

境界条件を計算領域内部に設定する 流体運動計算手法の開発

A NEW NUMERICAL METHOD FOR A 2-D NON-LINEAR SHALLOW WATER EQUATION SATISFYING BOUNDARY CONDITIONS ON ARBITRARY TOPOGRAPHY AND WATER SURFACE

工藤健太郎¹・石川忠晴²・中村恭志³

Kentaro KUDO, Tadaharu ISHIKAWA and Takashi NAKAMURA

¹学生会員 修(工) 東京工業大学大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田町4259)

²フェロー 工博 東京工業大学大学院教授 総合理工学研究科 (〒226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田町4259)

³博(理) 東京工業大学大学院講師 総合理工学研究科 (〒226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田町4259)

A new scheme of numerical simulation for a flow with a free water surface is proposed. First, a technique of weight residual method using "reversed weight function" is presented, with which physical condition such as "pressure is constant at a surface" can be set inside the computational domain. As a result, a flow with a free water surface on a complicated topography can be simulated on a coarse grid system, which contains the surface and the bottom of water inside. Then, the theory is formulated for FEM with rectangular regular grid system, and a demonstration is made for 2-D waves in a tank with a bottom undulation. The simulation result shows a good agreement with that from CCUP method though the grid of the former is far coarser than the latter's.

Key Words : FEM, free surface, boundary condition, numerical simulation

1. はじめに

湖, 河川, 沿岸域など自由水面を有する水域の流動や物質移動を計算する場合には, 計算領域の変化を考慮する必要がしばしば生じる. このような問題は移動境界問題と呼ばれ, それに対応する様々な工夫がなされてきた.

例えば, 砕波やスロッシングなど自由水面の時空間的変化が大きい場合には, VOF法¹⁾, MPS法²⁾などが用いられる. VOF法は, 計算領域中の気相と液相を同時に解くことにより, 計算領域内の流れ場の時間発展を解く手法である. MPS法は流体を粒子で近似し, その運動を追跡する手法である. 砕波が生じない程度の流れ, すなわち, 水面位置が水平座標の一価関数となる場合には, ALE法³⁾が用いられる. この方法では, 自由水面などの境界位置の移動に伴って計算メッシュを再構成する. 一方, 貯水池や沿岸流の三次元流動解析など, 自由水面の変化がそれほど大きくない場合には, σ 座標による定式化⁴⁾も行われている. 以上のいずれの方法も, 境界形状に適合するように計算メッシュあるいは粒子を

配置し, その内部の流れ場を解くものである.

本研究では, 移動境界問題に対する新しいアプローチとして, 通常の境界条件に相当する計算条件を計算領域の内部で与える数値計算手法を考案した. この方法によれば, 計算領域と境界条件を与える位置は互いに独立しているので, 水塊の形状変化が生じても計算領域や格子点配置を変更しないで済む. また, 境界位置を関数形で表現することが出来るため, 境界形状が不明瞭になることなく計算を進めることが出来る.

本論文では, このような数値計算手法の基礎的検討として, まず, 計算領域の内部に境界条件を設定する計算手法を一次元問題を例題として検討する. 次に鉛直二次元の非粘性流を対象に定式化を行い, 既往の計算スキームとの比較によりその妥当性を検討する.

2. 基礎方程式

基礎方程式は以下の通りである.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} = w_s \quad (4)$$

ここに, u, w : x, z 方向流速, u_s, w_s : 水面における x, z 方向流速, p : 圧力, ρ : 水の密度, g : 重力加速度. 式(1)–(4)にTime-Splittingを施し, 移流相と非移流相に分割すると, 以下の式を得る.

(a) 移流相

$$\frac{u^* - u}{\Delta t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{w^* - w}{\Delta t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{h^{n+1} - h}{\Delta t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} - w_s = 0 \quad (7)$$

(b) 非移流相

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{w^{n+1} - w^*}{\Delta t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

ここに, 添え字の*は移流相の計算結果を, $n+1$ は次ステップの物理量を表す. 本研究では, 移流相(式(5), (6), (7))をCIP法⁵⁾で, 非移流相(式(8), (9), (10))を有限要素法で解く. 内部境界条件は非移流相の解析の際に与えられる.

3. 内部境界条件導入に関する基礎的検討

本章では, 非移流相の式(8)–(10)を定式化する前準備として, 計算領域中の任意の位置で内部境界条件を与える方法を一次元微分方程式を例題として検討する.

