

固定グリッドにおいて遡上波を追跡する 計算手法の開発

A new model to solve long waves shoaling
on a slope using rectangular grids

中山恵介¹・工藤健太郎²・石川忠晴³

¹正会員 工博 国土技術政策総合研究所 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

²学生会員 工修 東京工業大学大学院 (〒226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田4259番地)

³正会員 工博 東京工業大学大学院 教授 (〒226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田4259番地)

The aim of this study is to develop a new scheme to solve long waves shoaling on a slope by following the scheme which has been developed using Finite Element Method and cubic spline function. To simplify the computation code and reduce the computation time, piecewise linear and delta function were used as shape and weight function in elements where shoreline is not included, respectively. This means that time integration at each node can be executed explicitly like Finite Difference Method. On the other hand, piecewise linear function was used as shape and weight function in the elements including shoreline. The verification was done by making comparison between theoretical solution derived by Carrier & Greenspan and computation results. They agreed well when the number of mesh over a slope is more than 25 that corresponds to the case when the wave length is twice as long as the slope length.

Key Words : Carrier & Greenspan, Tsunami, CIP scheme, FEM, Residual cutting method
, shoaling waves

1. はじめに

洪水氾濫, 津波の遡上, 干潟における潮汐波の遡上などを数値実験により解析するためには, 水際境界の移動を厳密に再現することができるモデルが望まれる。

大まかに分けると, 水際境界を含んで計算を実行することができるモデルとして, 水際を区別せず, 閾値を用いて陸域を判断するモデル¹⁾, 水際を追跡するために格子を配置しつつ解くモデル²⁾, および定形格子において3次関数を用いた有限要素法により水際を内挿して解くモデル³⁾が存在する。

第一番目のモデルでは, 陸地において水深を与える必要があり, 境界の再現が不可能である。さらに, 底面摩擦を与えることと, CIP法⁴⁾による高周波成分に対する数値粘性により水際における不安定を解消しているため, 水際境界における反射条件は反射率が1より小さくなってしまう可能性がある。そのため, 津波の遡上のような

完全反射に近いものを検討する場合には不適當である。一方, 第2番目のモデルは, 要素再分割の負荷が大きく, 計算量に問題がある。特に, 2次元問題への拡張は困難である。

第3番目のモデルの特徴は, 有限要素法によって定形要素で移動する水際境界の条件を, 内挿して計算に組み込んでいることである。しかし, 水際境界を含む全ての点において3次関数で示される形状, 重み関数を用いているため, 格子を粗くしても計算精度が損なわれにくいという特徴がある反面, 計算速度が差分法による計算法に比べると遅い, 2次元問題に拡張したときにコードが煩雑になるという欠点を有する。そこで, 定形格子を用いて半端な位置にある水際境界を有限要素法により計算するという, 第3番目の方法でもっとも大きな特徴を生かしつつ, 計算速度を向上し, コードの作成を簡略化し2次元問題に拡張しやすくすることを本論文で試みる。さらに, その再現性を検討する。

2. 計算スキーム

石川ら³⁾の手法は、定形格子を用い、水際境界を正確に取り扱うために、有限要素法を用いて計算スキームを構築している。その際、形状関数と重み関数に、3次関数が用いられている。3次スプラインを用いることは、計算精度の向上を促し、粗いメッシュでの高精度計算を可能とするが、計算速度が遅くなる。そこでまず、水際を含む要素における形状関数と重み関数に1次関数を用い、プログラムの簡略化、計算の高速化を行う。形状、重み関数に1次関数を用いても、格子サイズを細かくすることで、石川ら³⁾の手法と同精度の計算結果が得られる。さらに、水際を用いない要素については、形状関数に1次関数、重み関数にデルタ関数を用いることにより、各ノードにおける時間発展が、差分法における中央差分と同等のものとして行われる。大部分の要素が水際を要していないことから、この簡略化により、計算速度の大幅な向上が期待される。これらの簡略化により、2次元問題への拡張が容易になるという利点も発生する。

(1) 基礎方程式と時間積分について

基礎方程式は、式(1)、式(2)で示される浅水流方程式とする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} (h + z_b) \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0 \quad (2)$$

