visualization*, pp. 44-49, 2001.
- 14) Wei, Q.-D., Jia, C.-X. and Chen, G.: Drifting cups on a meandering stream in China, *6th Asian symposium on visualization*, pp. 41-43, 2001.
- 15) 藤田一郎, 椿涼太, 中山泰喜, 青木克巳, 沖真: 曲水の宴の流れの可視化画像計測, 可視化情報, Vol. 23 Suppl., No. 1, pp. 219-222, 2003.

(2003.9.30 受付)