式(8)–(9)を式(10)に代入すると, 次のPoisson方程式を得る.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) = 0 \quad (11)$$

通常, この方程式を解くための境界条件は, 壁面では自然境界条件, 水面では基本境界条件となる(図-1).

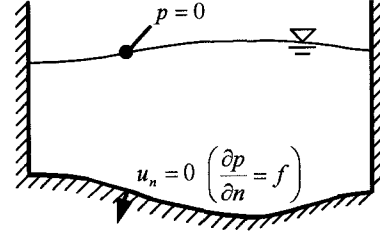


図-1 本研究で対象とする流れ場と境界条件

$$\begin{cases} u_n = 0 \left(\frac{\partial p}{\partial n} = f_n(u^*, w^*) \right) & \text{(壁面境界)} \\ p = 0 & \text{(水面境界)} \end{cases} \quad (12)$$

ここに, n : 壁面に直交するベクトル, f_n : 壁面における u^*, w^* の関数.

ここで, 内部境界条件の導入方法を検討するにあたり, 次のような微分方程式を例題として考える.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + x = 0 \quad (13)$$

境界条件は次のように設定する.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & (x = x_1) \\ p = 0 & (x = x_2) \end{cases} \quad (14)$$

式(13)は式(11)を模擬した一次方程式であり, 式(14)の第一式は壁面境界条件, 第二式は水面境界条件に相当する. なお, この方程式は次のような厳密解を持つ.

$$p = -x + \frac{\cos x_2 + x_2 \sin x_1}{\cos(x_2 - x_1)} \sin x + \frac{x_2 \cos x_1 - \sin x_2}{\cos(x_2 - x_1)} \cos x \quad (15)$$

さて, 有限要素法で二階の微分方程式を解く際に, 自然境界条件は方程式を1回部分積分し弱形式化することにより与えられる. ここでは, その手法を基本境界条件に対しても与えられるように, 2本の一階微分方程式に分けて取り扱う. すなわち,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + p + x = 0 \quad (16)$$

$$q - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

境界条件は, 次のようになる.

$$\begin{cases} q = 0 & (x = x_1) \\ p = 0 & (x = x_2) \end{cases} \quad (18)$$

本論文では, 形状関数 ϕ として, 図-2の上段に示す一次局所関数を用いる. 1つの要素 ($x_1 \leq x \leq x_2$) の中では, 次式のように表される.

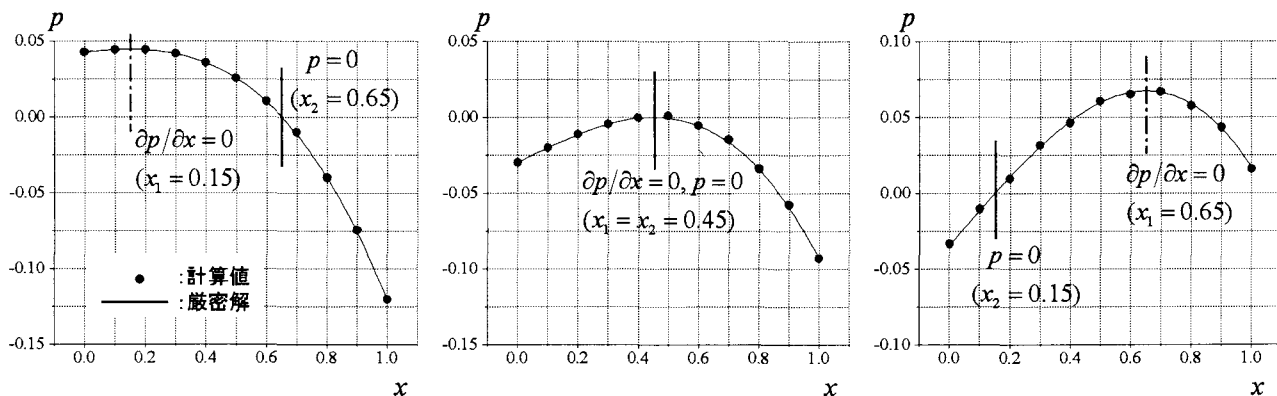


図-3 内部境界条件による解析結果と厳密解の比較

$$\begin{cases} p = P_l \phi_l(\xi) + P_r \phi_r(\xi) \\ q = Q_l \phi_l(\xi) + Q_r \phi_r(\xi) \end{cases} \quad (19)$$

$$\xi = \frac{x - x_l}{x_r - x_l}, \quad \phi_l(\xi) = 1 - \xi, \quad \phi_r(\xi) = \xi \quad (20)$$