ここで、 u : 流速、 h : 水深、 z_b : 基準面からの距離、 g : 重力加速度である。

時間積分に関しては、Time Splittingにより式(3)から式(6)のように分離する。今後、本モデルをCIP-FEMと呼ぶ。

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} = -g \frac{\partial}{\partial x} (h^n + z_b) \quad (3)$$

$$\frac{\tilde{h} - h^n}{\Delta t} = -h^n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \quad (4)$$

$$u^{n+1} = \text{CIP}_u (\tilde{u}, \tilde{h}) \quad (5)$$

$$h^{n+1} = \text{CIP}_h (\tilde{u}, \tilde{h}) \quad (6)$$

ここで、 CIP_u : CIP法による流速の計算、 CIP_h : CIP法による水深の計算、 $\tilde{u}, \tilde{h}$: 対流項以外の計算値を示す。時間積分には、4次のルンゲクッタ法を用いることとする。

(2) 非移流項の計算について

水際が存在しない要素において、図-1(a)に示される

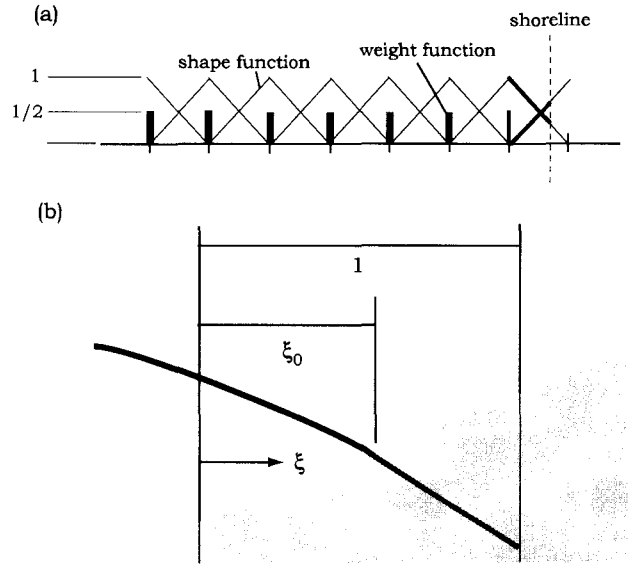


図-1 水際の概念図。

(a) 形状関数と重み関数。

(b) 水際要素の概念図。灰色は陸地を示す。

ような1次関数による形状関数(式(7))、デルタ関数による重み関数(式(8))を適用する。このような関数を用いることにより、水際を含まないノードにおける解かれるべき式は、差分法における中央差分と同等のものが得られる。

$$\begin{cases} \phi_l = 1 - \xi \\ \phi_r = \xi \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{\phi}_l = \delta(\xi) / 2 \\ \bar{\phi}_r = \delta(\xi - 1) / 2 \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 ϕ_l, ϕ_r : ある要素における形状関数、 $\bar{\phi}_l, \bar{\phi}_r$: ある要素における重み関数である。

具体的には、式(7)、式(8)で示される形状関数、重み関数を式(3)、式(4)に適用する。式(3)、式(4)を適用した式(7)、式(8)の要素積分を行うと、式(3)、式(4)に関する各要素におけるマトリックスは以下の通りとなる。

$$\int_0^1 \dot{U} d\xi = -g \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_0^1 (H + z_b) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \bar{\phi} d\xi \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{U}_r \end{pmatrix} = -\frac{g \Delta t}{2 \Delta x} \begin{pmatrix} -(h + z_b)_l + (h + z_b)_r \\ -(h + z_b)_l + (h + z_b)_r \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\int_0^1 \dot{H} d\xi = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \int_0^1 H \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \bar{\phi} d\xi \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{H}_l \\ \dot{H}_r \end{pmatrix} = \frac{\Delta t}{6 \Delta x} \begin{pmatrix} 3H_l (U_l - U_r) \\ 3H_r (U_l - U_r) \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $\dot{U}_l$, $\dot{U}_r$: ある要素のノードにおける流速の時間変化成分, $\dot{H}_l$, $\dot{H}_r$: ある要素のノードにおける水深の時間変化成分, U_l , U_r : ある要素のノードにおける流速, H_l , H_r : ある要素のノードにおける水深である。

水際が存在する場合におけるマトリックスは、石川ら³⁾を参考とし、有限要素法を用い水が存在する部分のみの積分を行い、マトリックスを作成することとする。図-1(b)に示される範囲 $0 < \xi \leq \xi_0$ を、形状関数、重み関数に1次の関数(式(12))を用いて積分することにより、以下に示されるマトリックスが、式(3)、式(4)に対応して得られる。なお、式(15)には、境界における条件である流量ゼロの条件が、重み付き残差の総和をゼロとする形で、弱形式で示される式の中に組み込まれている。

$$\int_0^{\xi_0} \dot{U} d\xi = -g \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_0^{\xi_0} (H + z_b) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \bar{\phi} d\xi \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{U}_r \end{pmatrix} = g \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$A_{11} = \xi_0 - \xi_0^2 + \frac{\xi_0^3}{3}$$

$$A_{12} = \frac{\xi_0^2}{2} - \frac{\xi_0^3}{3}$$

$$A_{13} = \left(-\xi_0 + \frac{\xi_0^2}{2} \right) (h + z_b)_l + \left(\xi_0 - \frac{\xi_0^2}{2} \right) (h + z_b)_r$$

$$A_{21} = \frac{\xi_0^2}{2} - \frac{\xi_0^3}{3}$$

$$A_{22} = \frac{\xi_0^3}{3}$$

$$A_{23} = -\frac{\xi_0^2}{2} (h + z_b)_l + \frac{\xi_0^2}{2} (h + z_b)_r$$

$$\int_0^1 \dot{H} d\xi = \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_0^1 H \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \bar{\phi} d\xi + |hu\phi|_{\xi_0} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{H}_l \\ \dot{H}_r \end{pmatrix} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{pmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$B_{11} = A_{11}$$

$$B_{12} = A_{12}$$

$$B_{13} = \left(1 - 2\xi_0 + 2\xi_0^2 - 2\xi_0^3/3 \right) U_l H_l + \left(\xi_0 - 3\xi_0^2/2 + 2\xi_0^3/3 \right) U_l H_r + \left(-\xi_0^2 + 2\xi_0^3/3 \right) U_r H_l + \left(\xi_0^2/2 - 2\xi_0^3/3 \right) U_r H_r$$

$$B_{21} = A_{21}$$

$$B_{22} = A_{22}$$

$$B_{23} = \left(\xi_0 - 3\xi_0^2/2 + 2\xi_0^3/3 \right) U_l H_l + \left(\xi_0^2 - 2\xi_0^3/3 \right) U_l H_r + \left(\xi_0^2/2 - 2\xi_0^3/3 \right) U_r H_l + 2\xi_0^3/3 U_r H_r$$

式(10)、式(12)、式(14)、式(16)で示されるマトリックスを一つにまとめることにより、境界条件を含んだ解くべきマトリックスが出来上がる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & A_{11} + \frac{1}{2} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \cdot \\ \dot{U}_j \\ \dot{U}_{j+1} \end{pmatrix} = -\frac{g\Delta t}{2\Delta x} \begin{pmatrix} -(h+z_b)_1 + (h+z_b)_2 \\ -(h+z_b)_1 + (h+z_b)_3 \\ -(h+z_b)_2 + (h+z_b)_4 \\ \cdot \\ -(h+z_b)_{j-1} + (h+z_b)_j + 2A_{13} \\ 2A_{23} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & B_{11} + \frac{1}{2} & B_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \\ \cdot \\ \dot{H}_j \\ \dot{H}_{j+1} \end{pmatrix} = \frac{\Delta t}{6\Delta x} \begin{pmatrix} 3H_1(U_1 - U_2) \\ 3H_1(U_1 - U_2) + 3H_2(U_2 - U_3) \\ 3H_2(U_2 - U_3) + 3H_3(U_3 - U_4) \\ \cdot \\ 3H_{j-1}(U_{j-1} - U_j) + 6B_{13} \\ 6B_{23} \end{pmatrix} \quad (18)$$

本論文では1次元モデルを取り扱っているため、出来上がったマトリックスには陽的に解を得ることができる部分が多く含まれ、LU分解やGaussの消去法などによりマトリックスを解く必要がある部分が小さいので、どのような解法を用いてマトリックスを解いても計算時間やプログラムの煩雑さに差はない。しかし、2次元問題へと拡張する際には、水際境界を確認しながらマトリックスを効率よく解く必要が出てくる。そこで、本論文では、陽的に解を得る部分には繰り返し計算を用いず計算時間