ここに、添え字の l は要素左節点を、 r は要素右節点を表す。 ϕ_l は要素の左端点にピークを持つ形状関数、 ϕ_r は右端点にピークを持つ形状関数である。また、 ξ は要素内無次元座標である。

式(16)(17)に対して、 $(0 \leq x \leq 1)$ の区間について重み関数 ψ_i で重み付き積分すると、次式を得る。

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p + x \right) \psi_i dx = 0 \quad (21)$$

$$\int_0^1 \left(q - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \psi_i dx = 0 \quad (22)$$

ここで、式(22)を用いて内部境界条件の取り扱い方を説明する。まず、内部境界条件の与えられる $x = x_2$ において積分区間を分ける。次に、それぞれの区間積分に対して、有限要素法で通常行なわれる様に1回部分積分して境界条件を代入した後逆の過程を辿ると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_2} \left(q - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \psi_i dx - [p \psi_i]_{x=x_2}^- \\ & + \int_{x_2}^1 \left(q - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \psi_i dx + [p \psi_i]_{x=x_2}^+ = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、添え字の $-$ と $+$ は、内部境界の位置 $x = x_2$ の左側あるいは右側からこの項を考えることを意味する。

さて、重み関数 ψ_i が連続関数であるとする、上式の1行目第2項と2行目第2項は互いに打ち消し合ってしまう。そこで、次のように $x = x_2$ において不連続な重み関数を導入する。この関数の形状を図-2下段に示す。

$$\begin{cases} \psi_i = \phi_i & (0 \leq x \leq x_2) \\ \psi_i = -\phi_i & (x_2 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (24)$$

その結果、式(23)は次式のようになる。

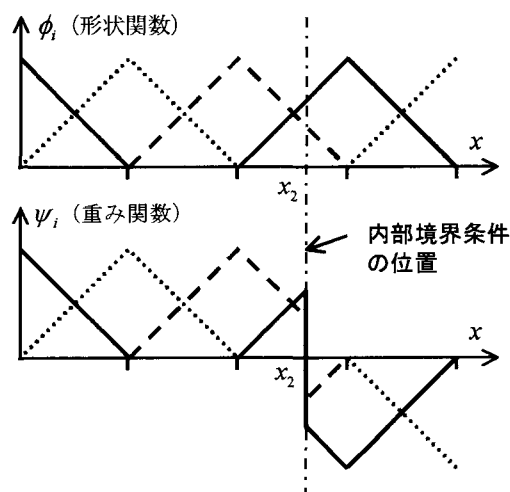


図-2 形状関数(上)と、裏返された重み関数(下)

$$\int_0^{x_2} \left(q - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \phi_i dx - \int_{x_2}^1 \left(q - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \phi_i dx - 2[p \phi_i]_{x=x_2} = 0 \quad (25)$$

さて、上式に基づいて有限要素方程式を作成する場合、 $x = x_2$ を含まない左側の重み関数の方程式群に対しては第1項のみが値を持つ。一方、 $x = x_2$ を含まない右側の重み関数に対しては第2項のみが値を持つので、符号を再度反転させることができる。すなわち、通常の Galerkin 有限要素法と全く同じようにプログラミングできる。したがって、 $x = x_2$ を含む部分についてのみ、式(25)で書かれる特別の操作をすればよい。

式(21)についても同様の変形を施すと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_2} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p + x \right) \phi_i dx - \int_{x_2}^1 \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p + x \right) \phi_i dx \\ & - 2[q \phi_i]_{x=x_2} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

この手法によって得られた計算例と厳密解を、図-3に比較する。内部境界条件が計算領域のどの場所に与えられても、計算値と厳密解はよく一致していることがわかる。

4. 自由水面を持つ二次元流れへの適用

前章で述べた手法を用いて、図-1に示した流れ場について、式(12)の境界条件のもとに非移流相の方程式(8)–(10)を解く。計算領域は、図-4に示すように水面と水底を内部に持つ四辺形の領域とする。元来、領域Ⅰは個体、領域Ⅱは水、領域Ⅲは大気であるが、冒頭で述べたように、本計算手法では計算領域と境界条件の形状は一致させないので、計算領域・計算格子を領域Ⅱの少し外側まで設定する必要がある。その代わり、領域Ⅱの外縁に沿って計算領域を設定する必要はなくなる。

本計算法では全ての領域が水で満たされているとして取り扱う。その場合でも、内部境界条件が正しく考慮されていれば、領域Ⅱにおける水の流動は、元々の問題の解に一致するはずである。なお、領域Ⅰ、Ⅲの形状には任意性があるが、本論文の目的は内部境界条件の取り扱い方法であるため、図-4に示した四辺形の領域とした。

(1) 非移流相に対する方程式の構成

式(13)で行ったと同様に式(11)を一階の微分方程式とするために、次のように新たな変数 u_p と w_p を導入する。

$$u_p = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_p = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (27)$$

その結果、解くべき方程式形は次のようになる。

$$u^{n+1} - u_p = u^* \quad (28)$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial w_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

$$w^{n+1} - w_p = w^* - g \Delta t \quad (31)$$

式(30)は p が一価のスカラー量であることを表す式である。なお、以下では式を簡単化するため $n+1$ を省略する。

(2) 内部境界条件を考慮した重み付き残差式

a) 水底境界条件

連続条件式(29)の重み付き残差式は次のように書ける。

$$\iint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \psi_i dV = 0 \quad (32)$$

式(22)から式(25)を導いたのと同様に、上式の積分領域を領域Ⅰと領域Ⅱ+Ⅲに分割し、それぞれに対して発散定理を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \iint_I \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \psi_i dV - \int_{SE(I)} u_n \psi_i dS \\ & - \int_{SW(I)} u_n \psi_i dS - \int_{SB^-} u_n \psi_i dS \\ & + \iint_{II+III} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \psi_i dV - \int_{SE(II+III)} u_n \psi_i dS \\ & - \int_{SW(II+III)} u_n \psi_i dS - \int_{SB^+} u_n \psi_i dS = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

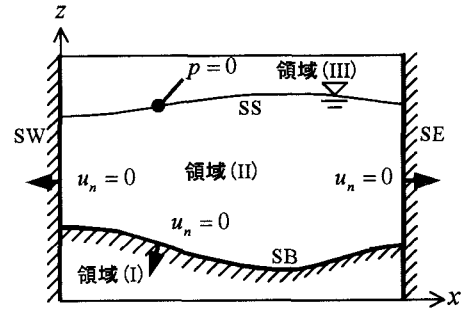


図-4 鉛直二次元モデルに対する座標系・境界条件および計算領域の分割方法

ここに、 u_n は積分境界における外向き法線方向の流速成分であり、 $\int_{SE} \cdot dS$ 、 $\int_{SW} \cdot dS$ は側壁面での反時計回り線積分、 $\int_{SB^-} \cdot dS$ は領域Ⅰから見た水底面での反時計回り線積分、 $\int_{SB^+} \cdot dS$ は領域Ⅱ+Ⅲから見た水底面での反時計回り線積分である。

ここで「裏返し有限要素法」を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \iint_{II+III} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \phi_i dV - \iint_I \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \phi_i dV \\ & - \int_{SE(II+III)} u_n \phi_i dS + \int_{SE(I)} u_n \phi_i dS \\ & - \int_{SW(II+III)} u_n \phi_i dS + \int_{SW(I)} u_n \phi_i dS - 2 \int_{SB^+} u_n \phi_i dS = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

水底にオーバーハングがないものとし、水底形状を水平座標の一価関数 $f(x)$ で表せるものとするれば、水底の線積分は次のように変形できる。

$$\int u_n \phi_i dS = \int \left(u \frac{df}{dx} dx - w \right) \phi_i dx \quad (35)$$

前節で述べた様に、水底線にかからない重み関数の方程式群については通常のGalerkin有限要素法と同じ取り扱いとなる。よって、上式に基づく特殊な取り扱いは、水底を含む要素の要素方程式作成に対してのみ行えばよい。

b) 水面境界条件

式(30)の重み付き残差式に対して、積分領域を領域Ⅰ+Ⅱと領域Ⅲに分割し、それぞれについてGreenの定理を適用した後に裏返し要素法を適用すると、前節とほとんど同じ過程を経て次式を得る。

$$\begin{aligned} & \iint_{I+II} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial z} \right) \phi_i dV - \iint_{III} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial z} \right) \phi_i dV \\ & + 2 \int_{SS} \left(w_p \frac{dh}{dx} + u_p \right) \phi_i dx = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