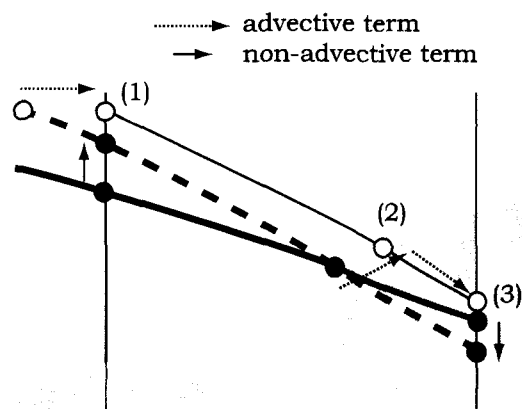


図-2 非移流計算と移流計算における水際の計算法に関する概念図。実線の矢印：非移流項による計算，点線の矢印：移流項による計算を示す。

を短縮し，繰り返し計算が必要な部分にのみ計算を適用することが容易である残差切除法⁹⁾を用いてマトリックスを解くこととした。水際の流速値は，水際の両端の流速を内挿することにより計算した。陸地内で得られる水深は，水中で支配方程式を満たすために与えられる値である。

(3) 移流項の計算と水際の移動

移流項の計算は，CIP法により行った。図-2に示されるように，非移流項の計算では水際的水深は変化せず，水際は移動しない。水際の移動は，移流項の計算の後に行われる。まず，CIP法による移流項の計算により，ポイント(1)における新たな水深が計算される。その後，水際における流速を利用してポイント(2)における新たな水際が与えられる。ポイント(1)での水深と新たな水際が決定された後，ポイント(3)における仮想水深が線形外挿により与えられる。以上の非移流項と移流項の計算を繰り返し，ルンゲクッタを用いて時間積分を行うことで，計算が実行される。水際がメッシュを横切る際には，内挿または外挿を用いることにより値の再配分を行った。

3. 斜面の遡上計算の再現性の検討

(1) Carrier & Greenspanの解

長波近似できる波が斜面を遡上してゆく場合における解として，Carrier & Greenspanの解^{(7) (8)}が存在する。Nakayamaら⁹⁾による，斜面沖側端において正弦波により内部波の振幅が与えられた場合における界面の形状，低層内部の流速の理論解を表面波へと応用する。斜面の沖側の点 $x=x_L$ において式(22)で与えられる振幅の波が与えられたとする。

$$\eta|_{\sigma=\sigma_0} = c_0 \exp[-i\omega_0 t_* + ikx_L] \quad (19)$$

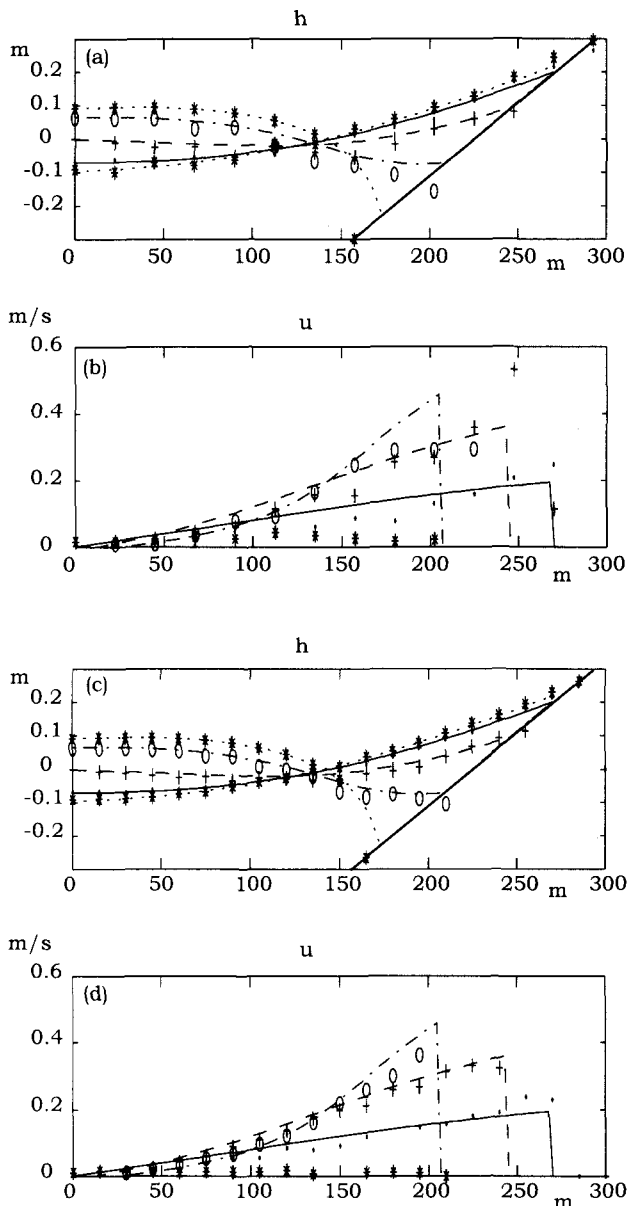


図-3 長波の斜面上への遡上問題の解析解と本手法による解との比較。斜面長225m，水深0.15m，波の周期593.9s。(a)水深，(b)流速の比較(入射波の振幅/2を0.00375m)，(c)水深，(d)流速の比較(入射波の振幅/2を0.007095m)。線が解析解，○&一点鎖線 $(-\omega_0 t_* + kx_L = \pi/8)$ ，+&破線 $(\pi/4)$ ，・&実線 $(3\pi/8)$ ，*&点線 $(\pi/2)$ それぞれ本手法による解。

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_*} \frac{L}{\sqrt{gh_2}} \quad (20)$$

$$\begin{cases} x = Lx_* \\ t = \frac{L}{\sqrt{gh_2}} t_* \end{cases} \quad (21)$$