ここに $\int_{SS} \cdot dx$ は自由水面での積分である。ただし水面形状を水平座標の一価関数 $h(x)$ で表せるものとしている。ここで式(27)の関係をを用いると、

$$\left(w_p \frac{dh}{dx} + u_p \right) dx = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} dS \quad (37)$$

であるから、上式には「水面で $p=const.$ 」の内部境界条件が自動的に組みこまれている。

(3) 方程式の離散化

図-5に示す有限要素において、変数 y は次のように表されるとする。

$$y = \sum_{j=1}^4 Y_j \phi_j(\xi, \eta) \quad (38)$$

ここに、

$$\begin{cases} \xi = (x - x_I) / \Delta x, \eta = (z - z_J) / \Delta z, \\ \phi_1 = (1 - \xi)(1 - \eta), \phi_2 = (1 - \xi)\eta, \\ \phi_3 = \xi(1 - \eta), \phi_4 = \xi\eta \end{cases} \quad (39)$$

であり、 ξ, η は要素内無次元座標、 ϕ は一次の形状関数である。式(28)-(31)を離散化すると次式を得る。

$$\sum_{j=1}^4 C_{ij} U_j - \sum_{j=1}^4 C_{ij} U_{pj} = \sum_{j=1}^4 C_{ij} U_{j}^* \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^4 (C_{Xij} + C_{Eij}^+ + C_{Wij}^+ + D_{Xij}^+ + D_{Eij}^+ + D_{Wij}^+) U_j \\ & + \frac{1}{\Delta z} \sum_{j=1}^4 (C_{Zij} + D_{Zij}^+) W_j = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$-\frac{1}{\Delta z} \sum_{j=1}^4 (C_{Zij} + D_{Zij}^+) U_{pj} + \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^4 (C_{Xij} + D_{Xij}^+) W_{pj} = 0 \quad (42)$$

$$\sum_{j=1}^4 C_{ij} W_j - \sum_{j=1}^4 C_{ij} W_{pj} = \sum_{j=1}^4 C_{ij} W_{j}^* - \frac{g \Delta t}{4} \quad (43)$$

ただし、上式の係数は表-1に示す積分定数である。添え字の $+$ は、境界条件を含む要素に対して加算されることを意味する。各要素に対する要素方程式を計算領域全体に対して重ね合わせる事により、計算領域全体に対する方程式が得られる。

(4) 移流相の計算方法

移流相における u, w の計算にはCIP法⁵⁾を用いた。ただし、水粒子の軌跡の追跡には、その移流距離を $-u \Delta t, -w \Delta t$ で見積もる代わりに4次のRunge-Kutta法を用い、水粒子の運動を流線に沿ってラグランジュ的に追跡した。水面の移流は、まず、 x 方向の格子線上の h の変化を、4次のRunge-Kutta法を用いてラグランジュ的に追跡した。次に格子線上での $\partial h / \partial x$ を、次式により二次精度の空間差分で求め、 h と $\partial h / \partial x$ から格子線間の水面形を三次関数で表し、次の非移流相の計算に用いた。

$$\frac{\partial h_I}{\partial x} = \begin{cases} (-3h_1 + 4h_2 - h_3) / 2\Delta x & (\text{左壁面}(I=1)) \\ (h_{I+1} - h_{I-1}) / 2\Delta x & (\text{一般の格子点}) \\ (3h_N - 4h_{N-1} + h_{N-2}) / 2\Delta x & (\text{右壁面}(I=N)) \end{cases} \quad (44)$$