ここで， c_0 ：振幅/2， k ：波数， T_* ：波の周期， h_2 ：沖側水深， L ：斜面長である。

斜面上で波が完全反射するとすると，式(25)から式(29)で与えられる解が，水面形 $\eta = h_2 \eta$ ，流速 $u = (g$

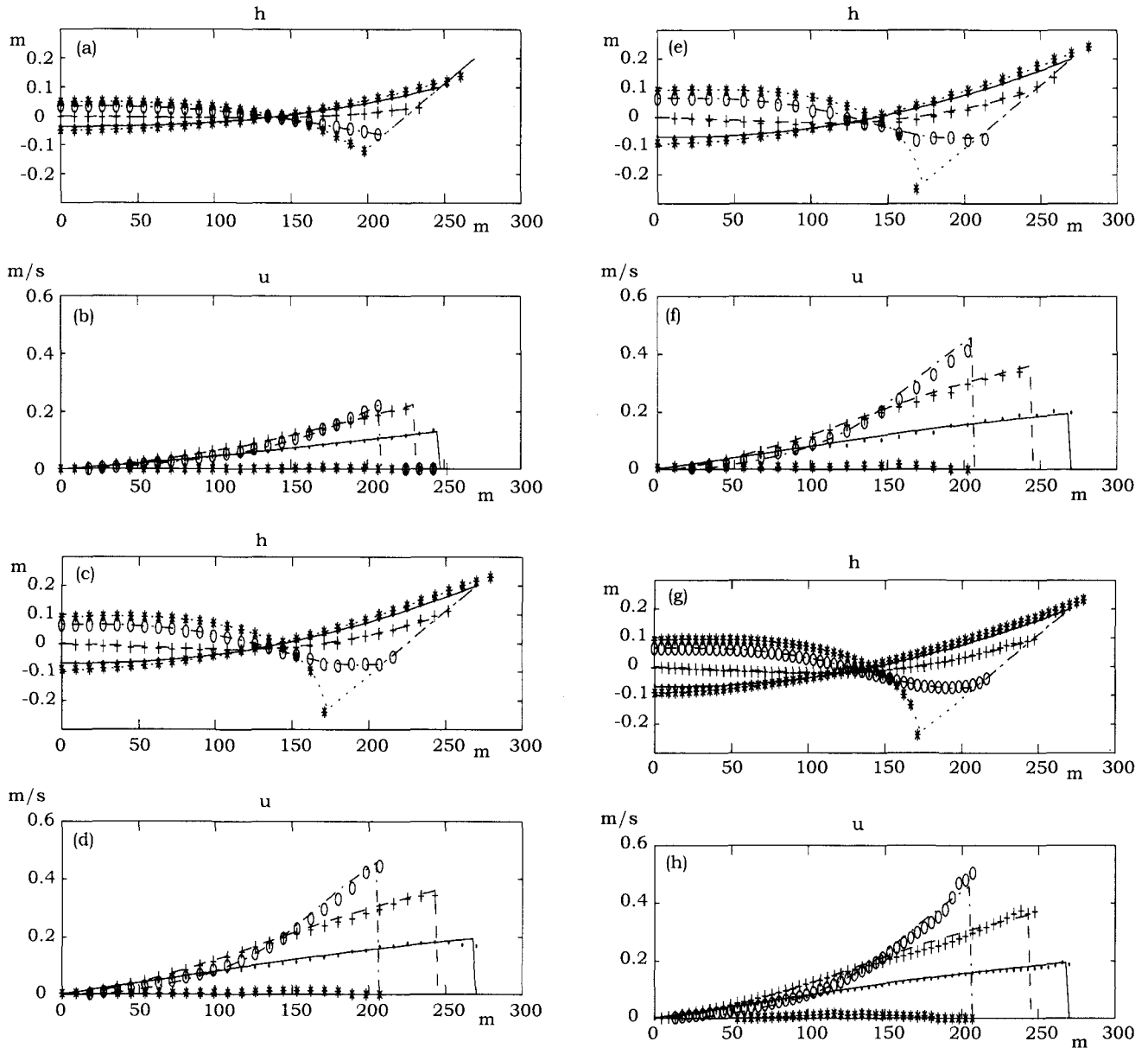


図-4 長波の斜面上への遡上問題の解析解とCIP-FEMによる解との比較。

斜面長225m, 水深0.15m, 波の周期593.9s, 入射波の振幅/2を0.00375m.

(a)水深, (b)流速の比較(メッシュ数10). (c)水深, (d)流速の比較(メッシュ数15).

(e)水深, (f)流速の比較(メッシュ数20). (g)水深, (h)流速の比較(メッシュ数50).

線が解析解, ○&一点鎖線($-\omega_0 t_0 + kx = \pi/8$), +&破線($\pi/4$), •&実線($3\pi/8$), *&点線($\pi/2$)それぞれ本手法による解.

$h_0^{0.5}v$ を決定する式として与えられる.

$$v = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (22)$$

$$\eta = \frac{\phi_\lambda}{4} - \frac{v^2}{2} \quad (23)$$

$$t = \frac{\lambda}{2} - v \quad (24)$$

$$\sigma = 4c = 4(\eta - x)^{1/2} \quad (25)$$

$$\phi = i \frac{16c_0}{\omega_0 |H_0^{(2)}(B_P)|} \exp[-i \frac{\omega_0}{2} \lambda] J_0 \left(\frac{\omega_0 \sigma}{2} \right) \quad (26)$$

$$B_P = 2\omega_0 \quad (27)$$

(2) 理論解との比較

斜面長225m, 水深0.15m, 波の周期593.9s, 入射波の振幅/2を0.00375m, 0.007095mとした場合の解析解との比較を行った(図-3). 後者の振幅は表面波が斜面に接する先端において碎波による不安定が生じる直前の限界振

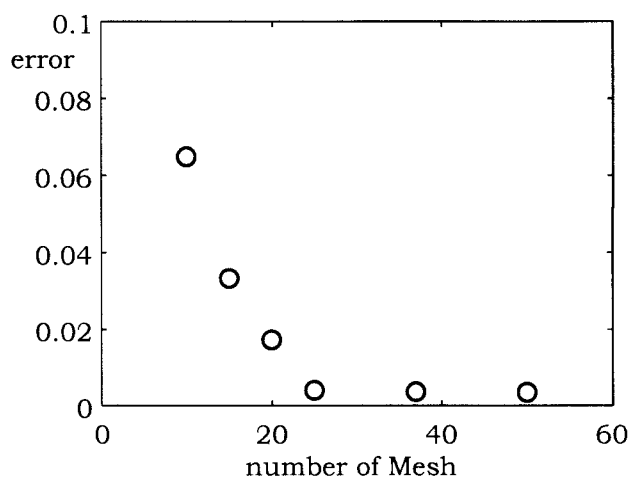


図-5 斜面長に対するメッシュサイズ10, 15, 20, 25, 50
における解析解とCIP-FEMから得られる解との
偏差で定義された誤差。

幅であり、碎波が生じない場合における最も再現が難しいケースの一つである。メッシュ間隔は22.5m, メッシュ数は30とした。解析解から得られた流速が生じない水面形を初期条件とし、3周期計算を行い、比較計算結果を得た。計算結果の比較は非常に良好であり、両ケースともに非常によく一致していた。