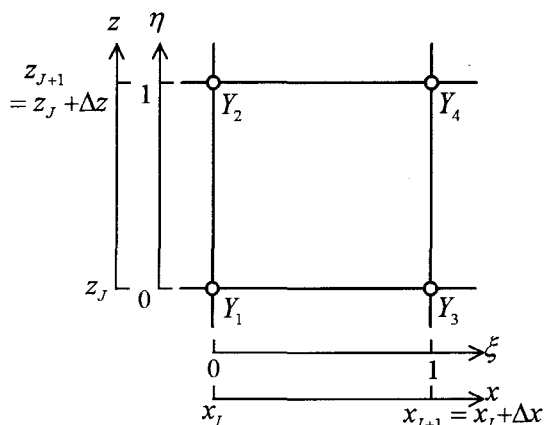


図-5 二次元モデルにおける有限要素

表-1 有限要素マトリクスの積分定数と適用条件

全ての要素	$C_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi d\eta,$ $C_{Xij} = \int_0^1 \int_0^1 \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} d\xi d\eta, C_{Zij} = \int_0^1 \int_0^1 \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} d\xi d\eta$
境界SBを含む要素	$D_{Xij}^+ = -2 \left\{ \iint_{V_2} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int_{z_0} \phi_i \phi_j \frac{dz_0}{d\xi} d\xi \right\},$ $D_{Zij}^+ = -2 \left\{ \iint_{V_2} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} d\xi d\eta - \int_{z_0} \phi_i \phi_j d\xi \right\}$
境界SW又はSEを含む要素	$C_{Wij}^+ = \int_0^1 \phi_i(0, \eta) \phi_j(0, \eta) d\eta, C_{Eij}^+ = - \int_0^1 \phi_i(1, \eta) \phi_j(1, \eta) d\eta$
境界SW又はSEを含み、かつSBを含む要素	$D_{Wij}^+ = -2 \int_0^{\eta_0} \phi_i(0, \eta) \phi_j(0, \eta) d\eta,$ $D_{Eij}^+ = 2 \int_0^{\eta_0} \phi_i(1, \eta) \phi_j(1, \eta) d\eta \quad (\eta_0 = (f - z_J) / \Delta z)$
境界SSを含む要素	$D_{Xij}^+ = -2 \left\{ \iint_{V(z < h)} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int_h \phi_i \phi_j \frac{dh}{d\xi} d\xi \right\},$ $D_{Zij}^+ = -2 \left\{ \iint_{V(z < h)} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} d\xi d\eta - \int_h \phi_i \phi_j d\xi \right\}$

表-2 計算条件

	Δx (m)	Δz (m)	Δt (s)	要素数
本モデル	5.0	0.25	0.01	20 × 12
CCUP	3.45	0.006	0.01	29 × 499

(5) 検証計算

今回用いた計算手法の精度を検証するため、図-4に示したようなセイシュの解析を行った。また、計算結果の比較のため、CCUP⁵⁾による解析も行った。それぞれのモデルに対する計算条件を表-2に示す。初期条件は、水面形および底面形をそれぞれコサイン関数で与え、流体はすべて静止している状態を仮想的に与えた。なお、今回用いた計算モデルでは、水面位置および底面の形状を一次連続の三次関数としたため、鉛直方向のメッシュが荒くても水面形を明瞭に捉えることが出来る。それに対し、CCUPでは水面形の判定にColor Functionを用い、かつ底面形状を階段状に表現するため、流れ場を精度良く解析するためにメッシュを細かくする必要がある。

計算結果を図-6に示す。本計算手法では、水面より上(領域I)あるいは底面より下(領域III)もすべて水で満たされているとして取り扱うため、これらの部分にも流れ場が発生している。まず、水面形の計算結果である