本論文で用いた計算結果は、石川らの計算条件と同じものであり、彼らの論文では3次関数を用いてモデルを構築した場合、静止水面が存在する斜面におけるメッシュ数が5でも、それほど再現性を損なわずに数値計算を行うことができることが示されている。そこで本論文では、3次関数の代わりに1次関数を用い、さらに重み関数にデルタ関数を用いて計算を簡略化した本モデルでのメッシュ数の変化による再現性の検討を行うこととした。

明らかに、メッシュ数が減少することにより再現性が悪くなっていることが分かる(図-4, 図-5)。メッシュ数20の場合、メッシュ数25と比較してもそれほど再現計算結果が悪くないが、それ以下のメッシュ数では再現計算結果に大きな違いが発生している箇所が存在する。誤差の程度を検討するために、各メッシュサイズにおける解析解との誤差を計算した。誤差は、解析解から得られる水深と本手法による解との偏差で定義されたもので、保存性に関するものである。誤差がメッシュ数25以上になった時点で小さくなりほぼ一定値を示している。

斜面に対する波の波長は、斜面長の2倍となるように与えられている。このことから、斜面を遡上する波の再現計算を本手法を用いて行う際、波長に対して50程度のメッシュ数が与えられるように考慮して計算することにより、良好な再現性を得られることが分かった。

計算速度について、石川らの手法との比較も行った。斜面におけるメッシュ数20のケースにおいて、Pentium4, 3GHzを用いた場合、石川らによるモデルでは3周期の計算に330sかかったが、本手法では0.75sで終了した。こ

のように計算時間に格段の差が存在するため、簡略化された本手法を用いたためにより多くのメッシュ数を用いなければならないという欠点は無視でき、逆に計算速度が速く、コード化も簡単であるという点から、本手法の有用性が伺える。

4. まとめ

- (1) 3次関数を用いた石川らのモデルに対して、水際が存在しない要素において形状関数に1次関数、重み関数にデルタ関数、水際が存在する要素において形状関数と重み関数に1次関数を用いることにより、計算の簡易化を行った。これにより、2次元問題への拡張性が増した。
- (2) 本手法を用いてCarrier&Greenspanの解との比較を行った。波長に対してメッシュ数が50以上与えられると解析解との誤差が最小化することが分かった。これにより、斜面遡上問題に本モデルを用いる際には、与えられる波長に対して50以上のメッシュを与えることが理想であることが分かった。
- (3) 計算時間の比較を、石川らのモデルと本手法で行った結果、本手法が約440倍の実行速度を持つことが分かった。

参考文献

- 1) 中山恵介, 堀川康志, 江島敬三: 樹林群を考慮した浅水流モデル, 水工学論文集第44巻, pp.801-806, 2000.
- 2) 有川太郎, 磯部雅彦: 非線形緩勾配方程式を用いた碎波・遡上計算モデルの開発, 海岸工学論文集, 第47巻, pp.186-190, 2000.
- 3) 石川忠晴, 工藤健太郎, 中村恭志, 荻籠泰彦: CIP法とFEMの組み合わせによる遡上波の新計算法に関する基礎的検討, 海岸工学論文集, 第50巻, pp.-, 2003.
- 4) Yabe T. and T. Aoki: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, Computer Physics Communications, 66, pp219-242, 1991.
- 5) 田村淳宏, 菊池一雄, 高橋匡康: だ円形境界値問題の数値解法-残差切除法について-(ポアソン方程式への適用), 日本機械学会論文集(B編), 62巻604号, 1996.
- 6) Carrier G.F., and Greenspan H.P.: Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, Vol.4, pp. 97-109, 1958.
- 7) Carrier G.F.: Topics in applied mathematics volume 1, Mathematical association of america, 1966.
- 8) Carrier G.F.: Topics in applied mathematics volume 2, Mathematical association of america, 1966.
- 9) Nakayama K., and Imberger J.: Residual circulation due to internal waves shoaling on a slope, *submitted*, 2003.

(2003. 9. 30受付)