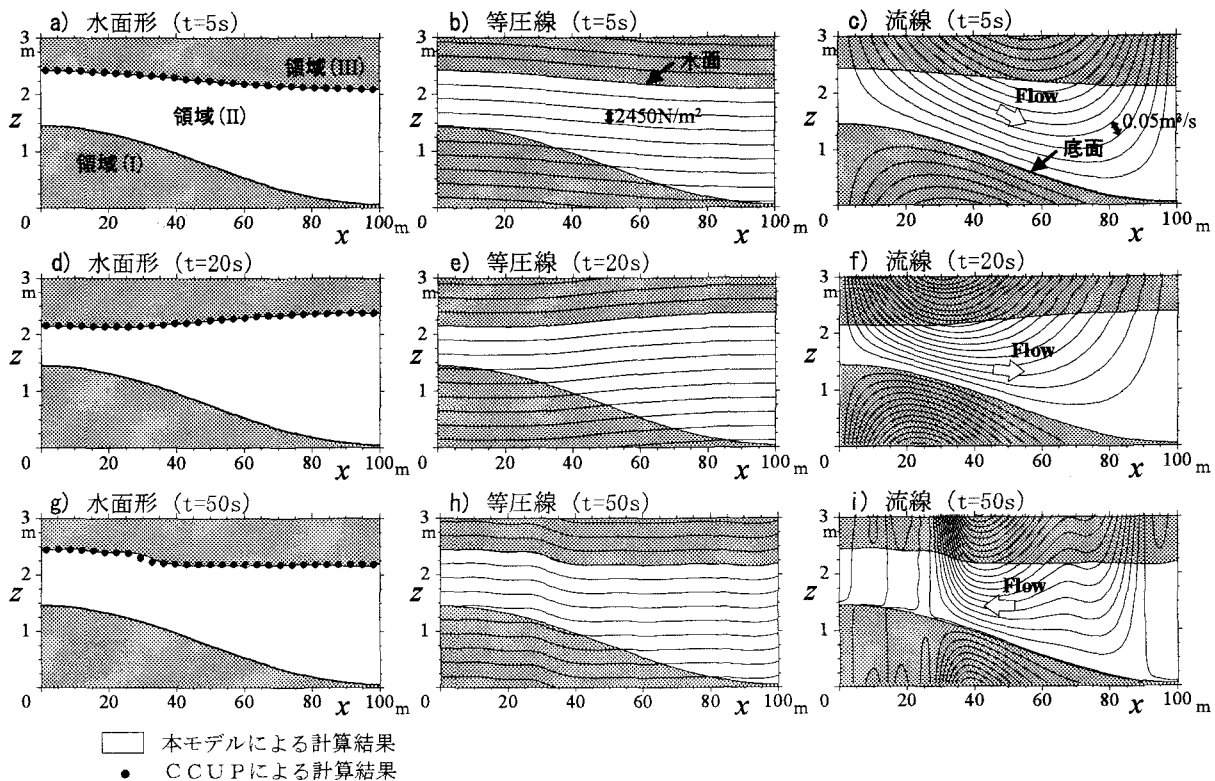


図-6 本計算手法による自由水面流れ場の解析結果

が、図-6a)d)g)より、時間の経過とともに波の非線形な効果が現れ、徐々に段波形になっている。この傾向はC C U Pにおいても現れており、両者の水面形はよく一致している。また、水面形が段波状になった場合でも、波のフロントの形状は両モデルに差異が認められるものの、その前後の部分における水位はほとんど一致している。なお、計算開始後より5000ステップ目($t=50s$)までの期間における、水(領域II)の初期条件に対する体積誤差は最大0.06%であり、本モデルの保存性は良好であるといえる。

次に、圧力場についてみる。図-6b)e)h)は、計算によって得られる u_p 、 w_p の空間分布から算出した等圧曲線である。それぞれの図において、ある一つの等圧線が内部境界である水面形状と完全に一致していることがわかる。また、水面が段波状になった後も、水面波の振動が流れ場全体に伝わっていることも分かる。最後に、図-6c)f)i)の流線であるが、流線も壁面、特に底面地形に沿っていることから、計算対象となる水の部分の流れ場(領域II)が正しく計算されていることが分かる。なお、図-6i)において、水底線より鉛直方向に数本の流線が描かれているが、この部分では実際には流速はほとんどゼロとなっている。

以上より、「内部境界条件」という計算手法によって、計算領域内の任意の位置に境界条件を設定することが出来、その結果、従来のスキームに比べて比較的粗い格子を用いても、自由水面流れを同等の精度で解析できることが分かった。

5. おわりに

本研究では、境界条件を計算領域内部で与える「内部境界条件」という新しい計算手法を基礎的に検討した。また、内部境界に対しては、重み関数を境界位置の両側で反転させる「裏返し有限要素法」という手法を新たに考案した。この方法により、境界形状と計算領域を互いに独立して設定することが出来、かつ、運動方程式および境界条件を満足する解が得られることが分かった。

参考文献

- 1) Hirt, C. W. and Nichols, B. D.: Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.*, Vol.39, pp.201-225, 1981.
- 2) 越塚誠一: 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館, 1997.
- 3) Hirt, C. W., Amsden, A. A. and Cook, J. L.: An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, *J. Comput. Phys.*, Vol.14, pp.227-253, 1974.
- 4) 瀬岡和夫, 吉野忠和, 二瓶泰雄: 沿岸海水流動数値計算法の高度化のためのDual- σ 座標系の提案, 土木学会論文集, No. 656/II-52, pp.183-192, 2000.
- 5) Yabe, T., Xiao, F. and Utsumi, T.: The constrained interpolation profile method for multiphase analysis, *J. Comput. Phys.*, Vol.169, pp.556-593, 2001.

(2003. 9. 30受付)